

COSECHA DE ENERGÍA A PARTIR DE LA INESTABILIDAD AEROELÁSTICA FLUTTER

Santiago Ribero^a, Juan M. Hümöller^a, Emmanuel Beltramo^{ab}, José E. Stuardi^a y Sergio Preidikman^{ab}

^a*Departamento de Estructuras, FCFyN, Universidad Nacional de Córdoba, Av. Vélez Sarsfield 1611, 5000 Córdoba, Argentina. depestructuras@fcecyn.unc.edu.ar, <http://www.efn.uncor.edu.ar>*

^b*Instituto de Estudios Avanzados en Ingeniería y Tecnología (IDIT) - CONICET, Universidad Nacional de Córdoba, Av. Vélez Sarsfield 1611, 5000 Córdoba, Argentina. idit@fcefyn.edu.ar, <http://www.inv.idit.efn.uncor.edu/>*

Palabras Clave: Cosecha de energía, Aeroelasticidad, Materiales piezoeléctricos, Flutter, Aerodinámica inestacionaria.

Resumen. La cosecha de energía (en inglés: “energy harvesting” o “power harvesting”) es el proceso por el cual la energía que “rodea” a un sistema (lumínica, térmica, solar o cinética) es convertida en una forma “utilizable” de energía con el fin de, por ejemplo, alimentar sensores, actuadores, u otros dispositivos electrónicos. Es posible desarrollar cosechadores de energía que utilicen las vibraciones mecánicas de algún componente estructural (debidas a ráfagas o a oscilaciones de ciclo límite causadas por inestabilidades aeroelásticas como por ejemplo el flutter) como fuente principal de energía de entrada. La conversión de estas vibraciones en energía eléctrica aprovechable puede llevarse a cabo empleando transductores piezoeléctricos. En este trabajo se estudia una versión simplificada de un ala multifuncional como elemento cosechador de energía. Esta es estructuralmente representada por una viga en voladizo cuyas superficies superior e inferior están cubiertas por material piezoeléctrico, mientras que su extremo libre se vincula a un perfil aerodinámico simétrico. Las ecuaciones electro-aeroelásticas se desarrollan utilizando un enfoque energético. Las cargas aerodinámicas no-lineales e inestacionarias son evaluadas mediante la implementación de una versión ad-hoc del método de la red de vórtices. La integración de las ecuaciones gobernantes se realiza numérica e interactivamente en el dominio del tiempo empleando un método predictor-corrector. Como parte de los resultados obtenidos, se determinó la velocidad de flutter para el modelo aeroelástico y para el electro-aeroelástico, y se analizó el desempeño del cosechador en condición de flutter. Se calculó la tensión y la potencia cosechada en régimen en función de la carga resistiva. Este esfuerzo constituye el punto de partida para encarar futuros trabajos sobre sistemas de mayor envergadura, como por ejemplo aviones equipados con alas multifuncionales extremadamente flexibles y muy esbeltas. Esta tecnología posibilita alimentar a sensores y sistemas de accionamiento mediante la energía cosechada.

1 INTRODUCCIÓN

El flutter es una inestabilidad de origen aeroelástico que acontece en estructuras flexibles inmersas en el flujo de un fluido y constituye sólo uno de los muchos mecanismos aeroelásticos que pueden ocurrir en el contexto de la interacción fluido-estructura. Tradicionalmente, la comunidad científica que trabaja en el área de la aeroelasticidad ha clasificado al flutter como un fenómeno destructivo, altamente no-lineal debido a la presencia de grandes deformaciones geométricas y a la aerodinámica, de naturaleza no-estacionaria. Desde hace algunas décadas investigadores en los campos de la ingeniería aeronáutica y civil realizan trabajos orientados en disminuir las vibraciones producidas por este fenómeno en sistemas de grandes envergaduras (Librescu y Marzocca, 2005). Sin embargo, en los últimos años y desde una perspectiva diferente, este y otros fenómenos aeroelásticos han sido propuestos como una nueva fuente de energía para sistemas de pequeña escala (Abdelkefi, 2016).

Muchos trabajos de investigación recientes han enfatizado la posibilidad de desarrollar cosechadores de energía que aprovechen las vibraciones mecánicas de algún componente estructural, debidas a ráfagas o a oscilaciones de ciclo limite causadas por inestabilidades aeroelásticas, como fuente principal de energía de entrada. La conversión de las vibraciones ambientales y aeroelásticas en energía aprovechable puede llevarse a cabo utilizando mecanismos de transducción electromagnéticos, electrostáticos o piezoeléctricos.

Los materiales piezoeléctricos son cristales naturales o sintéticos que se caracterizan por producir una diferencia de potencial eléctrico cuando son deformados mecánicamente (efecto piezoeléctrico directo) o viceversa, sufrir una deformación mecánica al ser sometidos a la acción de un campo eléctrico (efecto piezoeléctrico inverso). En los cosechadores de energía, el piezoeléctrico es embebido en una estructura que está inmersa en el flujo de un fluido y que es excitada hasta la velocidad de flutter de manera que experimente grandes oscilaciones de ciclo límite; estas oscilaciones pueden ser convertidas en energía eléctrica haciendo uso de los transductores piezoeléctricos (Abdelkefi, 2016). Por lo tanto, la cosecha de energía mediante transductores piezoeléctricos es muy atractiva porque puede reducir el peso total de un avión proporcionando fuentes alternativas de alimentación para sus sensores y sistemas de accionamiento, eliminando los circuitos eléctricos e hidráulicos, y por ende mejorar la envolvente de vuelo de aviones auto sustentables, que resultan más eficientes y más amigables con el medio ambiente.

El objetivo de este trabajo consiste en el desarrollo de un modelo sencillo de un ala multifuncional como sistema cosechador de energía a partir de la inestabilidad aeroelástica de flutter. Se describe el modelo propuesto y se desarrollan las ecuaciones de movimiento, presentando la metodología de integración, los parámetros de simulación y los resultados obtenidos. Finalmente se resumen algunas conclusiones.

2 DESCRIPCIÓN DEL MODELO

En este trabajo se estudia una versión simplificada de un ala multifuncional como sistema cosechador de energía tal como se exhibe en la Figura 1. El elemento sustentador se modela mediante una viga en voladizo cuyas superficies superior e inferior están cubiertas por láminas de material piezoeléctrico. El extremo libre de la viga se vincula a un perfil aerodinámico simétrico que está sumergido en una corriente de fluido. Se asume que el perfil y la viga se vinculan por intermedio de una articulación que tiene la capacidad de transmitir únicamente movimiento vertical, por lo que el giro del perfil está desacoplado del movimiento transversal de la viga. La rigidez a torsión del ala está representada por el resorte torsional de rigidez K_θ .

Por otro lado, las láminas piezoeléctricas poseen sus electrodos paralelos al plano xy y están polarizadas en la dirección z . Se encuentran conectadas en paralelo tal que la diferencia de potencial inducida por deformaciones opuestas pueda ser sumada, de esta manera la viga representa el punto de menor potencial. Nótese que los puntos situados sobre las láminas piezoeléctricas indican la dirección de polarización. La energía se cosecha a través de una resistencia R por la que circula una corriente de intensidad $\dot{q}(t)$.

