

EXPERIMENTOS NUMÉRICOS EN RIGIDIZACIÓN DINÁMICA DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES, MEDIANTE EL MÉTODO DE CUADRATURA DIFERENCIAL GENERALIZADA

Felix D. H.^a, Rossit C. A.^{a,b}, Maiz S.^{a,b} y Laura P. A. A.^a

^a*Departamento de Ingeniería, Instituto de Mecánica Aplicada, Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina, dhfelix@criba.edu.ar, <http://www.uns.edu.ar>*

^b*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Argentina, carossit@criba.edu.ar, smaiz@uns.edu.ar, <http://www.uns.edu.ar>*

Palabras Clave: Cuadratura Diferencial , rigidización dinámica, frecuencias naturales, viga escalonada.

Resumen. Desde un punto de vista matemático, la rigidización dinámica de elementos estructurales constituye un capítulo de la teoría de optimización estructural por medio de la cual se reduce el peso del elemento pero al mismo tiempo incrementa su rigidez global, que se traduce desde la perspectiva dinámica, en el crecimiento de sus frecuencias más bajas.

Un excelente ejemplo en este campo es la investigación analítica y experimental realizada por el profesor A. A. Renshaw (Columbia University, 2000), quien ha desarrollado un ingenioso y moderno diseño para discos de computadora y ha elevado sus frecuencias naturales disminuyendo la deformación del disco mientras rota a elevada velocidad. (Esencialmente el trabajo propuesto consiste en introducir canales radiales internos).

La presente investigación es considerablemente más modesta en su alcance. Con ello muestra que introduciendo reducción en el espesor de una viga Bernoulli-Euler, de una manera discontinua, es posible elevar al menos la frecuencia fundamental de vibración en el plano.

Los autovalores son determinados utilizando el método GDQM (sigla en inglés de método de Cuadratura Diferencial Generalizado). En algunos casos también se utilizó la solución exacta y autovalores disponibles en la literatura abierta, que permitieron comparar resultados y determinar el grado de precisión de la metodología propuesta.

1 INTRODUCCIÓN

El método de cuadratura diferencial fue propuesto por primera vez por R. Bellman y J. Casti, ([Bellman and Casti 1971](#)), en una contribución memorable. Sin embargo éste permaneció escasamente utilizado en aplicaciones prácticas por varios años.

El mérito de la extensión y divulgación del método, probablemente corresponde principalmente al Profesor Bert, ([Bert and Malik, 1996](#)) y su importante grupo de colaboradores quienes utilizaron el método de cuadratura diferencial en una gran variedad de aplicaciones, principalmente en problemas estáticos y dinámicos relacionados con el comportamiento a flexión de vigas y placas, torsión, situaciones de estabilidad dinámica, etc. ([Bert et al, 1994](#)).

Luego otros autores utilizaron extensivamente los trabajos de Bert, y muchas contribuciones importantes fueron hechas, en el sentido de que los cálculos se tornaron más precisos y eficientes debido a modificaciones apropiadas de los algoritmos ([Gutierrez et al, 1994](#); [Shu and Chen, 1999](#); [Liu and Wu, 2001](#)).

En el presente estudio se han realizado varios experimentos numéricos considerando el elemento estructural mostrado en la figura 1 y 2: una viga empotrada-libre de sección transversal variable en forma discontinua ([Rossi et al, 1991](#)). El procedimiento es primero utilizado en el caso de una viga de dos tramos, luego en una de tres y finalmente es generalizado para n-tramos.

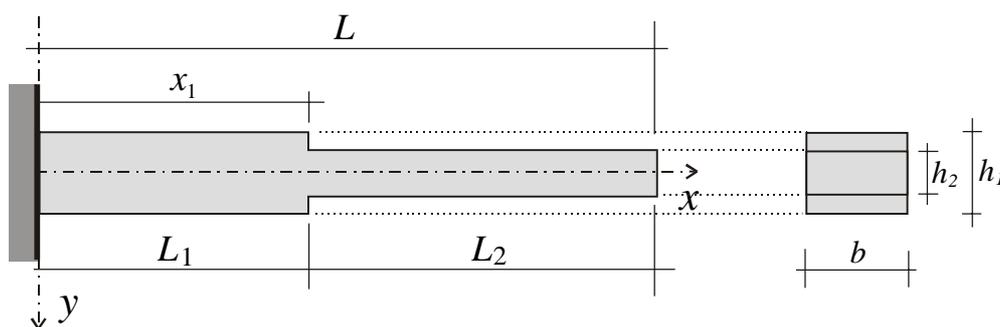


Figura 1: Viga cantilever de 2 escalones: Modelo continuo de la solución exacta

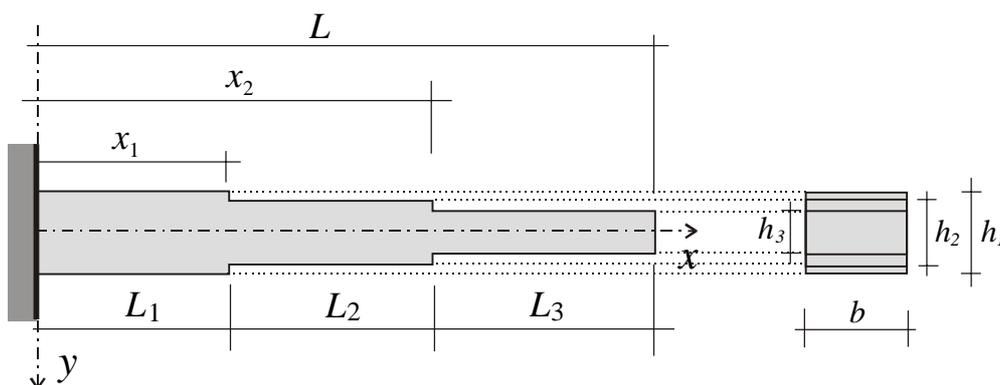


Figura 2: Viga cantilever de 3 escalones: Modelo continuo de la solución exacta

Se obtiene además una solución exacta. Se calculan las primeras cinco frecuencias de vibración y se observa excelente concordancia entre los resultados obtenidos con cuadratura diferencial y los obtenidos con la solución exacta.

Además se realizaron estudios de convergencia del método GDQM, variando el número de

puntos de prueba y se concluyó en que el grado de convergencia es muy satisfactorio para el problema en estudio.

Al considerar las implicaciones prácticas del modelo planteado uno debe recordar que el proceso de elevar las frecuencias naturales mediante una adecuada remoción de masa de la estructura original es usualmente definido como “rigidización dinámica”. (Tseng et al, 1997), el cual es esencialmente un capítulo especial de la teoría de optimización.

Ciertamente el procedimiento seguido en este estudio es de naturaleza experimental ya que ninguna teoría matemática es seguida. El lector apreciará estas características en los ejemplos presentados.

Un estudio destacado de esta naturaleza fue realizado por el profesor A. A. Renshaw de la Universidad de Columbia quien logró la elevación de las frecuencias más bajas de controladores de discos de computadora distribuyendo en forma axil-simétrica un conjunto de pequeños canales internos en torno al plano medio del disco (Laura et al, 2001), que disminuyen la densidad media del controlador.

En vista de la elevación de las frecuencias naturales, la deformación transversal del disco es reducida considerablemente. Se comparan resultados numéricos y experimentales y se concluye que la concordancia es muy buena.

2 ECUACIÓN GOBERNANTE

Aunque la solución analítica para el modelo presentado en las Figuras 1 y 2 se conoce ampliamente, es presentada aquí con el fin de lograr una exposición auto-contenida para conveniencia de los lectores. Recordando entonces que la ecuación gobernante de una viga Bernoulli-Euler que efectúa vibraciones libres se expresa en la forma:

$$\frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} \left[EI \frac{\partial^2 w}{\partial \bar{x}^2} \right] + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

donde EI representa la rigidez a flexión de la viga y ρA es la masa por unidad de longitud. En el caso de modos normales de vibración uno tiene:

$$w(\bar{x}, t) = W(\bar{x}) e^{i\omega t} \quad (2)$$

En la expresión precedente $W(\bar{x})$ es la amplitud de desplazamiento y ω la frecuencia natural de vibración transversal de la viga. Sustituyendo la ecuación (2) en la ecuación (1) se obtiene:

$$\frac{d^2}{d\bar{x}^2} \left[EI(\bar{x}) \frac{d^2 W}{d\bar{x}^2} \right] - \rho A(\bar{x}) \omega^2 W = 0 \quad (3)$$

donde $I(\bar{x})$ y $A(\bar{x})$ no son constantes ya que se trata de una viga escalonada. Normalizando la ecuación (3) por medio de la coordenada adimensional $x = \bar{x}/L$ se llega a:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EI(x) \frac{d^2 W}{dx^2} \right] - \rho A(x) \omega^2 L^4 W = 0 \quad (4)$$

donde L es la longitud total de la viga. Obviamente, para una viga de 2 escalones el dominio de aplicación de la ecuación (4) puede dividirse en dos ya que no se presentan cambios en la geometría y propiedades mecánicas en cada escalón de la viga. De este modo la ecuación (4) es expresada en forma segmentada:

$$E_1 I_1 \frac{d^4 W_1}{dx^4} - \rho_1 A_1 \omega^2 L^4 W_1 = 0 \quad \text{para } 0 \leq x \leq L_1/L \quad \text{para el escalón 1} \quad (5.1)$$

$$E_2 I_2 \frac{d^4 W_2}{dx^4} - \rho_2 A_2 \omega^2 L^4 W_2 = 0 \quad \text{para } L_1/L \leq x \leq L \quad \text{para el escalón 2} \quad (5.2)$$

