

UN ELEMENTO TRIANGULAR EN DEFORMACIONES IMPUESTAS PARA SÓLIDOS BIDIMENSIONALES CON GRANDES DEFORMACIONES

Walter B. Castelló, Fernando G. Flores

Departamento de Estructuras, F.C.E.F. y N, Universidad Nacional de Córdoba
Av. Velez Sarsfield 1611 (C.C. 916, C.P. 5000), Córdoba, Argentina
e-mail: wcastello@efn.uncor.edu, web: <http://www.efn.unc.edu.ar/>

Key Words: elementos finitos, grandes deformaciones, remallado, deformaciones impuestas, solidos bidimensionales.

Abstract. *La creciente utilización del método de elementos finitos en la simulación de procesos industriales, como el conformado plástico de piezas para las industrias automotriz y aeronáutica, implican una constante investigación para mejorar los códigos computacionales. Los aspectos involucrados (plasticidad, contacto, grandes deformaciones, etc.) condicionan el desarrollo de elementos sólidos y se prefiere casi exclusivamente a los elementos de bajo orden con grados de libertad nodales de desplazamiento. En dos dimensiones esto nos lleva a triángulos lineales y cuadriláteros bilineales, sin embargo en problemas con flujo plástico isócoro estos elementos presentan bloqueo volumétrico. La utilización de triángulos es más versátil pues los generadores de mallas de triángulos son más eficientes y robustos que los de cuadriláteros, facilitando así el remallado automático, pero se necesitan mallas finas para mejorar los resultados y bloquea en problemas quasi-incompresibles. Para solucionar este inconveniente se han propuesto elementos triangulares con grados de libertad nodales distintos de los desplazamientos, sin embargo pueden traer problemas cuando se introducen en códigos con integración explícita de las ecuaciones de movimiento que son los más usados en esta área. En este trabajo se han analizado sólidos isótropos, utilizando un elemento triangular en deformaciones impuestas, donde la evaluación de los gradientes es función de la geometría de los elementos adyacentes. Y se usó una formulación elasto-plástica basada en la descomposición multiplicativa del tensor gradiente de las deformaciones. Los resultados muestran que el elemento tiene un comportamiento similar a los elementos triangulares cuadráticos, además de una implementación sencilla, y sumado a la formulación elasto-plástica implementada permite alcanzar un nivel de precisión muy bueno comparado con los resultados obtenidos en otros trabajos.*

1. INTRODUCCIÓN

El análisis de sólidos con grandes deformaciones elasto-plásticas a través del método de elementos finitos, es una actividad creciente en la mayoría de las industrias que pertenecen al rubro de fabricación por conformado plástico. Más aun, la simulación computacional de estos procesos ha logrado disminuir eficientemente los tiempos y costos de desarrollo de nuevos productos. Estos procesos, los cuales incluyen forjado, extrusión, rolado, etc., involucran aspectos relativamente complejos como grandes deformaciones, flujo plástico isócoro, contacto con las herramientas y acoplamiento termo-mecánico entre otros. Las herramientas computacionales se encuentran en un continuo proceso de mejora, de modo de lograr elementos más eficientes y algoritmos de mayor generalidad para aplicarse a estos estudios.

El análisis computacional de estos procesos generalmente constituye un problema de tamaño considerable, en lo que a grados de libertad se refiere, por lo cual casi siempre se prefiere el uso de elementos de bajo de orden de interpolación. Además asociado a una mejor interpretación de los resultados, el elemento debería tener grados de libertad con sentido físico claro como por ejemplo desplazamientos. En problemas bidimensionales, esto genera una preferencia por el uso de elementos triangulares lineales o cuadriláteros bilineales. La desventaja es que estos elementos presentan bloqueo volumétrico cuando se lo emplea en deformaciones finitas, por otro lado si se restringe a triángulos con solo grados de libertad de desplazamiento se necesitan mallas muy finas para obtener resultados con precisión ingenieril.

En el caso de los cuadriláteros es distinto, las formulaciones de este elemento han tenido una evolución importante en las últimas décadas con la finalidad de lograr elementos que no bloquearan en problemas cuasi-incompresibles. Y las diferentes aproximaciones desarrolladas sobre este elemento comprenden desde la adición de modos incompatibles, luego la integración reducida o selectiva, el método B-barra, e inclusive las formulaciones más modernas en deformaciones impuestas y/o mejoradas. Como ejemplo de estas aproximaciones se citan los trabajos de Simo *et al.*,¹ César de Sá *et al.*,² Armero³ y las referencias que allí se mencionan.