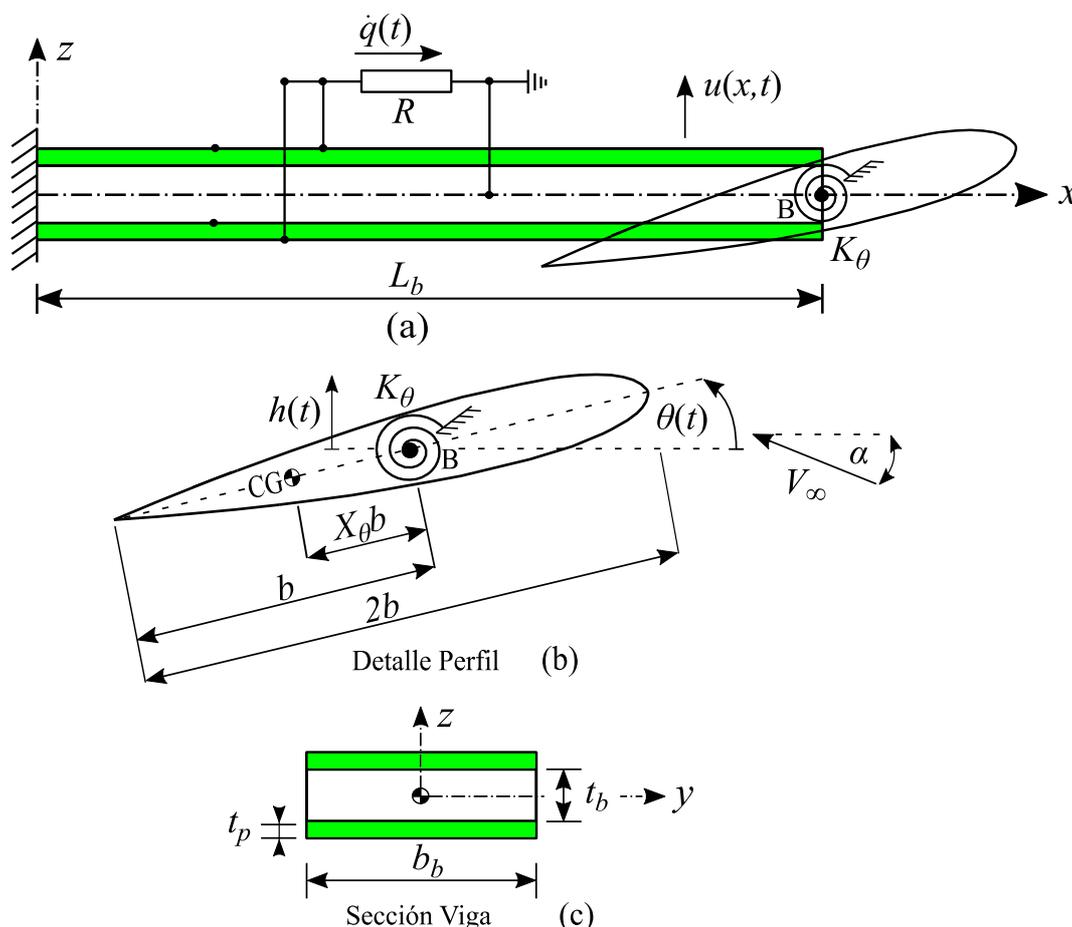


Figura 1: Esquema del modelo propuesto: (a) modelo completo, (b) detalle del perfil, (c) sección de la viga.

La Figura 1a presenta un esquema del modelo propuesto y en la Figura 1b y 1c se detalla la nomenclatura utilizada en el trabajo. El sistema electro-aeroelástico se analiza considerando el campo de movimiento transversal de la viga $u(x,t)$, el campo de desplazamiento eléctrico $D_z(z,t)$ y la coordenada generalizada $\theta(t)$ que representa la torsión del perfil. La longitud de la viga se simboliza con L_b , mientras que su espesor y su ancho se describen con t_b y b_b . El espesor de cada lámina piezoeléctrica es t_p y su ancho es igual al de la viga. V_∞ y α representan a la velocidad y al ángulo de incidencia de la corriente libre respectivamente. La semi-cuerda del perfil se indica con b y X_θ es un parámetro adimensional utilizado para posicionar el centro de gravedad (CG) del perfil respecto a su eje elástico que se indica con B.

A pesar del grado de simplicidad del modelo propuesto, el sistema conserva su característica multifísica puesto que debe tratarse con diferentes esquemas el fenómeno elástico, el electromecánico y el aerodinámico. Esto exige la implementación de un mecanismo de acoplamiento entre los esquemas para estudiar el comportamiento del conjunto.

2.1 Modelo elástico

El comportamiento estructural del ala se modela mediante una viga de Bernoulli cuyo campo de desplazamiento transversal $u(x,t)$ se aproxima por el producto de una función de forma $\phi(x)$ y una coordenada generalizada $h(t)$:

$$u(x,t) = \phi(x) h(t) \quad (1)$$

Se adopta como función de forma un polinomio cúbico que toma un valor unitario en el extremo libre:

$$\phi(x) = \left(\frac{x}{L_b} \right)^3 \quad (2)$$

La viga esta formada por dos materiales, un núcleo de aluminio y láminas piezoeléctricas que recubren la superficie superior e inferior. Este modelo considera que la viga y las láminas constituyen una estructura continua y permite asumir las hipótesis de Euler-Bernoulli para una viga en flexión. Asimismo, se desprecian los efectos del corte transversal y se supone una distribución lineal de las deformaciones a través de la sección transversal de la viga (Chopra y Sirohi, 2013). En consecuencia, la deformación en dirección longitudinal se puede aproximar mediante:

$$\begin{aligned} \varepsilon(x, z, t) &= -z \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \\ \varepsilon(x, z, t) &= -\frac{6xz}{L_b^3} h(t) \end{aligned} \quad (3)$$

Además, se desprecia la masa de la viga por ser pequeña frente a la masa del perfil.

2.2 Modelo electromecánico

El modelo electromecánico permite relacionar deformación mecánica y desplazamiento eléctrico con tensión mecánica y campo eléctrico. En virtud del modelo elástico elegido, se asume que las láminas piezoeléctricas se deforman en la dirección longitudinal x y se desprecia cualquier deformación en dirección transversal. Las relaciones constitutivas básicas se asumen lineales, los coeficientes que aparecen en ellas se consideran constantes e independientes de la tensión mecánica y del campo eléctrico. Teniendo en cuenta las expresiones que figuran en la obra de Chopra y Sirohi (2013), las relaciones constitutivas inversas son:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ E_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{e_{zz}^\sigma}{(-d_{zx}^2 + e_{zz}^\sigma s_{xx}^E)} & \frac{-d_{zx}^2}{(-d_{zx}^2 + e_{zz}^\sigma s_{xx}^E)} \\ -d_{zx}^2 & s_{xx}^E \\ \frac{-d_{zx}^2}{(-d_{zx}^2 + e_{zz}^\sigma s_{xx}^E)} & \frac{s_{xx}^E}{(-d_{zx}^2 + e_{zz}^\sigma s_{xx}^E)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ D_z \end{Bmatrix} \quad (4)$$

Donde σ_{xx} es la tensión mecánica en dirección x , E_z es el campo eléctrico en la dirección del eje z , ε_{xx} la deformación mecánica en dirección x , e_{zz}^σ es la permeabilidad eléctrica a tensión mecánica constante, s_{xx}^E es el acoplamiento elástico (igual a la inversa del módulo de elasticidad del material piezoeléctrico) y d_{zx} el coeficiente piezoeléctrico directo. El campo de desplazamiento eléctrico se aproxima como:

$$D_z(z, t) = \psi(z) q(t), \quad (5)$$

donde $\psi(z)$ es una función de forma y $q(t)$ es la carga eléctrica generalizada. Para la mayoría de los casos prácticos resulta suficientemente preciso asumir un campo eléctrico constante a través de las láminas piezoeléctricas. En consecuencia, se adopta como función de forma a:

$$\psi(z) = \frac{1}{A_p}, \quad (6)$$

donde A_p es el área de los electrodos.

2.3 Modelo aerodinámico

El modelo aerodinámico permite determinar las cargas que ejerce el aire sobre el ala. En este trabajo se implementa el método de la red de vórtices no-lineal e inestacionario (Preidikman, 1998) debido a que permite captar con adecuada precisión el fenómeno aeroelástico de flutter. Este método asume flujo incompresible a alto número de Reynolds, lo que permite confinar toda la vorticidad en una pequeña región del dominio formada por la capa límite y la estela, mientras que al resto del fluido se lo considera como flujo potencial. Se trata a la capa límite como una sábana vorticosa adherida en todo momento a la superficie del cuerpo y moviéndose con éste, mientras que la estela se representa mediante una sábana vorticosa libre.