Una forma de expresión más compacta resulta:

$$\frac{d^4 W_1}{dx^4} - \Omega^2 W_1 = 0 \quad \text{para } 0 \leq x \leq L_1/L \quad \text{para el escalón 1} \quad (6.1)$$

$$\chi_2 \frac{d^4 W_2}{dx^4} - \Omega^2 W_2 = 0 \quad \text{para } L_1/L \leq x \leq L \quad \text{para el escalón 2} \quad (6.2)$$

donde $\Omega = \sqrt{\rho A_1 / E I_1} L^2 \omega$ es la expresión de los coeficientes de frecuencia adimensionales y cuando los escalones de la viga son del mismo material ($E_1 = E_2 = E$ y $\rho_1 = \rho_2 = \rho$) se tiene $\chi_2 = (A_2 / I_2) / (A_1 / I_1)$. Las correspondientes condiciones de borde para una viga cantilever pueden ser expresadas como sigue:

$$W_1(x) \Big|_{x=0} = 0 \quad (7.1)$$

$$\frac{dW_1(x)}{dx} \Big|_{x=0} = 0 \quad (7.2)$$

$$\frac{d^2 W_2(x)}{dx^2} \Big|_{x=L_1} = 0 \quad (7.3)$$

$$\frac{d^3 W_2(x)}{dx^3} \Big|_{x=L_1} = 0 \quad (7.4)$$

El sistema gobernante se completa con la consideración de las ecuaciones de continuidad entre escalones, que son establecidas del siguiente modo:

$$W_1(x) \Big|_{x=x_1} = W_2(x) \Big|_{x=x_1} \quad (8.1)$$

$$\frac{dW_1(x)}{dx} \Big|_{x=x_1} = \frac{dW_2(x)}{dx} \Big|_{x=x_1} \quad (8.2)$$

$$I_1 \frac{d^2 W_1(x)}{dx^2} \Big|_{x=x_1} = I_2 \frac{d^2 W_2(x)}{dx^2} \Big|_{x=x_1} \quad (8.3)$$

$$I_1 \frac{d^3 W_1(x)}{dx^3} \Big|_{x=x_1} = I_2 \frac{d^3 W_2(x)}{dx^3} \Big|_{x=x_1} \quad (8.4)$$

Como es sabido los coeficientes de frecuencia Ω_i y las funciones W_i para una viga cantilever de dos escalones son obtenidas al resolver la ecuación diferencial ordinaria (6.1)-

(6.2), con las condiciones de borde dadas en las ecuaciones (7.1)-(7.4) y las ecuaciones de continuidad (8.1)-(8.4).

En este estudio dos enfoques diferentes son desarrollados para obtener los valores de frecuencia: Una solución discreta utilizando GDQM y la solución analítica exacta, ambas por descomposición de dominio.

3 MÉTODO DE CUADRATURA DIFERENCIAL GENERALIZADO

En primer lugar el GDQM, reconocido como un método preciso (Vera et al, 2005; Zong, 2005), es utilizado con descomposición de dominio en una viga cantilever de 2 escalones (La figura 3 muestra los subdominios discretos sobre la viga), con una distribución irregular de puntos:

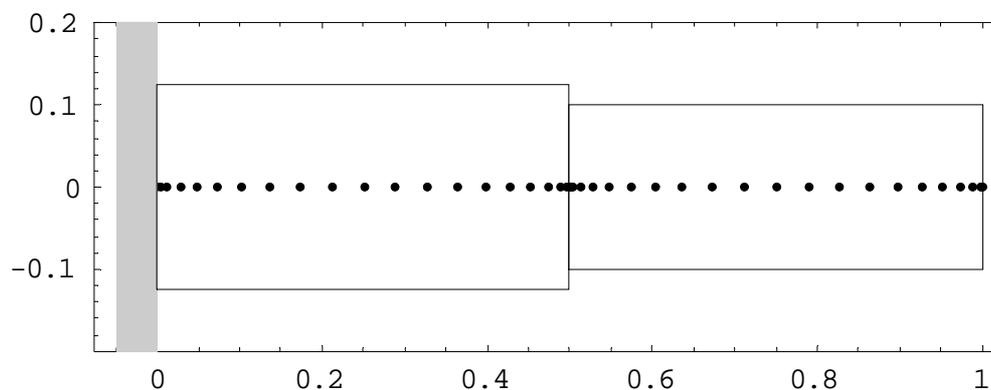


Figura 3: Viga cantilever de 2 tramos: Modelo discreto, utilizado con el método de cuadratura diferencial

3.1 Coeficientes de peso y ecuaciones análogas de cuadratura

El modelo presente fue estudiado mediante el uso de una distribución irregular de puntos de prueba del tipo Chebyshev–Gauss–Lobato (Shu and Chen, 1999), como es mostrado en la Figura 3. La expresión que genera la malla resulta entonces:

$$x_{i,1} = \frac{1 - \cos\left[\frac{(i-1)\pi}{(n_1-1)}\right]}{2} \frac{L_1}{L} \quad \text{con } i=1,2,\dots,n_1 \quad \text{para el escalón 1} \quad (9.1)$$

$$x_{i,2} = \frac{1 - \cos\left[\frac{(i-1)\pi}{(n_2-1)}\right]}{2} \frac{L_2}{L} \quad \text{con } i=1,2,\dots,n_2 \quad \text{para el escalón 2} \quad (9.2)$$

donde n_1 y n_2 constituyen el número total de puntos de prueba sobre cada malla o grilla. Es digno de notar que tanto las expresiones precedentes como las próximas son generalizadas para tomar en cuenta diferentes subdominios sobre la viga.

Mediante la aplicación de las reglas de cuadratura a las ecuaciones (6.1)-(6.2) se obtienen las siguientes ecuaciones análogas de cuadratura:

$$\sum_{k=1}^{n_1} A_{ik1}^{(4)} W_{k1} = \Omega^2 W_{i1} \quad \text{con } i=3,4,\dots,n_1-2 \quad \text{para el escalón 1} \quad (10.1)$$

$$\chi_2 \sum_{k=1}^{n_2} A_{ik2}^{(4)} W_{k2} = \Omega^2 W_{i2} \quad \text{con } i=3,4,\dots,n_2-2 \quad \text{para el escalón 2} \quad (10.2)$$

donde $A_{ik1}^{(4)}$ y $A_{ik2}^{(4)}$ son los coeficientes de peso en los puntos $x = x_{i1}$ y $x = x_{i2}$ respectivamente. El superíndice (4) , representa las derivadas de 4th-orden. Adicionalmente puede ser notado que los puntos $1, 2, n_1 - 1, n_1$ sobre el dominio 1 y los puntos $1, 2, n_2 - 1, n_2$ sobre el dominio 2, no son utilizados para escribir las ecuaciones análogas de cuadratura (10.1) y (10.2) de la ecuaciones diferenciales gobernantes ya que ellas deben ser reservadas para las ecuaciones análogas de las condiciones de borde y de las ecuaciones de continuidad.

Los coeficientes de peso $A_{ik1}^{(1)}$ y $A_{ik2}^{(1)}$ fueron obtenidos mediante el uso de expresiones explícitas muy útiles, dadas por C. Shu y B. Richards, ([Shu and Richards](#)), y difundidas por C. Bert y sus colaboradores, ([Bert and Malik, 1996](#))*, que se presentan en este trabajo con un subíndice adicional, que contempla la posibilidad de utilizar diferente cantidad de puntos en cada subdominio o escalón de la viga.