Si se plantea la elección del elemento desde el punto de vista de la aplicación, el triángulo resulta más conveniente por dos motivos: en primer lugar los generadores de triángulos son más robustos y eficientes; en segundo lugar tiene la ventaja de poder remallar con mayor facilidad cuando la geometría se deforma excesivamente. Esto ha impulsado el desarrollo de aproximaciones basadas en triángulos, que introducen grados de libertad que no son desplazamientos, como por ejemplo giros, derivadas de los desplazamientos o la presión media. Estas formulaciones implican un tratamiento especial en la técnica de integración temporal cuando se usan códigos explícitos, los cuales son los más apropiados para tratar con problemas que involucran grandes deformaciones y contacto.

En este trabajo se parte de la discretización del dominio con elementos triangulares de tres nodos. La aproximación emplea elementos triangulares con sólo grados de libertad de desplazamiento y tiene la particularidad que en la evaluación de las deformaciones se hace uso de la geometría de los tres triángulos adyacentes. De modo que el esquema geométrico consiste en una parcela de cuatro elementos con seis nodos, lo cual permite tener una aproximación cuadrática a

partir de elementos triangulares definidos por tres nodos. Esta aproximación resulta similar a la usada por Flores,⁴ la diferencia principal es que aquí se interpola linealmente el tensor gradiente de la deformación evaluado a mitad de cada lado.

El modelo constitutivo empleado en este trabajo está basado en la descomposición multiplicativa del tensor gradiente de la deformación. Actualmente, como resultado de los trabajos en el área de la *teoría microestructural* que describen las grandes deformaciones elasto-plásticas de monocristales (también llamada teoría del *deslizamiento en el continuo*) este modelo goza de una enorme aceptación y por tal motivo se ha extendido su uso al análisis de sólidos policristalinos. Como ejemplo de aplicaciones de este modelo se puede referir a los trabajos de Eterovic,⁵ García Garino,⁶ Khan *et al.*,^{7,8} entre otros. Este modelo goza de gran aceptación y existe consenso en que es el de mayor validez cuando se desea analizar grandes deformaciones elasto-plásticas. Y al menos en el caso de materiales isótropos, no hay controversias referidas a la evolución de la configuración intermedia que es lo que caracteriza al modelo. El algoritmo de integración utilizado para las ecuaciones constitutivas es similar al propuesto por Crisfield⁹ en su trabajo.

Este trabajo se realizó dentro del código explícito basado en el método de elementos finitos Stampack©.¹⁰ A fin de mejorar el comportamiento del código en las aplicaciones de conformado plástico, se ha implementado un esquema de remallado consistente con el modelo constitutivo elegido. Acorde a este algoritmo de remallado la formulación empleada se clasifica como Lagrangiana Actualizada.

El contenido de este trabajo se resume a continuación. En la sección 2 se introducen las relaciones cinemáticas asociadas al modelo constitutivo propuesto y se definen las ecuaciones de equilibrio en la configuración donde se plantea el problema. La sección 3 es un compendio del algoritmo de aproximación en deformaciones impuestas que se emplea en este trabajo. En la sección 4 se esquematiza el método de remallado y se introduce el algoritmo de transferencia de variables aplicado. La sección 5 muestra los resultados obtenidos con la presente formulación, para casos sin remallado y otros donde es necesario generar una nueva malla por la distorsión de la geometría, y se comparan con los resultados de otros trabajos. Por último la sección 6 contiene un resumen de las conclusiones de este análisis.

2. MECÁNICA DE SÓLIDOS

En este apartado se presentan algunas características asociadas a las relaciones cinemáticas y al modelo constitutivo empleados en este trabajo para el análisis de sólidos elasto-plásticos en grandes deformaciones. El objetivo de esta sección es introducir las ecuaciones más relevantes desde el punto de vista de este trabajo, y por lo tanto no profundizaremos en temas que pueden encontrarse en los libros de texto que tratan estas áreas de la mecánica de sólidos.