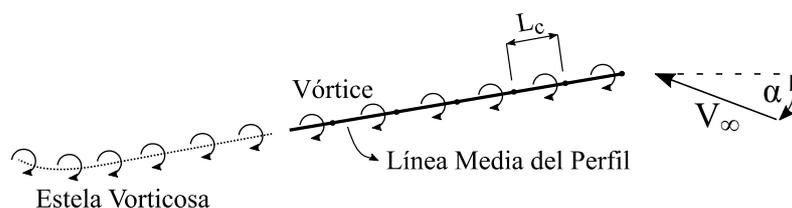


Figura 2: Modelo aerodinámico, vórtices sobre línea media y estela vorticosa.

Particularmente en este trabajo se modela un problema bidimensional adoptando un perfil aerodinámico simétrico que se idealiza mediante su línea media, véase Figura 2. La malla aerodinámica es estructurada, está formada por n elementos de longitud L_c y el número de vórtices que integran la estela es n veces mayor a la cantidad utilizada en la discretización del perfil.

2.4 Ecuaciones de movimiento del modelo electro-aeroelástico

Las cargas aerodinámicas que actúan sobre el perfil producen deformaciones longitudinales sobre la viga y, según el efecto piezoeléctrico directo, estas deformaciones generan una diferencia de potencial entre los electrodos del material. Para obtener las ecuaciones de movimiento del modelo electro-aeroelástico se deben acoplar los tres modelos presentados en la sección anterior. En este trabajo, las ecuaciones de movimiento se obtienen a partir de las ecuaciones de Lagrange. La energía cinética, $T(t)$, se expresa como:

$$T(t) = \frac{1}{2} m \left[\dot{h}^2(t) + \dot{\theta}^2(t) - 2X_{\theta} b \dot{h}(t) \dot{\theta}(t) \cos \theta(t) \right] + \frac{1}{2} I_{CG} \dot{\theta}^2(t) \quad (7)$$

y la energía potencial, $U(t)$:

$$\begin{aligned}
 U(t) = & \frac{1}{2} \int_0^{L_b} \int_{-t_b/2}^{t_b/2} E_b b_b \left[\frac{6xz}{L_b^3} h(t) \right]^2 dz dx + \int_0^{L_b} \int_{t_b/2}^{t_b/2+t_p} \frac{b_b e_{zz}^\sigma}{-d_{zx}^2 + e_{zz}^\sigma s_{xx}^E} \left[\frac{6xz}{L_b^3} h(t) \right]^2 dz dx + \\
 & + \int_0^{L_b} \int_{t_b/2}^{t_b/2+t_p} \frac{2b_b d_{zx}}{-d_{zx}^2 + e_{zz}^\sigma s_{xx}^E} \left[\frac{6xz}{A_p L_b^3} h(t) q(t) \right] dz dx + \int_0^{L_b} \int_{t_b/2}^{t_b/2+t_p} \frac{b_b s_{xx}^E}{-d_{zx}^2 + e_{zz}^\sigma s_{xx}^E} \left[\frac{q(t)}{A_p} \right]^2 dz dx + \frac{1}{2} K_\theta \theta^2(t),
 \end{aligned} \tag{8}$$

Teniendo en cuenta la disipación en la resistencia eléctrica y el trabajo que realizan las cargas aerodinámicas no conservativas, las ecuaciones de movimiento resultan:

$$\begin{aligned}
 m\ddot{h}(t) - m \cos \theta(t) X_\theta b \ddot{\theta}(t) + K_h h(t) + m X_\theta b \sin \theta(t) \dot{\theta}^2(t) + \Theta q(t) &= Q_h(t) \\
 I_{CG} \ddot{\theta}(t) - m \cos \theta(t) X_\theta b \ddot{h}(t) + K_\theta \theta(t) &= Q_\theta(t) \\
 R \dot{q}(t) + \Theta h(t) + \frac{1}{C_p} q(t) &= 0,
 \end{aligned} \tag{9}$$

donde:

$$\begin{aligned}
 K_h &= \frac{E_b b_b t_b^3}{L_b^3} + \frac{2b_b e_{zz}^\sigma t_p (3t_b^2 + 6t_p t_b + 4t_p^2)}{L_b^3 (-d_{zx}^2 + e_{zz}^\sigma s_{xx}^E)} \\
 \Theta &= \frac{3d_{zx} t_p (t_b + t_p)}{L_b^2 (-d_{zx}^2 + e_{zz}^\sigma s_{xx}^E)} \\
 C_p &= \frac{2A_p (-d_{zx}^2 + e_{zz}^\sigma s_{xx}^E)}{t_p s_{xx}^E}
 \end{aligned} \tag{10}$$

y las fuerzas generalizadas, $Q_h(t)$ y $Q_\theta(t)$, se expresan como:

$$\begin{aligned}
 Q_h(t) &= \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 \cos \theta(t) L_c \left[\sum_{j=1}^n \Delta C p_j \right] \\
 Q_\theta(t) &= -\frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty^2 \cos \theta(t) L_c \left[\sum_{j=1}^n \Delta C p_j \xi_j \right]
 \end{aligned} \tag{11}$$

donde ξ es una coordenada que posiciona puntos asociados a cada elemento de la malla aerodinámica respecto del eje elástico del perfil, ρ_∞ la densidad de la corriente libre y $\Delta C p_j$ la variación del coeficiente de presión sobre el elemento j de la malla. Nótese que K_h es la rigidez flexional equivalente de la viga en el extremo libre donde está definida la coordenada generalizada $h(t)$, Θ es el coeficiente de acoplamiento electromecánico y C_p la capacitancia del piezoeléctrico. De la ec. (9) se observa que el problema está gobernado por un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, no lineales y no homogéneas.

3 INTEGRACIÓN DE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO

Las ecuaciones de movimiento se integran numéricamente e interactivamente en el dominio del tiempo implementando un código computacional, que fue oportunamente validado mediante problemas de resultados conocidos (Fung, 1993). Como consecuencia de la interacción que existe entre las cargas aerodinámicas y el movimiento de la estructura, se aplica una metodología de integración basada en el método predictor-corrector de cuarto

orden de Hamming. Esto permite recalculer las cargas aerodinámicas y la posición de la estructura dentro de un mismo paso de integración. Para mayor detalle sobre esta metodología puede dirigirse al trabajo de [Preidikman \(1998\)](#).

Resulta conveniente adimensionalizar las ecuaciones, para ello se introducen las variables dimensionales que se indican con “*”:

$$\begin{aligned}
 h^* &= L_c h; \quad t^* = \frac{L_c}{V_\infty^*} t; \quad \mu = \frac{m^*}{\rho_\infty^* \pi b^{*2}}; \quad b^* = L_c b; \quad q^* = \frac{\Theta^* b^{*2}}{R^* V_\infty^*} q; \quad \theta = \theta^*; \quad \xi^* = L_c \xi \\
 r^2 &= \frac{I_{CG}^*}{m^* b^{*2}}; \quad \tau = \frac{L_c}{V_\infty^* R^* C_p^*}; \quad \beta = \frac{L_c \Theta^{*2} b^{*2}}{R^* m^* V_\infty^{*3}}; \quad \omega_1^2 = \frac{K_h^* L_c^2}{m^* V_\infty^{*2}}; \quad \omega_2^2 = \frac{K_\theta^* L_c^2}{I_{CG}^* V_\infty^{*2}}
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