Los coeficientes de peso correspondientes a las derivadas de 4^{to} orden pueden ser obtenidos a partir de los coeficientes de peso que corresponden a derivadas de orden más bajo, por medio de una formulación recursiva como sigue:

Los elementos que se ubican fuera de la diagonal ($k \neq i$), correspondientes a las derivadas de primer orden están dados por:

$$A_{ik1}^{(1)} = \frac{\Pi(x_{i1})}{(x_{i1} - x_{k1}) \Pi(x_{k1})} \quad \text{con } i, k = 1, 2, \dots, n_1 \text{ y } k \neq i \quad \text{para el escalón 1} \quad (11.1)$$

$$A_{ik2}^{(1)} = \frac{\Pi(x_{i2})}{(x_{i2} - x_{k2}) \Pi(x_{k2})} \quad \text{con } i, k = 1, 2, \dots, n_2 \text{ y } k \neq i \quad \text{para el escalón 2} \quad (11.2)$$

donde:

$$\Pi(x_{i1}) = \prod_{v=1, v \neq i}^{n_1} (x_{i1} - x_{v1}) \quad ; \quad \Pi(x_{k1}) = \prod_{v=1, v \neq k}^{n_1} (x_{k1} - x_{v1}) \quad \text{para el escalón 1} \quad (12.1)$$

$$\Pi(x_{i2}) = \prod_{v=1, v \neq i}^{n_2} (x_{i2} - x_{v2}) \quad ; \quad \Pi(x_{k2}) = \prod_{v=1, v \neq k}^{n_2} (x_{k2} - x_{v2}) \quad \text{para el escalón 2} \quad (12.2)$$

debería ser notado que si $k = i$, los coeficientes de peso $A_{ik1}^{(1)}$ y $A_{ik2}^{(1)}$ se hacen infinitos.

Los términos correspondientes a derivadas de segundo orden y superiores ($r > 1$) son dados por la siguiente relación de recurrencia, ([Bert and Malik, 1996](#)):

$$A_{ik1}^{(r)} = r \left[A_{ii1}^{(r-1)} A_{ik1}^{(1)} - \frac{A_{ik1}^{(r-1)}}{x_{i1} - x_{k1}} \right] \quad \text{con } i, k = 1, 2, \dots, n_1 \text{ y } k \neq i \quad \text{para el escalón 1} \quad (13.1)$$

$$A_{ik2}^{(r)} = r \left[A_{ii2}^{(r-1)} A_{ik2}^{(1)} - \frac{A_{ik2}^{(r-1)}}{x_{i2} - x_{k2}} \right] \quad \text{con } i, k = 1, 2, \dots, n_2 \text{ y } k \neq i \quad \text{para el escalón 2} \quad (13.2)$$

Debido a que la suma total de los coeficientes de peso en cualquier fila de la matriz de coeficientes es igual a cero, los términos de la diagonal correspondientes a derivadas de cualquier orden son dados por:

* En la citada referencia se puede hallar una extensa lista bibliográfica.

$$A_{ii1}^{(r)} = - \sum_{k=1, k \neq i}^{n_1} A_{ik1}^{(r)} \quad \text{para el escalón 1} \quad (14.1)$$

$$A_{ii2}^{(r)} = - \sum_{k=1, k \neq i}^{n_2} A_{ik2}^{(r)} \quad \text{para el escalón 2} \quad (14.2)$$

Para el primer escalón o tramo de la viga, las ecuaciones análogas de cuadratura de las condiciones de borde, ecuaciones (7.1)-(7.2) pueden ser escritas como sigue:

$$W_{i1} = 0 \quad \text{con } i = 1 \quad (15.1)$$

$$\sum_{k=1}^{n_1} A_{ik1}^{(1)} W_{k1} = 0 \quad \text{con } i = 1 \quad (15.2)$$

y para el segundo escalón, las ecuaciones (7.3)-(7.4):

$$\sum_{k=1}^{n_2} A_{ik2}^{(2)} W_{k2} = 0 \quad \text{con } i = n_2 \quad (16.1)$$

$$\sum_{k=1}^{n_2} A_{ik2}^{(3)} W_{k2} = 0 \quad \text{con } i = n_2 \quad (16.2)$$

Las ecuaciones de continuidad análogas de cuadratura (8.1)-(8.4) pueden ser expresadas en la forma:

$$W_{i1} \Big|_{i=n_1} = W_{i2} \Big|_{i=1} \quad (17.1)$$

$$\sum_{k=1}^{n_1} A_{ik1}^{(1)} W_{k1} \Big|_{i=n_1} = \sum_{k=1}^{n_2} A_{ik2}^{(1)} W_{k2} \Big|_{i=1} \quad (17.2)$$

$$\sum_{k=1}^{n_1} A_{ik1}^{(2)} W_{k1} \Big|_{i=n_1} = \alpha_2 \sum_{k=1}^{n_2} A_{ik2}^{(2)} W_{k2} \Big|_{i=1} \quad (17.3)$$

$$\sum_{k=1}^{n_1} A_{ik1}^{(3)} W_{k1} \Big|_{i=n_1} = \alpha_2 \sum_{k=1}^{n_2} A_{ik2}^{(3)} W_{k2} \Big|_{i=1} \quad (17.4)$$

donde α_2 es la relación entre momentos de inercia I_2 / I_1

3.2 Sistema lineal análogo de cuadratura

Resumiendo el presente procedimiento hemos obtenido para cada grilla de puntos:

- Las ecuaciones análogas de cuadratura de las ecuaciones diferenciales gobernantes.
- Las ecuaciones análogas de cuadratura de las condiciones de borde.
- Las ecuaciones análogas de cuadratura de las ecuaciones de continuidad.

Ahora necesitamos ensamblar las ecuaciones señaladas precedentemente en un único sistema lineal. Resulta conveniente para este propósito, ([Bert and Malik, 1996](#)), expresar el sistema ensamblado como sigue:

$$\begin{bmatrix} [A_{bb}] & [A_{bd}] \\ [A_{db}] & [A_{dd}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{W_b\} \\ \{W_d\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \Omega^2 \{W_d\} \end{Bmatrix} \quad (18)$$

En la expresión (18), el subíndice “*b*” indica los puntos de grilla utilizados para formular las condiciones de borde y de continuidad análogas de cuadratura, y el subíndice “*d*” indica los puntos de grilla utilizados para formular la ecuación diferencial gobernante análoga de cuadratura. En el caso de dos subdominios la submatriz $[A_{bb}]$ correspondiente a la expresión (18) puede ser estructurada en la forma:

$$[A_{bb}] = \begin{bmatrix} [A_{bb}]_{1,1} & [A_{bb}]_{1,2} \\ [A_{bb}]_{2,1} & [A_{bb}]_{2,2} \end{bmatrix} = [[A_{bb}]_{i,j}] \quad \text{con } i, j = 1, 2 \quad (19)$$

Como puede ser observado en la expresión (19) aparecen subíndices que se ubican fuera de los corchetes. Estos indican el número de subdominio en que se encuentran los puntos de grilla utilizados para plantear las ecuaciones análogas de cuadratura (subdominios *i*), y el número de subdominio en que se encuentran los puntos de grilla utilizados con los coeficientes de peso (subdominios *j*).

Las submatrices $[A_{bd}]$, $[A_{db}]$ y $[A_{dd}]$ pueden ser expresadas de modo enteramente similar. Para resolver el problema de autovalores, es necesario eliminar el vector $\{W_b\}$ que aparece en la ecuación (18). Una vez que $\{W_b\}$ es eliminado, se obtiene la ecuación clásica de autovalores.

$$[A] \{W_d\} - \Omega^2 I \{W_d\} = \{0\} \quad (20)$$

donde *I* es la matriz unidad o matriz identidad y la matriz $[A]$ se obtiene a partir de las submatrices $[A_{bb}]$, $[A_{bd}]$, $[A_{db}]$ y $[A_{dd}]$, en la forma:

$$[A] = [A_{db}] \cdot [-A_{bb}]^{-1} \cdot [A_{bd}] \cdot [A_{dd}] \quad (21)$$

Y como es sabido, la condición de no trivialidad de la ecuación (20) requiere que:

$$|A - \Omega^2 I| = 0 \quad (22)$$

Con el determinante ecuación (22), se obtienen los coeficientes de frecuencia Ω_i buscados.

3.3 Generalización para resolver una viga cantilever n-escalonada

La solución discreta fue desarrollada en primer lugar para una viga cantilever de 2 escalones, pero resulta simple extender el algoritmo a una viga de n-escalones, debido a que las expresiones son fácilmente modificables.