Consideremos un sólido en su posición original o indeformada, ocupando un dominio Ω_0 en el espacio \mathbb{R}^3 y cuyo contorno queda definido por Γ_0 . Si definimos una función $\phi(\mathbf{X}, t)$ que relacione en todo momento la configuración de referencia Ω_0 con otra cualquiera Ω_t , a la cual se puede denominar actual o deformada, entonces es posible definir el tensor gradiente de la deformación como:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \phi(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3] \quad (1)$$

donde cada columna de este tensor en (1) queda establecida por:

$$\mathbf{a}_i(\mathbf{X}) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}_i} \quad (2)$$

El tensor de deformación admite la descomposición polar $\mathbf{F} = \mathbf{R}_L \cdot \mathbf{U}$, donde \mathbf{R}_L es un tensor de rotación y \mathbf{U} el tensor de estiramiento derecho. Empleando esta propiedad es posible eliminar la rotación de cuerpo rígido asociada al gradiente de deformación \mathbf{F} haciendo el producto $\mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}^2 = \mathbf{C}$ que es el tensor derecho de Cauchy-Green. Este tensor resulta justamente el tensor métrico definido como $(U^2)_{\alpha\beta} = G_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta$, donde se emplean las columnas del gradiente de deformación introducidos en (2). La ventaja del uso de \mathbf{U}^2 reside en el hecho que a partir del mismo pueden construirse distintas medidas de deformación Lagrangianas y es justamente el tipo de medida de deformación que se empleará en este trabajo.

El modelo cinemático empleado en este trabajo surge de la descomposición multiplicativa del gradiente de deformación \mathbf{F} , en sus partes elástica \mathbf{F}^e y plástica \mathbf{F}^p de acuerdo a:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{F}^p \quad (3)$$

lo atractivo de este modelo está asociado a la evidencia física que se observa en el análisis de monocristales, más aun como resultado de los trabajos actuales en el área microestructural este modelo goza de una elevada aceptación y por este motivo se lo extiende al análisis de sólidos policristalinos. Un ejemplo de ello son los trabajos de Khan *et al.*^{7,8} en monocristales y su extensión a sólidos policristalinos respectivamente. El principal inconveniente de este modelo radica en que la descomposición queda exactamente definida salvo una rotación de cuerpo rígido, y este inconveniente originó importantes controversias en el pasado. Hoy en día se acepta que la ecuación (3) es suficiente para definir sin ambigüedades la descomposición multiplicativa en el caso de materiales isótropos, que de hecho es el tipo de material que se estudia en este trabajo. Además en este trabajo se considera que la plasticidad es independiente del tiempo, que no hay acoplamiento termo-mecánico y que el proceso es isotérmico.

Un esquema gráfico de lo que implica la ecuación (3) se muestra en la figura 1, y como se observa en ella el modelo tiene la particularidad de introducir una tercera configuración a la que se denomina configuración intermedia que se denota con ${}^i\Omega_t$. Otra característica importante que posee este modelo es que la función de fluencia y el potencial plástico, que rigen el proceso de flujo plástico, se formulan con medidas de tensión en la configuración intermedia.

El algoritmo que se ha usado en este trabajo es una modificación del presentado por Crisfield⁹ y se desarrolla a continuación. Partiendo de la descomposición (3) se puede reescribir:

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{p-1} \quad (4)$$

la ecuación (4) puede verse como la definición de la parte elástica del gradiente de deformación. El flujo plástico se supone isócoro, como consecuencia de esto la parte plástica no modifica el

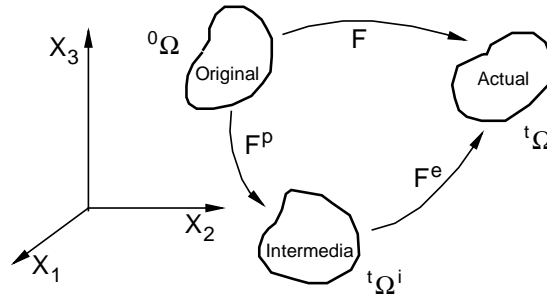


Figura 1: Configuraciones en la descomposición multiplicativa.

volumen. Por lo tanto $\det(\mathbf{F}^p) = 1$, lo cual lleva a que $J = \det(\mathbf{F}) = \det(\mathbf{F}^e)$ y a partir de esta definir:

$$\bar{\mathbf{F}}^e = J^{-1/3} \mathbf{F}^e \quad (5)$$

donde $\bar{\mathbf{F}}^e$ es la parte de volumen constante del gradiente de deformación elástico.