Introduciendo en la ec. (9) los parámetros definidos en la ec. (12) se obtienen las ecuaciones diferenciales adimensionales:

$$\begin{aligned}
 \ddot{h}(t) - X_\theta b \cos \theta(t) \ddot{\theta}(t) + \omega_1^2 h(t) + X_\theta b \sin \theta(t) \dot{\theta}^2(t) + \beta q(t) &= \frac{1}{2\pi\mu b^2} Q_h(t) \\
 \ddot{\theta}(t) - \left(\frac{X_\theta}{br^2} \right) \cos \theta(t) \dot{h}(t) + \omega_2^2 \theta(t) &= \frac{1}{2\pi\mu b^4 r^2} Q_\theta(t) \\
 \dot{q}(t) + \frac{1}{b^2} h(t) + \tau q(t) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

Finalmente, el sistema definido por la ec. (13) se reescribe como un sistema de primer orden:

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} \dot{h}(t) \\ \dot{\theta}(t) \\ \dot{q}(t) \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -X_\theta b \cos \theta(t) & 0 \\ -X_\theta \cos \theta(t)/(br^2) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \left\langle \begin{bmatrix} -\omega_1^2 & 0 & -\beta \\ 0 & -\omega_2^2 & 0 \\ -1/b^2 & 0 & -\tau \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h(t) \\ \theta(t) \\ q(t) \end{Bmatrix} \right\rangle + \\
 &+ \left\langle \begin{Bmatrix} -X_\theta b \sin \theta(t) \dot{\theta}^2(t) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} Q_h(t)/(2\pi\mu b^2) \\ Q_\theta(t)/(2\pi\mu b^4 r^2) \\ 0 \end{Bmatrix} \right\rangle
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

4 VALORES NUMÉRICOS PARA LOS PARÁMETROS DEL MODELO

Para simular la respuesta del cosechador se necesita asignar valores numéricos a los parámetros que caracterizan al sistema. Estos se resumen en la [Tabla 1](#), [Tabla 2](#) y [Tabla 3](#).

Parámetros Mecánicos y Eléctricos	Valor Numérico
Módulo de elasticidad del núcleo de la viga, E_b	6.2×10^{10} [N/m ²]
Permeabilidad eléctrica, e_{zz}^σ	3.365×10^{-8} [C ² /Nm ²]
Acoplamiento elástico, s_{xx}^E	1.6129×10^{-9} [m ² /N]
Coefficiente piezoeléctrico directo, d_{zx}	-3.2×10^{-10} [C/N]
Densidad del aire, ρ_∞	1.2255 [Kg/m ³]
Masa del perfil, m	1.45 [Kg]
Inercia del perfil, I_{CG}	9×10^{-3} [Kg m ²]
Rigidez torsional del ala, K_θ	37 [Nm/rad]

Tabla 1: Parámetros eléctricos y mecánicos del sistema.

Parámetros Geométricos	Valor Numérico
Longitud Viga, L_b	0.517 [m]
Ancho Viga, b_b	0.0517 [m]
Espesor Viga, t_b	0.00517 [m]
Espesor Piezoeléctrico, t_p	0.0001905 [m]
Semi-cuerda, b	0.13 [m]
Parámetro adimensional, X_θ	0
Número de elementos de la malla aerodinámica, n	10
Área de los electrodos del piezoeléctrico, A_p	0.0267289 [m ²]
Ángulo de ataque, α	0 [°]

Tabla 2: Parámetros geométricos del cosechador.

Condiciones Iniciales	Valor Numérico
$\theta(0)$	1 [°]
$d\theta(0)/dt$	0 [°/s]
$h(0)$	0 [m]
$dh(0)/dt$	0 [m/s]
$q(0)$	0 [C]

Tabla 3: Condiciones iniciales utilizadas en las simulaciones.

Es importante notar que no se han establecido valores para la velocidad de la corriente libre ni para la resistencia eléctrica ya que ambas constituyen las variables del problema.

5 RESULTADOS

5.1 Modelo aeroelástico: velocidad de flutter

La estimación de la velocidad de flutter para el sistema aeroelástico (sin cosechador) puede realizarse mediante dos alternativas. Por un lado, es posible modificar el sistema de ecuaciones diferenciales (ec. (9)) para eliminar el acoplamiento electromecánico; y, por otro lado, se puede utilizar el modelo tal como fue desarrollado, pero adoptando un valor de resistencia eléctrica suficientemente grande tal que la corriente tienda a cero. Como la potencia eléctrica es función del cuadrado de la corriente, la energía disipada por unidad de tiempo también tiende a cero y el comportamiento se aproxima al del sistema sin cosechador, lo que físicamente equivale a abrir el circuito eléctrico. En este trabajo se optó por la segunda alternativa ya que no requiere modificar el código del programa.

La Figura 3 presenta la respuesta del sistema en estado subcrítico, es decir, por debajo de la velocidad de flutter. Se grafica la posición en función del tiempo y la correspondiente proyección en el diagrama de fase para las dos coordenadas generalizadas. Se observa que las amplitudes disminuyen y el sistema regresa a su posición de equilibrio luego de un cierto tiempo. La Figura 4 muestra la respuesta del sistema en estado crítico, es decir, a velocidad de flutter. Las dos coordenadas generalizadas describen un ciclo límite, sus amplitudes se mantienen constante en el tiempo. La velocidad crítica se estima en el orden de los 16.7 m/s. La Figura 5 exhibe la respuesta del sistema para una velocidad supercrítica, las amplitudes del movimiento crecen con el tiempo y el sistema se inestabiliza.

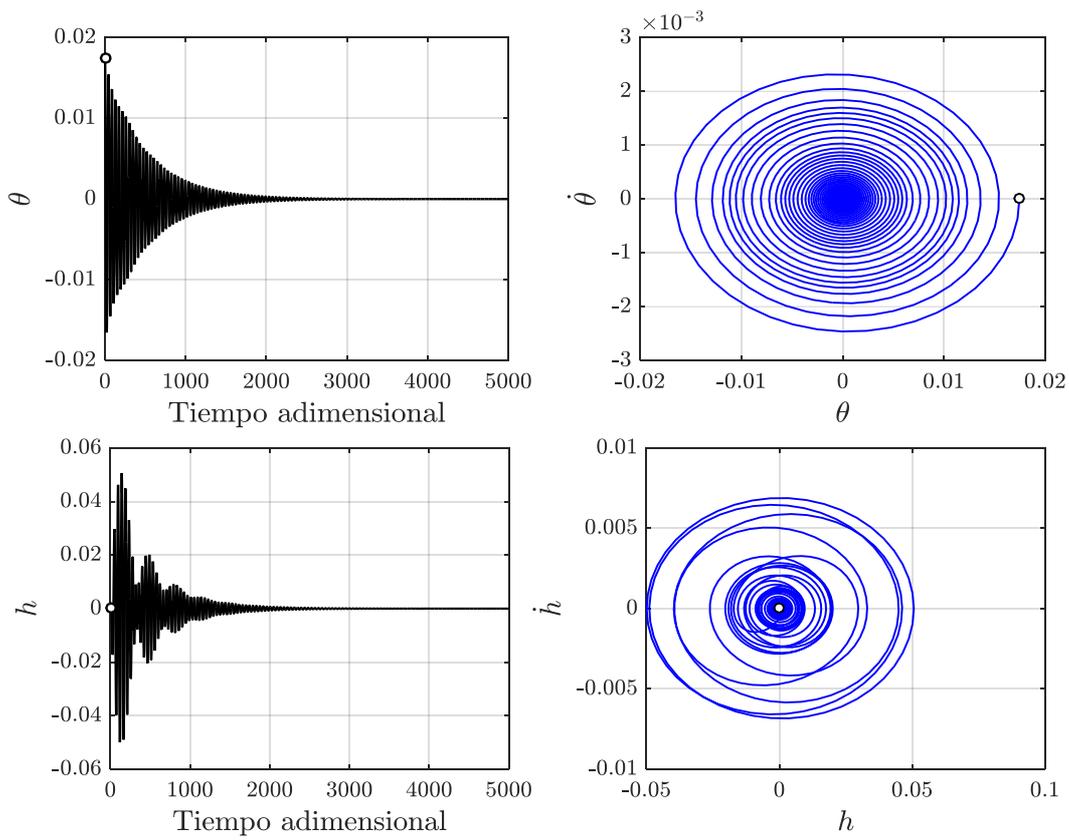


Figura 3: Respuesta del modelo aeroelástico en estado subcrítico.