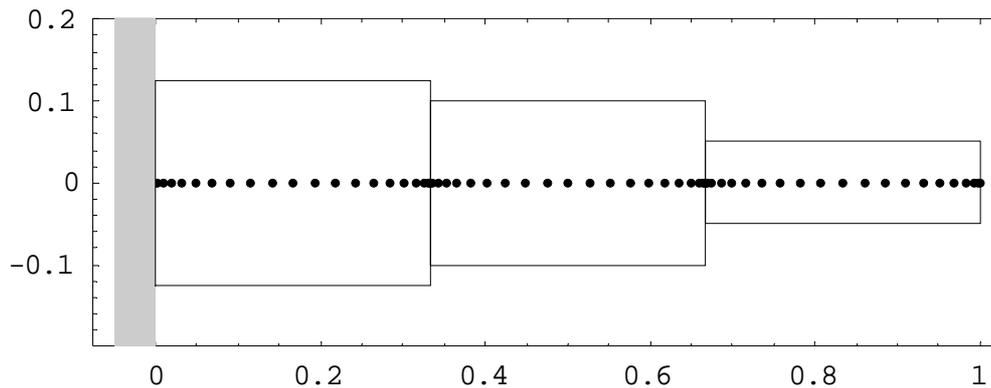


Figura 4: Viga cantilever de 3 tramos: Modelo discreto, utilizado con el método de cuadratura diferencial

Las expresiones (9.1) o (9.2) pueden ser fácilmente generalizadas como se indica a continuación:

$$x_{i,j} = \frac{1 - \cos\left[\frac{(i-1)\pi}{(n_j-1)}\right] L_j}{2} \frac{L_j}{L} \quad \text{con } i=1,2,\dots,n_j \text{ y } j=1,2,\dots,q \quad (23)$$

donde q es el número total de escalones o sub-dominios en el análisis modal.

Del mismo modo las ecuaciones análogas de cuadratura de la ecuación diferencial gobernante (10.1)-(10.2) correspondientes a cada escalón o tramo de la viga, pueden ser generalizadas en la forma:

$$\chi_j \sum_{k=1}^{n_2} A_{ikj}^{(4)} W_{kj} = \Omega^2 W_{ij} \quad \text{con } i=3,4,\dots,n_j-2 \text{ y } j=1,2,\dots,q \quad (24)$$

Los coeficientes que figuran en la ec.(24) son de cuarto orden y se obtienen a partir de los coeficientes de primer orden. Al disponer los elementos de la matriz de coeficientes, los términos fuera de la diagonal ($k \neq i$) correspondientes a las derivadas de primer orden, ecuaciones (11.1)-(11.2) están dados por:

$$A_{ikj}^{(1)} = \frac{\Pi(x_{ij})}{(x_{ij}-x_{kj})\Pi(x_{kj})} \quad \text{con } i,k=1,2,\dots,n_j; k \neq i; \text{ y } j=1,2,\dots,q \quad (25)$$

donde:

$$\Pi(x_{ij}) = \prod_{v=1, v \neq i}^{n_j} (x_{ij} - x_{vj}) \quad ; \quad \Pi(x_{kj}) = \prod_{v=1, v \neq k}^{n_j} (x_{kj} - x_{vj}) \quad \text{con } j=1,2,\dots,q \quad (26)$$

Los términos fuera de la diagonal ($k \neq i$) correspondientes a las derivadas de segundo orden y superior están generalizadas a partir de las ecuaciones (13.1)-(13.2), [\(Bert and Malik, 1996\)](#) y se expresan de la siguiente forma:

$$A_{ikj}^{(r)} = r \left[A_{ii j}^{(r-1)} A_{ikj}^{(1)} - \frac{A_{ikj}^{(r-1)}}{x_{ij} - x_{kj}} \right] \quad \text{con } i,k=1,2,\dots,n_1 \text{ y } k \neq i \text{ y } j=1,2,\dots,q \quad (27)$$

Los términos de la diagonal correspondientes a derivadas de cualquier orden, ecuaciones (14.1)-(14.2) se expresan, al generalizarlos para varios dominios, en la forma:

$$A_{ii}^{(r)} = - \sum_{k=1, k \neq i}^{n_j} A_{ik}^{(r)} \quad \text{con } j=1,2,\dots,q \tag{28}$$

Obviamente las ecuaciones análogas de cuadratura de las condiciones de borde, son utilizadas únicamente en los extremos de la viga, con lo cual el índice j toma únicamente los valores de 1 y q . Para el primer escalón ($j = 1$), se utilizan las expresiones (15.1)-(15.2), y para el último escalón se reemplaza el subíndice $j = 1$ por $j=q$ y resulta:

$$\sum_{k=1}^{n_q} A_{ik}^{(2)} W_{kq} = 0 \quad \text{con } i = n_q \tag{29.1}$$

$$\sum_{k=1}^{n_q} A_{ik}^{(3)} W_{kq} = 0 \quad \text{con } i = n_q \tag{29.2}$$

De idéntico modo, las ecuaciones análogas de cuadratura de las ecuaciones de continuidad, ecuaciones (17.1)-(17.2), pueden ser expresadas como sigue:

$$W_{ij} \Big|_{i=n_j} = W_{i,j+1} \Big|_{i=1} \quad \text{con } j=1,2,\dots,q-1 \tag{30.1}$$

$$\sum_{k=1}^{n_j} A_{ik}^{(1)} W_{kj} \Big|_{i=n_j} = \sum_{k=1}^{n_{j+1}} A_{ik}^{(1)} W_{k,j+1} \Big|_{i=1} \quad \text{con } j=1,2,\dots,q-1 \tag{30.2}$$

$$\sum_{k=1}^{n_j} A_{ik}^{(2)} W_{kj} \Big|_{i=n_j} = \alpha_{j+1} \sum_{k=1}^{n_{j+1}} A_{ik}^{(2)} W_{k,j+1} \Big|_{i=1} \quad \text{con } j=1,2,\dots,q-1 \tag{30.3}$$

$$\sum_{k=1}^{n_j} A_{ik}^{(3)} W_{kj} \Big|_{i=n_j} = \alpha_{j+1} \sum_{k=1}^{n_{j+1}} A_{ik}^{(3)} W_{k,j+1} \Big|_{i=1} \quad \text{con } j=1,2,\dots,q-1 \tag{30.4}$$

en donde α_j es la relación entre momentos de inercia I_j / I_1 . La matriz $[A_{bb}]$ es ahora expresada expandiendo los subíndices que se hallan fuera de los corchetes, de 1 a q , y entonces se alcanza:

$$[A_{bb}] = \begin{bmatrix} [A_{bb}]_{1,1} & [A_{bb}]_{1,2} & \dots & [A_{bb}]_{1,q} \\ [A_{bb}]_{2,1} & [A_{bb}]_{2,2} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ [A_{bb}]_{q,1} & [A_{bb}]_{q,2} & \dots & [A_{bb}]_{q,q} \end{bmatrix} \tag{31}$$

que puede representarse utilizando la expresión más compacta:

$$[A_{bb}] = [[A_{bb}]_{i,j}] \quad \text{con } i, j=1,2,\dots,q \tag{32}$$

Las matrices $[A_{bd}]$, $[A_{db}]$ y $[A_{dd}]$ son representadas de manera similar. En el presente estudio el algoritmo generalizado fue utilizado para $n=3$ (ver Figura 4).

4 SOLUCIÓN EXACTA

La Figura 1 muestra una viga cantilever de 2 tramos, empotrada en $\bar{x} = 0$ y libre en $\bar{x} = L$, donde \bar{x} es la coordenada espacial a lo largo de la longitud L de la viga.

La solución general obtenida al resolver las ecuaciones diferenciales, puede ser escrita como una función definida por tramos, la cual es expresada por el uso de coordenadas espaciales adimensionales de la forma $x = \bar{x}/L$.

$$\begin{aligned} W_1(x) &= C_1 \cosh \beta L x + C_2 \sinh \beta L x + C_3 \cos \beta L x + C_4 \sin \beta L x & 0 \leq x \leq x_1 \\ W_2(x) &= C_5 \cosh \alpha_{12} \beta L x + C_6 \sinh \alpha_{12} \beta L x + C_7 \cos \alpha_{12} \beta L x & \\ &+ C_8 \sin \alpha_{12} \beta L x & x_1 \leq x \leq 1 \end{aligned} \quad (33)$$

donde las C_i son constantes a ser determinadas a partir de las condiciones de borde en $x = 0$ y en $x = 1$, y de las ecuaciones de continuidad en $x = x_1$ (ver Figura 1), mientras W_1 y W_2 representan la amplitud de desplazamiento transversal en los escalones o tramos de la viga izquierdo y derecho respectivamente. El parámetro α_{12} es expresado como sigue:

$$\alpha_{12} = \sqrt[4]{\frac{A_2 I_1}{A_1 I_2}} \quad (34)$$

Las condiciones de borde correspondientes a $x = 0$ fueron dadas por las ecuaciones (7.1)-(7.2) y en $x = 1$ por las ecuaciones (7.3)-(7.4), mientras que las ecuaciones de continuidad de la viga en la posición $x = x_1$ fueron dadas por las expresiones (8.1)-(8.4).