En el análisis de procesos elasto-plásticos es necesario, además de fijar una condición de fluencia que establezca los estados admisibles, definir como evoluciona la superficie de fluencia con la historia del proceso. Esta evolución de la superficie de fluencia queda establecida por el parámetro de endurecimiento e^p y a través de la regla de flujo plástico.

Considerando lo mencionado en el párrafo precedente y teniendo en cuenta lo expuesto para la ecuación (4), las variables internas del algoritmo utilizado en este trabajo son $\{\mathbf{F}^{p-1}, e^p\}$, la inversa de la parte plástica del gradiente de la deformación y el parámetro de endurecimiento.

Partiendo de la ecuación (4) se puede definir el tensor de Cauchy-Green elástico en la configuración intermedia (en la figura 1 se observa que este tensor está asociado a esa configuración) y resulta en $\mathbf{C}^e = (\mathbf{U}^e)^2 = \mathbf{F}^{eT} \mathbf{F}^e$, este tensor permite definir una medida de deformación Lagrangiana. Entre las posibles medidas de deformación en este trabajo se utilizó una medida de deformación natural (logarítmica) asociada a la configuración intermedia y que es:

$$\mathbf{E}_{\ln}^e = \ln(\mathbf{U}^e) \quad (6)$$

considerando además que el tensor derecho de Cauchy-Green elástico es definido positivo, entonces podemos aplicar la descomposición espectral de modo de obtener:

$$\mathbf{C}^e = (\mathbf{U}^e)^2 = \sum_{i=1}^3 (\lambda_i)^2 \mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i \quad (7)$$

en donde λ_i y \mathbf{r}_i son los autovalores y autovectores del tensor de estiramiento derecho elástico \mathbf{U}^e respectivamente. Aprovechando esta descomposición podemos definir la deformación logarítmica elástica en la configuración de referencia con componentes de la forma $e_i^e = \ln(\lambda_i)$.

Asociada a esta deformación elástica logarítmica se debe definir una medida de tensión acorde, y bajo esta premisa la mejor opción es utilizar una medida de tensión logarítmica en

la configuración de referencia. Considerando la descomposición en componentes volumétricas y desviadoras del tensor de deformaciones elástico, el tensor de tensiones elástico conjugado resulta ser:

$$\mathbf{O}^e = K \ln(J) + 2\mu \operatorname{dev}(\mathbf{e}^e) \quad (8)$$

donde K es el módulo volumétrico y μ es el módulo de corte (G) del material. En lo que resta del trabajo se denominará $\mathbf{o}^e = \operatorname{dev}(\mathbf{O}^e)$ a la parte desviadora del tensor de tensiones logarítmico elástico definido en (8). Esta última ecuación, también pone de manifiesto que se adopta una relación lineal entre las tensiones y deformaciones elásticas.

La comprobación de la carga plástica, es decir la verificación para determinar si el estado es tal que supera la tensión de fluencia, surge del criterio de fluencia utilizado. En este caso por tratarse del análisis de materiales isótropos se adoptó la condición de fluencia de Mises-Huber, la cual escrita en función del tensor de tensiones de Kirchhoff resulta ser:

$$f(\boldsymbol{\tau}, e^p) = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\operatorname{dev}(\boldsymbol{\tau})\| - (\sigma_y + A' \Delta e^p) \quad (9)$$

donde $\boldsymbol{\tau}$ es el tensor de tensiones de Kirchhoff y σ_y es la tensión de fluencia del material. Se debe destacar que en la ecuación (9) se adoptó una ley de endurecimiento lineal, donde A' es el módulo de endurecimiento y Δe^p es el incremento en el parámetro de endurecimiento. El tensor de tensiones de Kirchhoff puede obtenerse a través de $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{R}^e \mathbf{O} \mathbf{R}^{eT}$, en donde el tensor de rotación elástico \mathbf{R}^e queda establecido a partir de la descomposición polar del gradiente de deformación elástico de la forma $\mathbf{R}^e = \mathbf{F}^e \mathbf{U}^{e-1}$. Considerando la condición de isotropía del material, la ecuación (9) puede expresarse en función del tensor de tensiones logarítmicos y tiene la forma:

$$f(\mathbf{O}, e^p) = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\mathbf{o}\| - (\sigma_y + A' \Delta e^p) \quad (10)$$