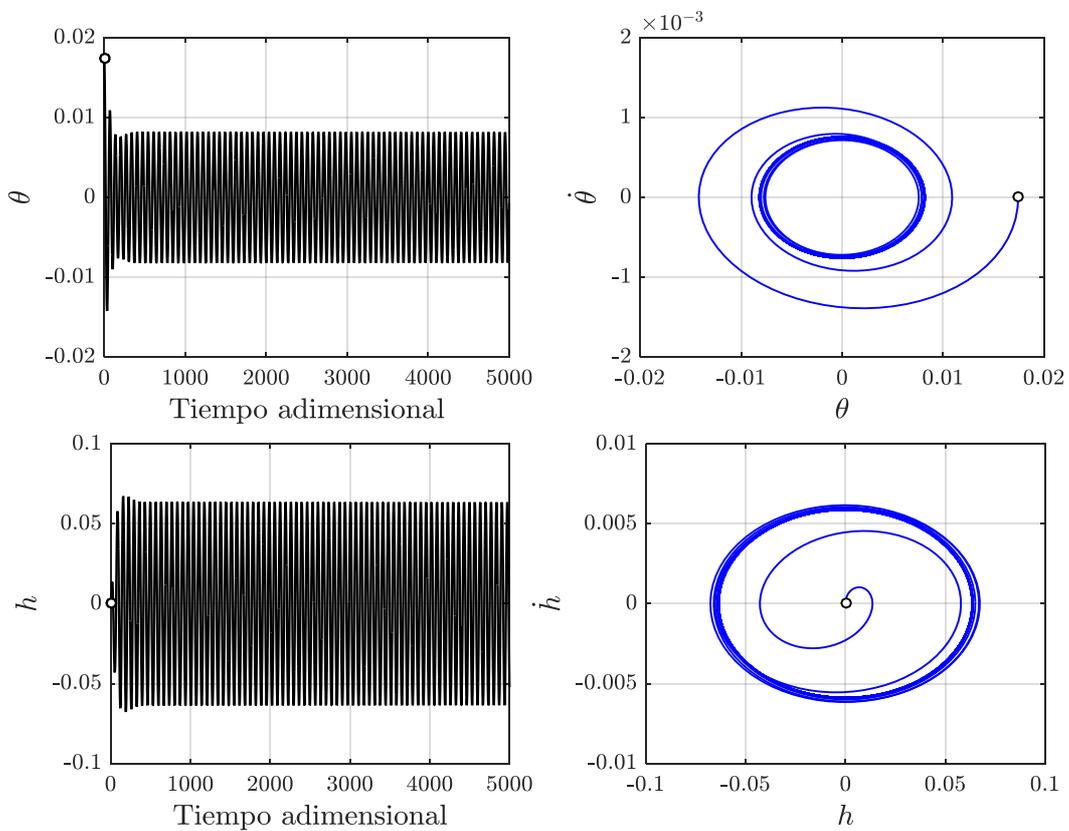


Figura 4: Respuesta del modelo aeroelástico en estado crítico.

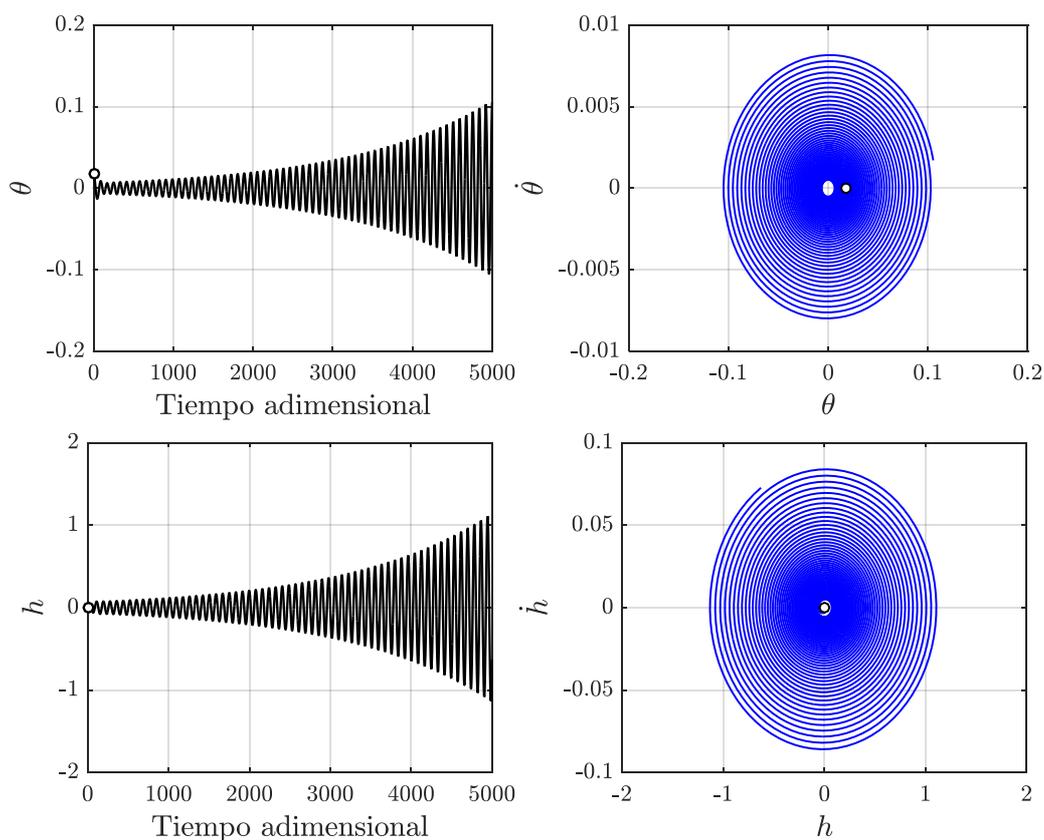


Figura 5: Respuesta del modelo aeroelástico en estado supercrítico.

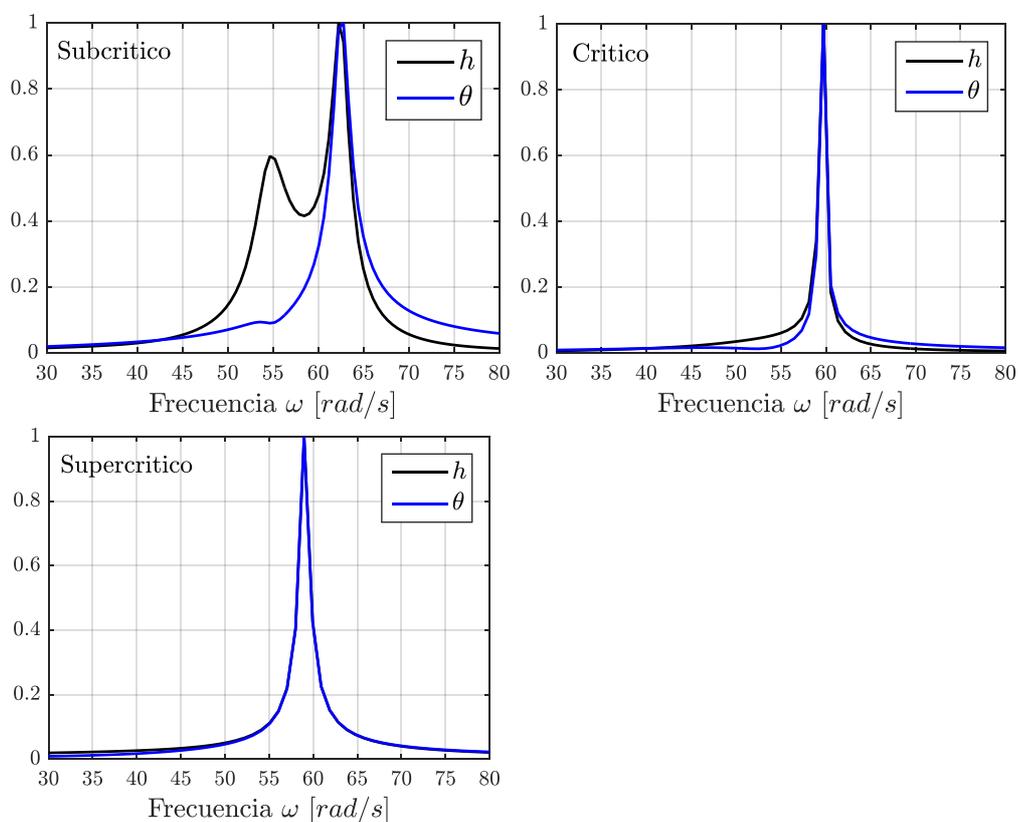


Figura 6: Transformada de Fourier de la respuesta del sistema para los casos subcrítico, crítico y supercrítico.