Al sustituir las funciones (33) en las condiciones dadas por las ecuaciones (7.1)-(7.4) y en las condiciones de continuidad dadas por las ecuaciones (8.1)-(8.4), se alcanza un sistema lineal de 8×8 ecuaciones que puede ser expresado como sigue:

$$[A] \cdot \{C\} = \{0\} \quad (35.1)$$

Al desarrollar el sistema dado en la ecuación (35.1) resulta:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1,8} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2,8} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{8,1} & a_{8,2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{8,8} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ C_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \quad (35.2)$$

Las C_i son las constantes a ser determinadas y los coeficientes $a_{i,j}$, son obtenidos por medio de las condiciones de borde y de las ecuaciones de continuidad como fue mencionado anteriormente. La condición de no trivialidad es establecida al imponer:

$$\det(\mathbf{A}) = 0 \quad (36)$$

Al resolver el determinante ecuación (36), se obtienen las raíces $\beta_n l$, que son los autovalores del problema. La ecuación (36) es una función complicada de $\beta_n l$, por lo que

una solución numérica, el algoritmo de Newton-Raphson, fue utilizada para hallar dichas raíces. Los coeficientes de frecuencia pueden ser expresados como sigue:

$$\Omega_n = (\beta_n L)^2 \quad (37)$$

4.1 Extensión para obtener la solución exacta en una viga de 3 escalones

La Figura 2 muestra una viga Cantilever de 3 escalones, en este caso la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales (5.1)-(5.2) puede ser escrita como una función por trozos que contiene 3 subdominios de la forma:

$$\begin{aligned} W_1(x) &= C_1 \cosh \beta L x + C_2 \sinh \beta L x + C_3 \cos \beta L x + C_4 \sin \beta L x & 0 \leq x \leq x_1 \\ W_2(x) &= C_5 \cosh \alpha_{12} \beta L x + C_6 \sinh \alpha_{12} \beta L x + C_7 \cos \alpha_{12} \beta L x \\ &\quad + C_8 \sin \alpha_{12} \beta L x & x_1 \leq x \leq x_2 \\ W_3(x) &= C_9 \cosh \alpha_{13} \beta L x + C_{10} \sinh \alpha_{13} \beta L x + C_{11} \cos \alpha_{13} \beta L x \\ &\quad + C_{12} \sin \alpha_{13} \beta L x & x_2 \leq x \leq 1 \end{aligned} \quad (38)$$

Donde las C_i son constantes ha ser determinadas mediante las condiciones de borde en $x=0$ y $x=1$, y con las ecuaciones de continuidad en $x=x_1$ y en $x=x_2$, mientras que W_1 , W_2 y W_3 , son los escalones de la viga: izquierdo, central y derecho respectivamente.

Los parámetros α_{12} y α_{13} son expresados como sigue:

$$\alpha_{12} = \sqrt[4]{\frac{A_2 I_1}{A_1 I_2}} \quad (39.1)$$

$$\alpha_{13} = \sqrt[4]{\frac{A_3 I_1}{A_1 I_3}} \quad (39.2)$$

Las condiciones de borde en $x=0$ son dadas por las ecuaciones. (7.1)-(7.2) y en $x=1$ son dadas como sigue:

$$\left. \frac{d^2 W_3(x)}{dx^2} \right|_{x=1} = 0 \quad (40.1)$$

$$\left. \frac{d^3 W_3(x)}{dx^3} \right|_{x=1} = 0 \quad (40.2)$$

Las ecuaciones de continuidad en $x=x_1$ son dadas por las ecuaciones. (8.1)-(8.4), y debido a que un nuevo conjunto de ecuaciones de continuidad aparece en $x=x_2$, resulta necesario escribirlas como sigue:

$$W_2(x) \Big|_{x=x_2} = W_3(x) \Big|_{x=x_2} \quad (41.1)$$

$$\left. \frac{dW_2(x)}{dx} \right|_{x=x_2} = \left. \frac{dW_3(x)}{dx} \right|_{x=x_2} \quad (41.2)$$

$$E_2 I_2 \frac{d^2 W_2(x)}{dx^3} \Big|_{x=x_2} = E_3 I_3 \frac{d^2 W_3(x)}{dx^3} \Big|_{x=x_2} \quad (41.3)$$

$$E_2 I_2 \frac{d^3 W_2(x)}{dx^2} \Big|_{x=x_2} = E_3 I_3 \frac{d^3 W_3(x)}{dx^2} \Big|_{x=x_2} \quad (41.4)$$

Entonces las matrices del sistema (35.1) resultan:

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1,12} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2,12} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{12,1} & a_{12,2} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{12,12} \end{bmatrix} \quad (42.1)$$

$$\{C\} = \begin{Bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ C_{12} \end{Bmatrix} \quad (42.2)$$

Finalmente mediante el determinante ecuación (36), se obtiene el conjunto de coeficientes de frecuencia bajo investigación.

5 RESULTADOS NUMÉRICOS

5.1 Análisis de convergencia de los autovalores

Experimentos sobre la convergencia de resultados obtenidos por el GDQM han sido realizados para configuraciones estructurales de 2 y 3 escalones. Ver tablas 1 y 2 respectivamente. La tabla 1 trata con los casos $L_1/L=3/4$, $h_2/h_1=0.6$ y $L_1/L=1/2$, $h_2/h_1=0.8$, mientras que la Tabla 2 presenta los autovalores para $L_1/L=1/2$, $L_2/L=1/4$, $h_2/h_1=0.8$, $h_3/h_1=0.6$ y $L_1/L=1/3$, $L_2/L=1/3$, $h_2/h_1=0.6$, $h_3/h_1=0.4$.

Por otra parte, el número de puntos de peso por sub-dominio n_1 y n_2 ha sido variado de 7 a 21, para una viga de 2 tramos, como se muestra en la tabla 1, y n_1 , n_2 y n_3 han sido variados desde 6 a 21, para la viga de 3 escalones, como se muestra en la tabla 2.

Se observa en todos los casos un excelente grado de convergencia y de concordancia con los valores exactos de los coeficientes de frecuencia Ω_1 a Ω_5 .

L_1/L	h_2/h_1	$n_1 = n_2$	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5
3/4	0.6	7	4.11353	22.2120	48.6190	106.374	143.377
		8	4.12718	22.4038	51.2204	100.828	159.060
		9	4.12649	22.3311	53.4441	100.223	-
		11	4.12637	22.3293	52.7373	104.252	176.977
		15	4.12637	22.3294	52.7625	103.754	177.444
		21	4.12638	22.3294	52.7625	103.753	177.443
		solución exacta	4.12637	22.3294	52.7625	103.753	177.443
1/2	0.8	7	3.81412	19.4055	54.2668	94.5363	165.900
		8	3.81683	19.8688	55.0954	99.2319	166.955
		9	3.81636	19.8490	55.6436	108.612	174.109
		11	3.81634	19.8338	55.4866	106.682	180.449
		15	3.81634	19.8339	55.4892	106.742	179.632
		21	3.81634	19.8339	55.4892	106.742	179.630
		solución exacta	3.81634	19.8339	55.4892	106.742	179.630

Tabla 1: Análisis de convergencia de los primeros cinco valores de frecuencia de dos modelos arbitrariamente elegidos. Dichos modelos se encuentran incluidos en la tabla 3 (viga cantilever de 2 escalones).

L_1/L	L_2/L	h_2/h_1	h_3/h_1	$n_1 = n_2 = n_3$	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5
1/2	1/4	0.8	0.6	6	4.21139	19.6732	48.9762	98.3560	152.909
				7	4.19340	19.8624	50.9375	93.4798	153.034
				8	4.19503	20.0383	51.7713	95.8506	165.686
				9	4.19495	20.0214	51.5978	97.6473	170.521
				11	4.19495	20.0192	51.5782	97.2416	167.043
				15	4.19495	20.0192	51.5786	97.2504	167.216
				21	4.19491	20.0192	51.5786	97.2504	167.216
				solución exacta	4.19495	20.0192	51.5786	97.2504	167.216
1/3	1/3	0.6	0.4	6	4.07300	15.1898	34.6133	75.6802	134.063
				7	4.05128	15.2840	34.9340	71.3333	109.624
				8	4.05309	15.4072	35.9018	73.4908	114.545
				9	4.05267	15.3983	35.8870	74.9145	121.944
				11	4.05266	15.3953	35.8370	74.6034	120.470
				15	4.05266	15.3953	35.8375	74.6095	120.515
				21	4.05270	15.3953	35.8375	74.6095	120.515
				solución exacta	4.05266	15.3953	35.8375	74.6095	120.515

Tabla 2: Análisis de convergencia de los primeros cinco valores de frecuencia de dos modelos arbitrariamente elegidos. Dichos modelos se encuentran incluidos en la tabla 4 (viga cantilever de 3 escalones).