Hasta aquí entonces, se ha establecido una medida de deformación elástica (7) a partir de la cual se puede determinar un tensor elástico (8) que se denomina habitualmente *de prueba* y luego con este estado tensional se comprueba si se ha producido la fluencia con (10). Si no se sobrepasó la superficie de fluencia, el estado es elástico con lo cual pueden adoptarse las deformaciones (7) y las tensiones (8) como el estado resultante.

Caso contrario, si se ha violado la condición (10), es necesario corregir el estado elástico de prueba por plasticidad y retornar a la superficie de fluencia. El algoritmo empleado es el de *retorno radial*, y se justifica por el hecho de que la condición de fluencia adoptada es la de Mises-Huber. De este modo considerando la regla de flujo de Prandtl-Reuss de la forma $\dot{\mathbf{e}}^p = \dot{\gamma} \mathbf{A}$, donde se introduce el parámetro de consistencia γ y el tensor dirección de flujo plástico $\mathbf{A} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{O}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\mathbf{o}}{\|\mathbf{o}\|}$, es fácil demostrar a través del trabajo plástico realizado en el proceso de deformación que $\Delta e^p = \Delta \gamma$.

Por lo tanto, restando la expresión que surge de la regla de flujo a la ecuación (8) y reemplazando esta expresión resultante en la ecuación (10) se llega a la conocida expresión:

$$\Delta\gamma = \frac{f^*}{(3\mu + A')} \quad (11)$$

que nos permite determinar el incremento en el parámetro de consistencia $\Delta\gamma$, equivalente al incremento en el parámetro de endurecimiento Δe^p . En la ecuación (11) se distingue con un asterisco f^* , al valor que toma la función de fluencia (10) evaluada con la tensión obtenida en (8).

A través de la misma regla de flujo y con la parte desviadora de la ecuación (8), llegamos a:

$$\mathbf{o} = \alpha \mathbf{o}^e = \left(1 - \frac{3\mu\Delta\gamma}{O_e}\right) \mathbf{o}^e \quad (12)$$

en donde α suele denominarse multiplicador plástico y O_e es la tensión equivalente de von Mises.

El paso siguiente consiste en actualizar las variables internas del proceso, para lo cual la regla de flujo que ya fuera establecida con anterioridad se puede reescribir como:

$$\dot{\mathbf{e}}^p = \dot{\gamma} \mathbf{A} = \mathbf{L}^p = \dot{\mathbf{F}}^p \mathbf{F}^{p-1} \quad (13)$$

y si se considera que el tensor dirección de flujo plástico se mantiene constante (retorno radial), entonces la integración de la ecuación (13) permite actualizar la parte plástica del tensor gradiente de la deformación (el subíndice n indica el paso de avance):

$$\mathbf{F}_{n+1}^{p-1} = \mathbf{F}_n^{p-1} \exp(-\Delta\gamma \mathbf{A}) \quad (14)$$

donde se observa que se actualiza directamente la inversa del gradiente plástico solo por conveniencia desde el punto de vista del cálculo asociado al algoritmo. Por otro lado el parámetro de endurecimiento se actualiza con:

$$e_{n+1}^p = e_n^p + \Delta\gamma \quad (15)$$

y el estado tensional resultante, adicionando las componentes volumétricas y considerando que $J = \det(\mathbf{F}) = \det(\mathbf{F}^e) = J^e$, es:

$$\mathbf{O} = K \ln(J) \mathbf{1} + (1 - \alpha) \mathbf{o}^e \quad (16)$$

donde $\mathbf{1}$ es el tensor identidad de segundo orden.