Los gráficos de la **Figura 6** se obtienen aplicando la transformada rápida de Fourier (FFT) a las coordenadas generalizadas del resultado de la simulación. Esta claro que a velocidades subcríticas los dos grados de libertad dinámicos oscilan a diferentes frecuencias, inclusive en uno de ellos aparecen dos frecuencias. A velocidad de flutter éstas se unifican y los dos grados de libertad oscilan a una frecuencia común denominada frecuencia de flutter, con un valor aproximado de 59.7 rad/s. Para velocidades supercríticas la frecuencia de oscilación también es única, pero de menor magnitud que la de flutter.

5.2 Modelo electro-aeroelástico: desempeño del cosechador de energía

Para investigar el comportamiento del cosechador de energía se implementó como metodología práctica seleccionar a la resistencia eléctrica como variable paramétrica y determinar, para cada valor de ella, la velocidad de flutter del modelo. Concretamente se pretende encontrar para cada resistor un ciclo límite con el objetivo de efectuar simulaciones durante períodos de tiempo prolongados, lo que permitirá evaluar el desempeño del cosechador en estado de régimen. La búsqueda de la velocidad de flutter se realiza de manera iterativa, partiendo de la velocidad crítica del modelo aeroelástico presentada en la sección anterior. De la simulación se obtiene la evolución temporal de las coordenadas generalizadas que describen el movimiento de la estructura junto a la corriente, el voltaje, y la potencia disipada en el resistor. Se consideran valores de resistencia situados entre 0.125 y 45 k Ω .

En general, todas las simulaciones muestran que la presencia de la carga resistiva permite extraer energía del fluido. Esto se evidencia en un aumento de la velocidad de flutter del sistema respecto de la del modelo aeroelástico. La velocidad crítica del cosechador no resulta única, sino dependiente de la resistencia.

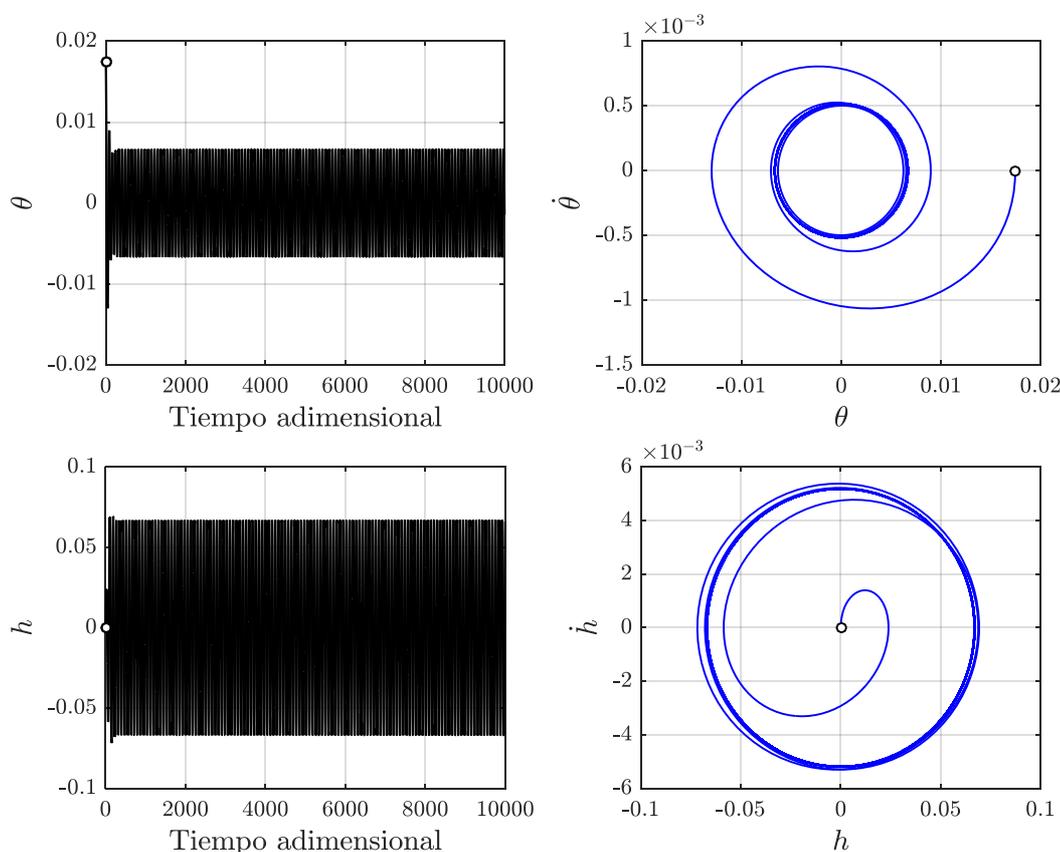


Figura 7: Respuesta del cosechador para una carga resistiva de 10 k Ω .

Como caso de aplicación, se presenta la respuesta del modelo para una resistencia eléctrica de $10\text{ k}\Omega$. En la [Figura 7](#), se muestra el progreso en el tiempo y los diagramas de fase de las coordenadas generalizadas que describen el movimiento del ala, mientras que en la [Figura 8](#) se grafica el voltaje y la potencia disipada en el resistor también en función del tiempo. Puede notarse que las coordenadas se encuentran describiendo ciclos límites, lo que ocurre para una velocidad del aire igual a 19.75 m/s . En estado de régimen la potencia máxima disipada es de 20 mW y el voltaje máximo es del orden de los 14 V . Si la velocidad del fluido desciende por debajo de la crítica la estructura regresa su posición inicial de equilibrio, sin embargo, para velocidades superiores a la de flutter la inestabilidad caracteriza al sistema.

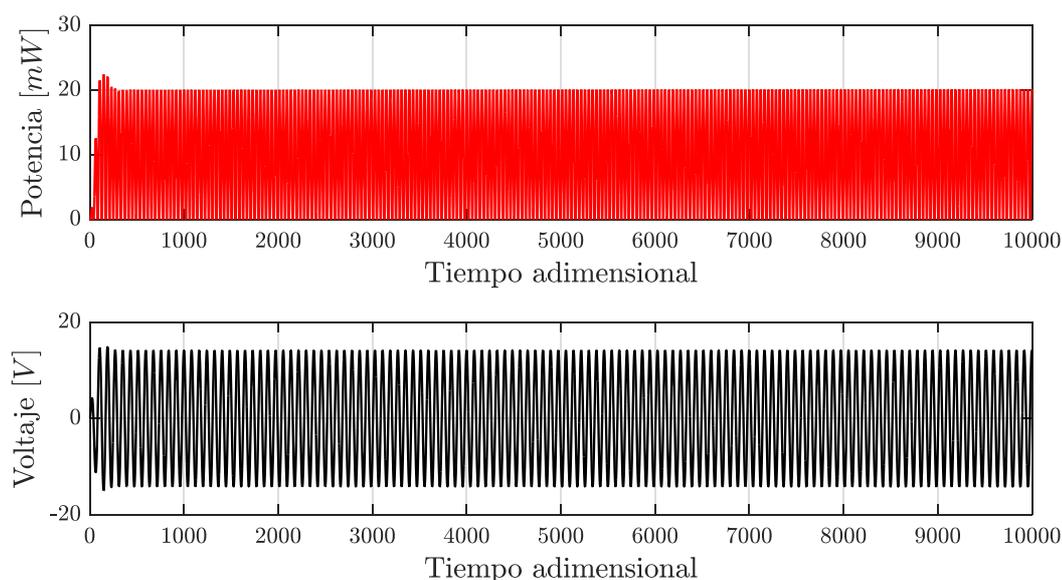


Figura 8: Potencia disipada y voltaje para una carga resistiva de $10\text{ k}\Omega$.