Una diferencia importante con otros métodos aproximados tal como Rayleigh-Ritz, radica en que los valores obtenidos no siempre son cota superior. Esto puede ser observado en las tablas 1 y 2. Por ejemplo, en el caso de la tabla 1, los cuatro coeficientes de frecuencia se acercan desde un valor más alto, mientras que los otros coeficientes de frecuencia se acercan desde un valor más bajo. Ciertamente no pueden darse precisiones acerca de la naturaleza del límite de los valores obtenidos.

5.2 Coeficientes de frecuencia y η -plots

En las Tablas 3 y 4 se presentan los valores de los primeros cinco coeficientes de frecuencia natural para una viga cantilever de dos y tres escalones respectivamente, calculados a través de la solución exacta y el GDQM.

El cálculo de valores en este último caso fue realizado con el uso de 21 puntos de prueba por cada grilla o subdominio, destacándose que no fue necesario un considerable esfuerzo computacional. Se evaluaron distintas relaciones de longitudes y sección entre los tramos evidenciándose excelente concordancia en todos los casos.

L_1/L	h_2/h_1	Solució n	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5
-	1.0	exacta	3.51602	22.0345	61.6972	120.902	199.860
		GDQ	3.51602	22.0345	61.6972	120.902	199.860
3/4	0.8	exacta	3.78615	22.3383	58.9212	112.907	188.788
		GDQ	3.78615	22.3383	58.9212	112.907	188.788
	0.7	exacta	3.94585	22.4133	56.3762	108.247	183.389
		GDQ	3.94585	22.4133	56.3762	108.247	183.389
	0.6	exacta	4.12637	22.3294	52.7625	103.753	177.443
		GDQ*	4.12638	22.3294	52.7625	103.753	177.443
	0.5	exacta	4.33187	21.8652	48.1362	99.8894	168.804
		GDQ	4.33187	21.8652	48.1362	99.8894	168.804
1/2	0.8	exacta	3.81634	19.8339	55.4892	106.742	179.630
		GDQ*	3.81634	19.8339	55.4892	106.742	179.630
	0.7	exacta	3.97264	18.3424	52.3312	98.3704	168.218
		GDQ	3.97264	18.3424	52.3312	98.3704	168.217
	0.6	exacta	4.11056	16.6449	48.7426	89.7681	154.039
		GDQ	4.11056	16.6449	48.7426	89.7681	154.039
	0.5	exacta	4.18115	14.8679	44.0955	81.7708	135.776
		GDQ	4.18115	14.8679	44.0955	81.7708	135.776
1/4	0.8	exacta	3.45719	19.4806	52.2061	102.314	170.031
		GDQ	3.45719	19.4806	52.2061	102.314	170.031
	0.7	exacta	3.33084	18.2711	47.2830	91.8071	153.711
		GDQ	3.33084	18.2711	47.2830	91.8071	153.711
	0.6	exacta	3.11153	17.0431	42.4723	80.5852	135.664
		GDQ	3.11153	17.0431	42.4723	80.5852	135.664
	0.5	exacta	2.78463	15.6250	37.9889	68.9802	115.714
		GDQ	2.78463	15.6250	37.9889	68.9802	115.714

Tabla 3: Primeras cinco frecuencias naturales de una viga cantilever de 2 escalones, obtenida por: a) Solución exacta y b) Método de cuadratura con una malla de 21 puntos en cada tramo. * Modelos elegidos en el análisis de convergencia (ver Tabla 1).

Las grillas de puntos son mostradas en las Figuras 3 y 4 para vigas de 2 y 3 escalones respectivamente. En ambos casos puede observarse muy buena concordancia entre los resultados obtenidos por cuadratura y la solución exacta.

L_1/L	L_2/L	h_2/h_1	h_3/h_1	Solució n	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5
-	-	1.0	1.0	exacta	3.51602	22.0345	61.6972	120.902	199.860
				GDQ	3.51602	22.0345	61.6972	120.902	199.860
1/2	1/4	0.8	0.6	exacta	4.19495	20.0192	51.5786	97.2504	167.216
				GDQ*	4.19491	20.0192	51.5786	97.2504	167.216
			0.4	exacta	4.69848	19.0622	43.2336	88.2932	147.799
				GDQ	4.69859	19.0621	43.2336	88.2932	147.799
		0.6	0.4	exacta	4.69226	16.4986	42.3061	80.2159	136.254
				GDQ	4.69218	16.4987	42.3061	80.2159	136.254
			0.2	exacta	5.45186	12.5046	32.8365	68.0961	95.2211
				GDQ	5.45182	12.5046	32.8365	68.0961	95.2211
1/3	1/3	0.8	0.6	exacta	4.04202	18.5650	46.9059	95.6356	154.158
				GDQ	4.04215	18.5649	46.9060	95.6356	154.158
			0.4	exacta	4.59039	15.6796	40.0912	82.0342	128.122
				GDQ	4.59033	15.6797	40.0912	82.0342	128.122
		0.6	0.4	exacta	4.05266	15.3953	35.8375	74.6095	120.515
				GDQ*	4.05270	15.3953	35.8375	74.6095	120.515
			0.2	exacta	4.42552	10.5238	30.0581	48.5405	95.0389
				GDQ	4.42552	10.5238	30.0581	48.5405	95.0389
1/4	1/2	0.8	0.6	exacta	3.81450	19.6666	48.6620	93.3374	158.271
				GDQ	3.81460	19.6666	48.6621	93.3374	158.271
			0.4	exacta	4.29914	18.8820	40.6006	84.4814	141.783
				GDQ	4.29915	18.8820	40.6006	84.4814	141.783
		0.6	0.4	exacta	3.58797	16.8744	37.7632	71.0630	122.189
				GDQ	3.58799	16.8744	37.7632	71.0630	122.189
			0.2	exacta	4.30111	12.7423	29.3686	61.7139	87.6482
				GDQ	4.30113	12.7423	29.3686	61.7139	87.6482
1/4	1/4	0.8	0.6	exacta	3.76821	16.9622	45.6926	86.3789	147.279
				GDQ	3.76815	16.9623	45.6925	86.3789	147.279
			0.4	exacta	3.84254	13.7191	36.8757	69.4690	112.625
				GDQ	3.84255	13.7191	36.8757	69.4690	112.625
		0.6	0.4	exacta	3.34005	14.0479	35.3652	63.6122	107.678
				GDQ	3.34005	14.0479	35.3652	63.6122	107.678
			0.2	exacta	2.55470	11.4218	21.9191	46.2964	66.8065
				GDQ	2.55469	11.4218	21.9191	46.2964	66.8064

Tabla 4: Primeras cinco frecuencias naturales de una viga cantilever de 3 escalones, obtenida por: a) Solución exacta y b) Método de cuadratura con una malla de 21 puntos en cada tramo. * Modelos elegidos en el análisis de convergencia (ver Tabla 2).

Los gráficos de la Figura 5 presentan el coeficiente de frecuencia fundamental Ω_1 versus la relación h_2/h_1 para 3 valores diferentes de la relación L_1/L y adicionalmente Ω_1 es graficado para una viga uniforme a modo de referencia.

Se observa que cuando $L_1/L=0.75$, Ω_1 crece más significativamente que para otros casos, pero en todas las situaciones Ω_1 decrece rápidamente cuando $h_2/h_1 < 0.18$ debido a cambios en la rigidez y la masa de la viga.

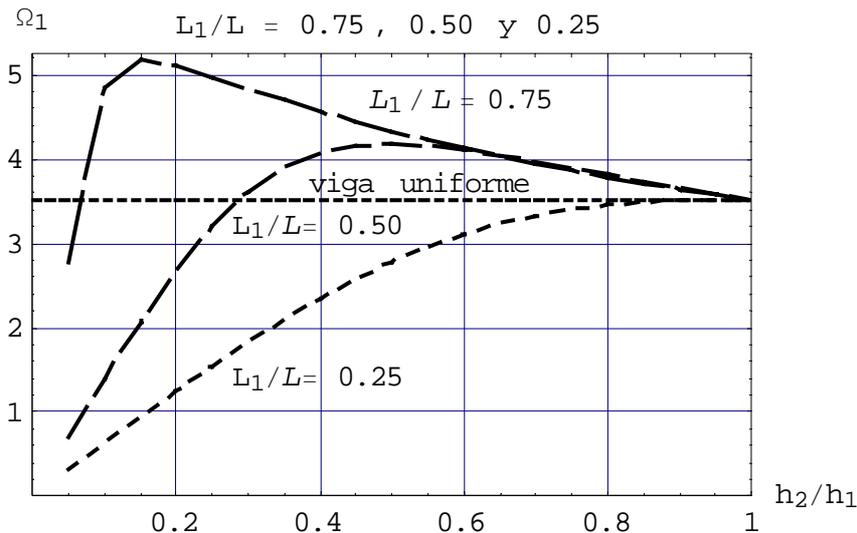


Figura 5: Coeficiente de frecuencia fundamental Ω_1 versus la relación h_2/h_1 , para diferentes valores de L_1/L , en una viga cantilever de 2 escalones.