En última instancia, debido a que este modelo constitutivo se implementó en una Formulación Lagrangiana Actualizada, es conveniente trabajar con el segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff referido a esta configuración. Por este motivo es necesario conocer la relación entre el tensor de tensiones logarítmico y el segundo tensor de Piola-Kirchhoff, la cual resulta:

$$\bar{\mathbf{S}} = \mathbf{F}^{e-1} \boldsymbol{\tau} \mathbf{F}^{e-T} = \mathbf{U}^{e-1} \mathbf{O} \mathbf{U}^{e-T} \quad (17)$$

donde $\bar{\mathbf{S}}$ es el segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff referido a la configuración intermedia ${}^i\Omega_t$, y que en virtud de (7) es fácil de obtener. La figura 1 muestra que para referir este tensor de tensiones a la configuración original o indeformada Ω_0 es necesario hacer una transformación usando el tensor plástico de deformaciones \mathbf{F}^p con:

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^p{}^{-1} \bar{\mathbf{S}} \mathbf{F}^p{}^{-T} \quad (18)$$

Haciendo uso de las definiciones previas, la forma débil de las ecuaciones de balance en la configuración de referencia pueden escribirse como:

$$\delta\Pi = \int_{\Omega_0} [\delta\mathbf{E}_{GL} \cdot \mathbf{S}] \, d\Omega_0 + \delta\Pi_{\text{ext}} = 0 \quad (19)$$

donde \mathbf{E}_{GL} es el tensor de deformaciones de Green-Lagrange definido, a partir del gradiente de deformación total \mathbf{F} y a través del tensor derecho de Cauchy-Green $\mathbf{C} = (\mathbf{U})^2 = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$, como:

$$\mathbf{E}_{GL} = \frac{1}{2} (\mathbf{U}^2 - \mathbf{1}) \quad (20)$$

Estos párrafos precedentes establecen las características que sitúan el modelo constitutivo utilizado en este trabajo dentro del contexto de la mecánica de los sólidos. El modelo elasto-plástico empleado está definido a partir de la descomposición multiplicativa del tensor de deformaciones, el algoritmo implementado es similar a los que pueden encontrarse en la literatura relacionada con el análisis de sólidos con grandes deformaciones y solo se han introducido modificaciones menores asociadas a una más fácil implementación dentro del código explícito que se ha usado en este trabajo. La formulación en elementos finitos es del tipo Lagrangiana Actualizada y los problemas que se abordaron en este trabajo comprenden sólidos isótropos, con plasticidad independiente del tiempo y a temperatura constante.

3. FUNCIONES DE APROXIMACIÓN

Como se había mencionado, existe una preferencia en el uso de elementos de bajo orden de interpolación cuando se trata problemas con grandes deformaciones elasto-plásticas. Además es siempre conveniente que los elementos tengan grados de libertad de significado físico claro, como por ejemplo desplazamientos, esta premisa se sustenta en dos realidades importantes: la primera tiene que ver con el punto de vista de la formulación y su implementación computacional, mientras que la segunda con la facilidad de interpretación de los resultados.

La aproximación usada consiste en la aplicación de un elemento triangular en deformaciones impuestas, similar al propuesto por Flores.⁴ En particular, la aproximación empleada en este trabajo consiste en una extensión de esa formulación aplicada a sólidos bidimensionales con grandes deformaciones elasto-plásticas.

El punto de partida en esta aproximación es discretizar el dominio con elementos triangulares de tres nodos. Sin embargo a diferencia del método de elementos finitos convencional, la evaluación de las deformaciones en cada triángulo se hace teniendo en cuenta la geometría de los tres elementos adyacentes. Así entonces se tiene una parcela de cuatro elementos: un elemento central sobre el cual se desea evaluar la deformación y tres elementos adyacentes a los lados del elemento central, ver figura 2. Se observa en esta figura que se mantienen los vértices del elemento central en el espacio isoparamétrico, sin embargo puede verse la existencia de los tres elementos adyacentes.