Un comportamiento particular se presenta para valores de resistencia comprendidos entre 2 y $5\text{ k}\Omega$. En tal circunstancia, el cosechador responde del siguiente modo: por debajo de cierta velocidad (dependiente de cada resistor) el sistema oscila con amplitudes decrecientes hasta regresar a su posición de equilibrio inicial; por encima de dicha velocidad el sistema también presenta oscilaciones decrecientes, pero se estabiliza en nuevas posiciones de equilibrio, que varían con la velocidad del fluido. Este comportamiento se caracteriza por la inexistencia de un ciclo límite alrededor del punto de equilibrio inicial. Además, tiene lugar para el intervalo de resistencias donde tienden a ubicarse los valores máximos de potencia disipada. Si bien no es posible estimar la potencia en estado de régimen, ésta alcanza valores importantes en los transitorios observados. Con el objetivo de ejemplificar lo comentado, se presenta la respuesta del cosechador para una carga disipativa de $5\text{ k}\Omega$.

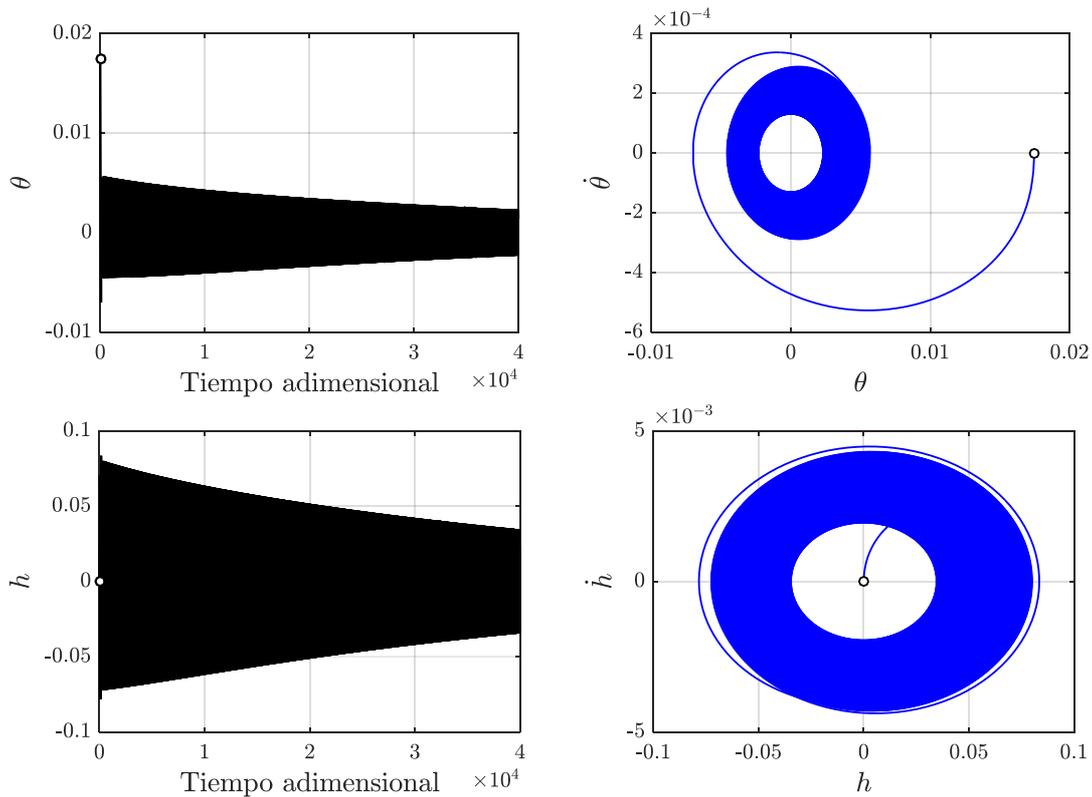


Figura 9: Respuesta del cosechador para una carga resistiva de 5 k Ω y una V_∞ de 26.6 m/s.

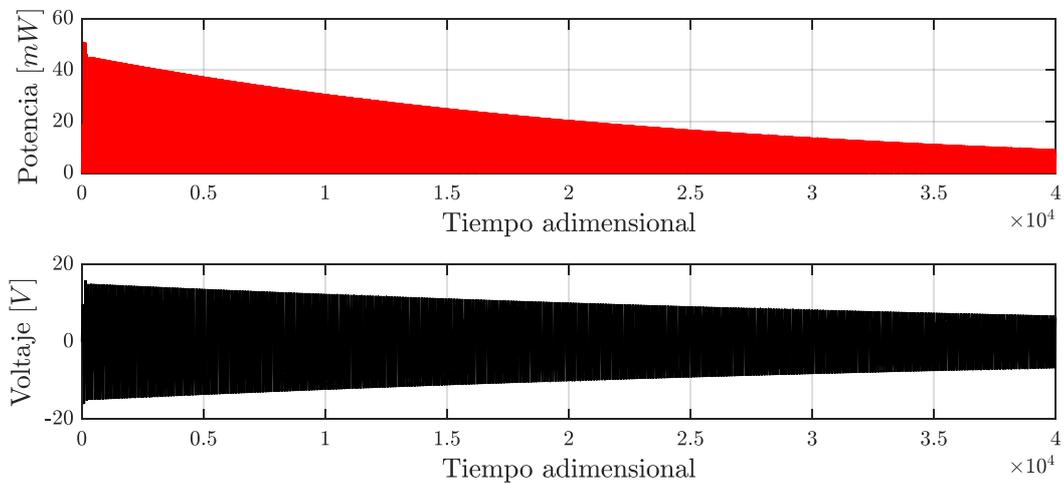


Figura 10: Potencia disipada y voltaje para una carga resistiva de 5 k Ω y una V_∞ de 26.6 m/s.

En la Figura 9 se grafica $h(t)$ y $\theta(t)$ en función del tiempo junto los diagramas de fase, mientras que en la Figura 10 se presenta el voltaje y la potencia disipada. Ambas figuras se corresponden a una velocidad del fluido igual a 26.6 m/s. En la Figura 11 y Figura 12 se exhiben los mismos gráficos que en la Figura 9 y Figura 10 pero para una velocidad del fluido de 26.75 m/s.