La información presentada se complementa con el gráfico del factor de eficiencia de rigidización η (ver Figura 6), que se expresa como sigue:

$$\eta = \frac{\Omega_1/\Omega_{01}}{M_1/M_0} \quad (43)$$

donde: Ω_1 y M_1 representan la primer frecuencia y la masa adimensional respectivamente, rigidizada dinámicamente. Por otra parte Ω_{01} y M_0 representan la primer frecuencia y la masa adimensional respectivamente, de la estructura original.

De la observación de la Figura 6, se verifica que para cada relación L_1/L , existe una relación h_2/h_1 , que optimiza el factor de eficiencia de rigidización η , y que dicha relación h_2/h_1 óptima crece a medida que L_1/L decrece.

Obviamente, este comportamiento está relacionado con la vinculación de la viga (ménsula), en virtud de que la reducción en la altura de la sección y consecuentemente en la masa tiene lugar en la posición más alejada del vínculo, donde para el modo fundamental la energía cinética es mayor.

Resulta importante destacar en consecuencia que la optimización de la rigidización dinámica de la viga depende de la elección adecuada de ambos parámetros (L_1/L y h_2/h_1) y que a su vez este proceso es afectado considerablemente por el tipo de vinculación de la estructura.

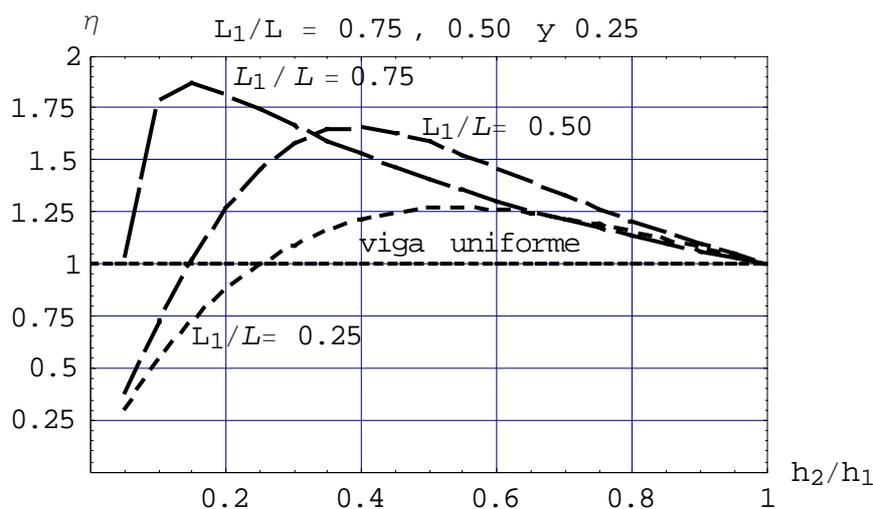


Figura 6: Coeficiente de eficiencia de rigidización η versus la relación h_2/h_1 , para diferentes valores de L_1/L , en una viga cantilever de 2 escalones.

El gráfico de Ω_1 versus h_3/h_1 correspondiente sobre la viga de 3 escalones fue realizada para el caso: $L_1/L=1/2$ y $L_2/L=1/4$, tomando $h_2/h_1=0.8$ y 0.6 , (ver Figura 7).

Un comportamiento similar se observa para ambos casos: $h_2/h_1=0.8$ y 0.6 debido a que los gráficos correspondientes, están ubicados muy cerca uno de otro.

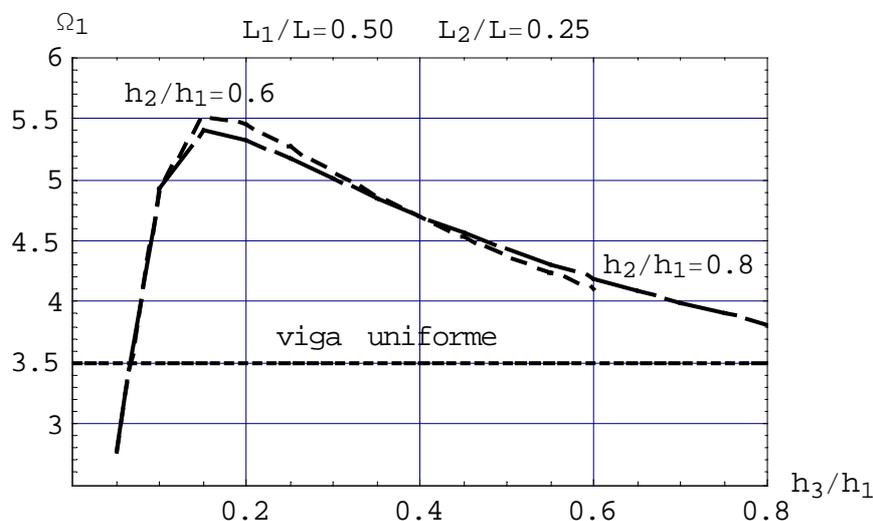


Figura 7: Coeficiente de frecuencia fundamental Ω_1 versus la relación h_3/h_1 , para dos valores diferentes de h_2/h_1 , con $L_1/L=1/2$ y $L_2/L=1/4$, en una viga cantilever de 3 escalones.

Sin embargo los correspondientes η -plot (ver Figura 8) presentan diferencias considerables entre las curvas $h_2/h_1, 0.8$ y 0.6 .

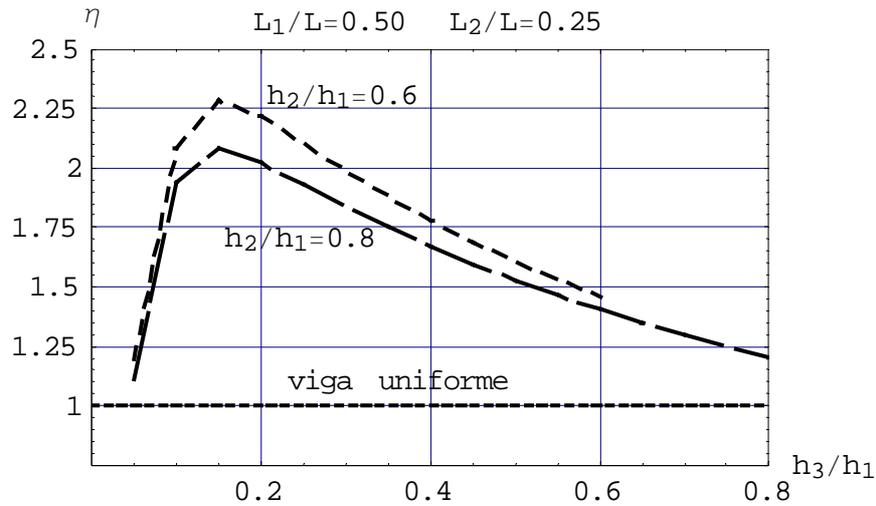


Figura 8: Coeficiente de eficiencia de rigidización η versus la relación h_3/h_1 , para dos valores diferentes de h_2/h_1 , con $L_1/L=1/2$ y $L_2/L=1/4$, en una viga cantilever de 3 escalones.

Adicionalmente otro estudio similar fue realizado para $L_1/L=L_2/L=1/3$ (ver Figuras 9 y 10), utilizando las mismas relaciones $h_2/h_1=0.8$ y 0.6 . En dichos casos la diferencia entre curvas con diferentes relaciones h_2/h_1 , fueron más notables. En ambos casos aparece un límite del incremento de rigidez cuando la relación h_3/h_1 queda por debajo de 0.18.