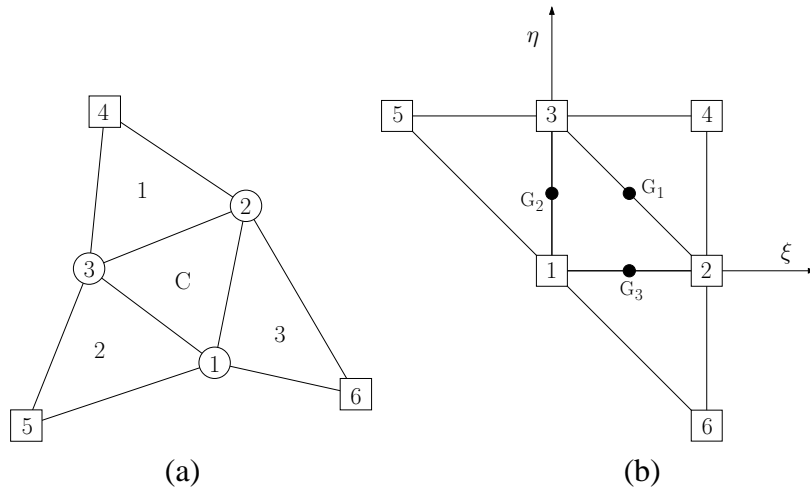


Figura 2: Parcela de elementos triangulares. (a) Coordenadas espaciales. (b) Coordenadas naturales.

Entonces en la figura 2 muestra que la parcela de elementos triangulares queda definida por seis nodos y de esta forma, si bien partimos de elementos triangulares de tres nodos, se llega a una aproximación cuadrática. El nuevo conjunto de funciones de forma (no estándar), considerando que $\zeta = 1 - \xi - \eta$, son:

$$\begin{aligned}
 N^1 &= \zeta + \xi\eta & N^4 &= \frac{\zeta}{2} (\zeta - 1) \\
 N^2 &= \xi + \eta\zeta & N^5 &= \frac{\xi}{2} (\xi - 1) \\
 N^3 &= \eta + \zeta\xi & N^6 &= \frac{\eta}{2} (\eta - 1)
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

A través de las funciones de forma se obtienen los gradientes de deformación en algunos puntos predeterminados. Utilizando la clásica notación en elementos finitos:

$$\mathbf{F} = \partial \mathbf{x} / \partial \mathbf{X} = \sum_{I=1}^{NN=6} N_{I,X}^I x^I
 \tag{22}$$

donde x^I representan las coordenadas nodales actualizadas en la configuración deformada, y con (22) se pueden obtener las dos primeras columnas de \mathbf{F} en (1). En el caso de la dirección

normal al plano (\mathbf{a}_3), en deformación plana es simplemente $\mathbf{a}_3 = (0 \ 0 \ 1)^T$. Mientras que en axilsimetría además de considerar el alargamiento normal en el elemento central, se adiciona el promedio de los alargamientos normales de los elementos adyacentes, resultando:

$$\mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \left\{ \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sum_{I=1}^3 x^I}{\sum_{I=1}^3 X^I} + \frac{1}{3} \left(\sum_{J=1}^3 \frac{\sum_{K=1}^3 x^{K(J)}}{\sum_{K=1}^3 X^{K(J)}} \right) \right\} \right\} \quad (23)$$

Los gradientes de deformación se evalúan a mitad de cada lado del triángulo central C (puntos identificados como G_1 , G_2 y G_3 en la figura 2) y la aproximación propuesta consiste en adoptar un gradiente de deformación en el elemento, que surge del promedio:

$$\bar{\mathbf{F}} = \frac{1}{3} (\mathbf{F}_{G_1} + \mathbf{F}_{G_2} + \mathbf{F}_{G_3}) \quad (24)$$

es decir se interpolan los gradientes obtenidos a mitad de cada lado del elemento central y de hecho esta operación le da carácter de aproximación en deformaciones impuestas al elemento. El gradiente de deformación promedio obtenido con (24) es el que se emplea luego en las ecuaciones del modelo constitutivo (4) y las ecuaciones de equilibrio (20).

La selección de los puntos a mitad de cada lado del elemento central no es arbitraria. Trae aparejadas algunas ventajas, y la principal es que la evaluación del gradiente a la mitad de cada lado depende exclusivamente de la posición de los nodos asociados a los dos elementos que comparten el lado. Estos es algo que puede verificarse fácilmente, derivando las expresiones de las funciones de forma (21) y evaluándolas en las coordenadas de los puntos G_1 , G_2 y G_3 .

4. REMALLADO Y TRANSFERENCIA

El análisis de problemas con grandes deformaciones involucra importantes cambios en la geometría, con lo cual sin la opción de remallado muchos de estas simulaciones no podrían ser concluidas. Los esquemas de rezoñificación (suavizado geométrico) de nodos con que cuentan muchos de los códigos actuales, son eficientes cuando el nivel de distorsión de malla no es exagerado. El remallado comprende dos puntos relevantes que deben ser analizados en detalle: en primer término se encuentra la nueva malla y por otro lado la transferencia de variables, en particular cuando hablamos de procesos que son dependientes de la historia del proceso (como el caso de problemas elasto-plásticos).