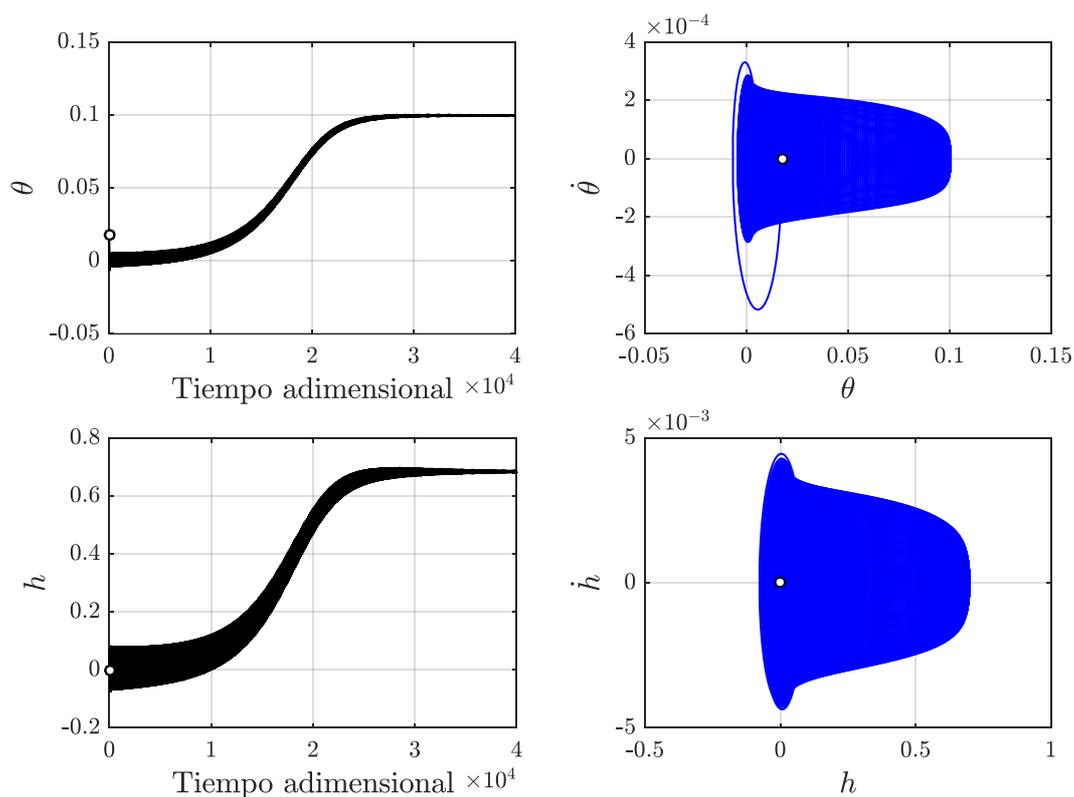


Figura 11: Respuesta del cosechador para una carga resistiva de $5 \text{ k}\Omega$ y una V_∞ de 26.7 m/s .

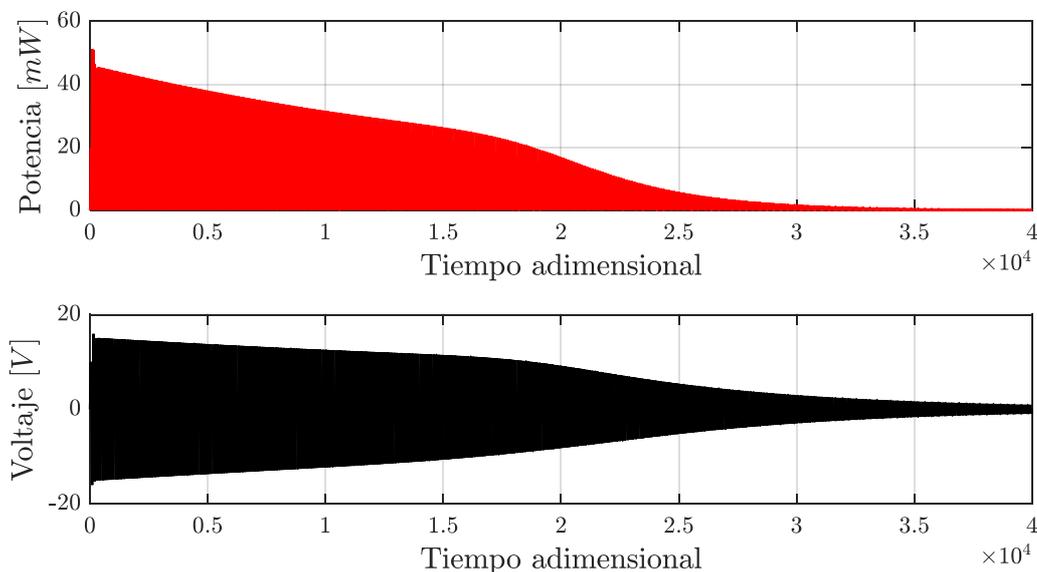


Figura 12: Potencia disipada y voltaje para una carga resistiva de $5 \text{ k}\Omega$ y una V_∞ de 26.7 m/s .

Para tener una perspectiva global del rendimiento del cosechador, se grafica en la [Figura 13](#) la potencia disipada en función de la carga resistiva. Como los puntos del gráfico se obtienen de las simulaciones en estado de régimen, existe una discontinuidad en la curva para el intervalo comprendido entre 2 y $5 \text{ k}\Omega$. Se observa que, para valores bajos de resistencia, pequeñas variaciones en ella producen cambios importantes en la potencia disipada.

Otra curva de interés para evaluar el desempeño del cosechador se exhibe en la [Figura 14](#). Esta presenta la velocidad de flutter del sistema en función de la resistencia eléctrica. La línea de trazos, que corresponde a valores de resistencia situados entre 2 y 5 k Ω , indica que estas velocidades no se asocian a ciclos límites, sino la velocidad del fluido a partir de la cual el sistema deja de estabilizarse en la posición de equilibrio inicial. Se observa que a medida que la resistencia tienda a infinito la velocidad crítica se aproxima a la del sistema sin cosechador, representada por la línea horizontal de color rojo. A partir de este gráfico puede concluirse que la presencia de una carga resistiva permite extraer energía cinética del fluido y convertirla en energía eléctrica, con el consecuente incremento de la velocidad de flutter. Existe por lo tanto una correspondencia entre la curva de la [Figura 13](#) y la de la [Figura 14](#), cuanto mayor potencia se disipe mayor es la velocidad crítica.

6 CONCLUSIONES

En este trabajo se estudió la respuesta de un modelo simplificado de un ala multifuncional como sistema cosechador de energía. El ala se representó mediante una viga en voladizo cubierta por material piezoeléctrico y se vinculó en su extremo libre un perfil aerodinámico simétrico. Se implementó el método de la red de vórtices no-lineal e inestacionario para predecir las cargas aerodinámicas y se consideró un comportamiento lineal del material piezoeléctrico. Las ecuaciones diferenciales que gobiernan al sistema electro-aeroelástico se obtuvieron a partir de las ecuaciones de Lagrange y fueron integradas en el dominio del tiempo utilizando un método predictor-corrector.

El desempeño del cosechador se evaluó adoptando a la resistencia eléctrica como variable paramétrica. Se efectuaron simulaciones para un conjunto de valores de la carga resistiva, obteniendo la corriente, el voltaje y la potencia disipada. Se analizó la influencia del elemento disipativo sobre la velocidad de flutter y se la comparó con la del modelo aeroelástico (sin cosechador). Como conclusión de las simulaciones realizadas se puede decir que independientemente del valor que adopte la carga resistiva, su presencia permite extraer energía del fluido y elevar la velocidad crítica del sistema.

A pesar de la simplicidad del modelo, este trabajo constituye un punto de partida para encarar futuras investigaciones relacionadas a esta temática.

REFERENCIAS

- Abdelkefi, A., *Aeroelastic energy harvesting: a review*, International Journal of Engineering Science, 100: 112-135, 2016.
- Chopra, I. y Sirohi, J., *Smart Structures Theory*, Cambridge University Press, 2013.
- Fung, Y.C., *An Introduction to The Theory of Aeroelasticity*, Dover Publications Inc, 1993.
- Librescu, L. y Marzocca, P., *Advances in the linear/nonlinear control of aeroelastic structural systems*, Acta Mechanica, 178: 147-186, 2005.
- Preidikman S., *Numerical Simulations of Interactions Among Aerodynamics, Structural Dynamics, and Control Systems*, Ph.D. Dissertation, Department of Engineering Science and Mechanics, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, VA, 1998.