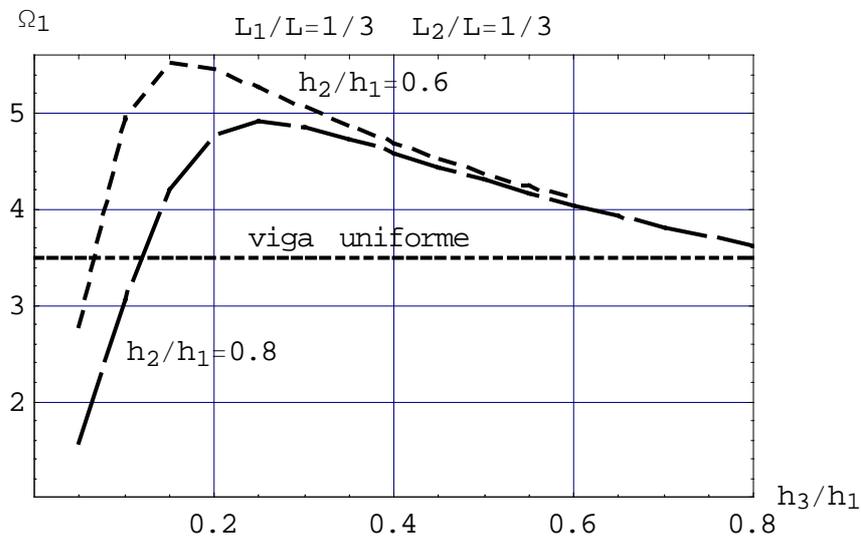


Figura 9: Coeficiente de frecuencia fundamental Ω_1 versus la relación h_3/h_1 , para dos valores diferentes de h_2/h_1 , con $L_1/L=L_2/L=1/3$, en una viga cantilever de 3 escalones.

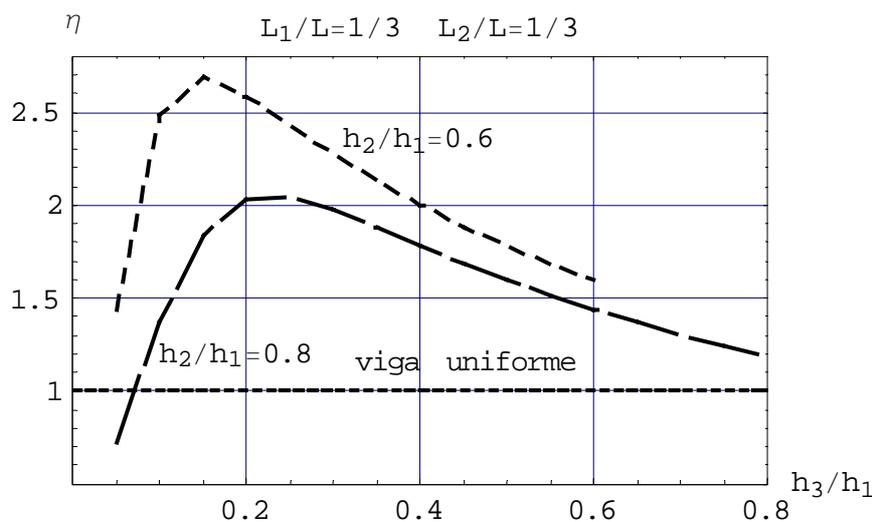


Figura 10: Coeficiente de eficiencia de rigidización η versus la relación h_3/h_1 , para dos valores diferentes de h_2/h_1 , con $L_1/L = L_2/L = 1/3$, en una viga cantilever de 3 escalones.

Finalmente, como comentario menor, el presente algoritmo de cuadratura diferencial fue utilizado para una viga de n escalones ($n=4$ a $n=6$) y una velocidad de procesamiento muy alta fue observada nuevamente.

6 CONCLUSIONES

La viga cantilever escalonada fue resuelta por el GDQM y se obtuvo una solución analítica exacta que permitió comparar resultados, hallándose excelente concordancia en los valores de frecuencia. Además el GDQM fue implementado utilizando el método de descomposición de dominio.

El trabajo fue extendido a vigas de tres escalones, y se resolvió con la solución exacta y con el GDQM. Cabe mencionar que los algoritmos presentados para el GDQM son aplicables a un número n arbitrario de tramos o escalones. En cálculos adicionales (no presentados en este trabajo), se observó la gran ventaja en performance que ofrece el método propuesto cuando $n > 3$. El método propuesto fue implementado con muy poco esfuerzo computacional, en coincidencia con lo que ha sido reportado anteriormente por diferentes autores, ([Bert and Malik, 1996](#), [Shu and Chen, 1999](#), ...)

En la Tabla 5 puede apreciarse la performance del GDQM mediante los siguientes datos de consumo de tiempo, registrados al calcular los casos presentados, con un algoritmo diseñado con el Software comercial *Mathematica*®.

Equipo: PC Pentium 4 de 2.26 GHz, con 250 MB de RAM	
Viga de dos tramos con 11 puntos por tramo:	0.156 segundos
Viga de dos tramos con 21 puntos por tramo:	0.265 segundos
Viga de tres tramos con 11 puntos por tramo:	0.187 segundos
Viga de tres tramos con 21 puntos por tramo:	0.360 segundos

Tabla 5: Tiempos de proceso para diferentes casos planteados

El mismo caso se resolvió utilizando el módulo lineal del software profesional Algor, que dispone de un elemento viga de dos nodos, requiriendo un modelo de 4000 elementos para obtener la misma precisión que con 21 nodos utilizando GDQM. El mismo insumió 9 segundos netos de proceso. Adicionalmente se calcularon los coeficientes de frecuencia, con la misma precisión, con otro software de elementos finitos, (Rossi, 2002), mediante un modelo de 8 elementos de 3 nodos, el cual insumió un tiempo del mismo orden que el GDQM (< 1 segundo).

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo ha sido financiado por la Secretaría General de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional del Sur, en el Departamento de Ingeniería y por el programa de Investigación y Desarrollo del CONICET.

REFERENCIAS

- Algor Professional Mech. *Linear Stress and Dynamics Reference Division*, Pittsburgh, PA, USA. VE 12.2, 2001.
- R. Bellman and J. Casti. Differential quadrature and long-term integration. *J. Math. Anal. App*, 34:235-238, 1971.
- C. W. Bert, X. Wang and A. G. Striz. Static and free vibrational analysis of beams and plates by differential quadrature method. *Acta Mechanica*, 102:11-24, 1994.
- C. W. Bert. Effect of finite thickness on the relationship between fundamental natural frequency and maximum static deflection of beams. *Journal of Sound and Vibration*, 186(4):691-693, 1995.
- C. W. Bert and M. Malik. Differential quadrature method in computational mechanics: A review. *Applied Mechanics Review*, 49:1-28, 1996.
- R. H. Gutierrez, P. A. A. Laura, and R. E. Rossi. The method of differential quadrature and its application to the approximate solution of ocean engineering problems. *Ocean Engineering*, 21(1): 57-66, 1994.
- P. A. A. Laura, D. V. Bambill, C. A. Rossit and S. La Malfa. Comments on "Increasing the natural frequencies of circular disks using internal channels". *Journal of Sound and Vibration*, 240(5):955-956, 2001.
- G. R. Liu and T. Y. Wu. Vibration analysis of beams using the generalized differential quadrature rule and domain decomposition. *Journal of Sound and Vibration*, 246(3):461-481, 2001.
- R. E. Rossi, R. H. Gutierrez and P. A. A. Laura. Transverse vibrations of a Timoshenko beam of non uniform cross section elastically restrained one end and carrying a concentrated mass at the other. *J. Acoust Soc. Am*, 89(5):2456-2458, 1991.
- R. E. Rossi. Introducción al Análisis de Vibraciones con Elementos Finitos. *Publicación interna del Dto. de Ingeniería* (UNS). Pp 201, 2002.
- C. Shu and W. Chen. On optimal selection of interior points for applying discretized boundary conditions in DQ vibration analysis of beams and plates. *Journal of Sound and Vibration*, 222(2):239-257, 1999.
- C. Shu and B. E. Richards. Application of generalized differential quadrature to solve two dimensional incompressible Navier-Stokes equations. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 15:791-798, 1992.
- C. Shu and B. E. Richards. Parallel simulation of incompressible viscous flows by generalized differential quadrature. *Comput. Syst. In Eng*, 3:271-281, 1992.
- A. G. Striz, X. Wang and C. W. Bert. Harmonic differential quadrature method and

- applications to analysis of structural components. *Acta Mechanica*, 111:85-94, 1995.
- Y. P. Tseng, C. S. Huang and C J. Lin. Dynamic stiffness analysis for in-lane vibrations of arches with variable curvature. *Journal of Sound and Vibration*, 207:15-31, 1997.
- S. A. Vera, M. Febbo and P. A. A. Laura. Comments on "A variable order approach to improve differential quadrature accuracy in dynamic analysis". *Journal of Sound and Vibration*, 280:1149-1150, 2005.
- Z. Zong. Author's reply. *Journal of Sound and Vibration*, 280:1151-1153, 2005.