En este trabajo se empleó un algoritmo de remallado simple, este esquema parte del contorno del sólido deformado para generar una nueva geometría. Considerando que el área de análisis en este trabajo son sólidos bidimensionales, entonces el contorno pasa a ser una línea y no acarrea mayores complicaciones. La generación de esta nueva geometría, la aplicación de las condiciones de contorno y la discretización (respetando el tamaño de elemento de la malla original) del nuevo dominio se realiza con el software GiD© a través de la opción *batch file*.

Considerando el tipo de análisis que se ha hecho en este trabajo, la transferencia de variables entre mallas ocupa un rol crucial en la correcta evolución de la simulación. No solo la transferencia es relevante, también la elección adecuada de las variables a transferir es un tema

al que no se le puede restar importancia. En un proceso elasto-plástico es posible diferenciar dos conjuntos de variables a transferir: en primer lugar las variables que definen el estado geométrico del sólido, digamos desplazamientos $\{\mathbf{u}\}$, asociadas generalmente a los nodos; y en segundo lugar variables que establecen el estado del material, como ser algunas variables internas $\{\mathbf{F}^{p-1}, e^p\}$, que están asociadas habitualmente a los puntos de Gauss dentro del elemento. Sin embargo la transferencia de variables como el desplazamiento está ligada a formulaciones del tipo Lagrangiana Total.

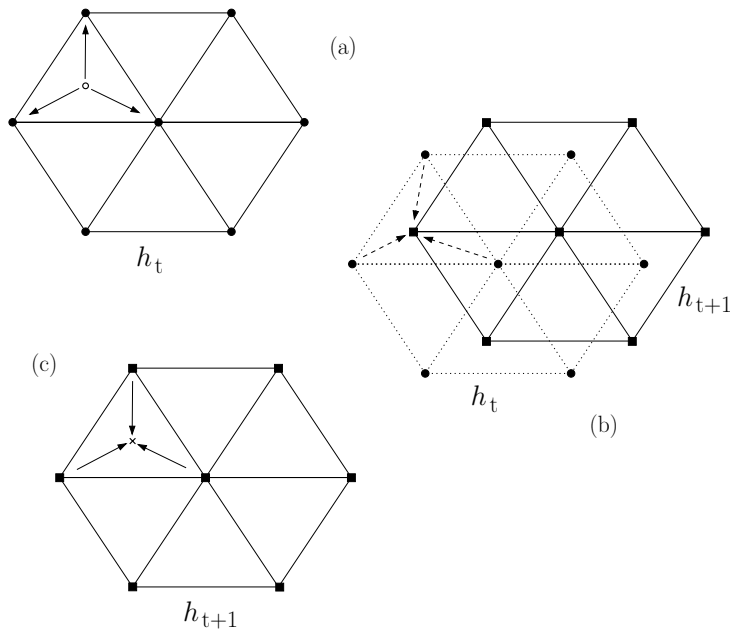


Figura 3: Esquema de transferencia de variables. (a) Extrapolación desde los puntos de Gauss hacia los nodos. (b) Transferencia de variables entre mallas. (c) Interpolación desde los nodos hacia a los puntos de Gauss.

En este trabajo las variables a transferir resultan ser el parámetro de endurecimiento e^p y el tensor de tensiones de Kirchhoff $\boldsymbol{\tau}$. Se decidió no transferir el tensor \mathbf{F}^{p-1} ya que el mismo no está unívocamente definido (cualquier rotación \mathbf{R} aplicada sobre el mismo daría igual resultado $\mathbf{F}^{p-1}\mathbf{R}^T$), y es preferible transferir el tensor $\boldsymbol{\tau}$ que es una variable espacial definida en la configuración actual que es donde se hace el remallado. Aquí se empleó un esquema de transferencia de uso habitual similar al propuesto por Han *et al.*,¹¹ que se ha ejemplificado en la figura 3. Este esquema consta de tres pasos bien diferenciados: 1) se transfieren las variables internas (puntos de Gauss) hacia los nodos mediante una técnica de suavizado, 2) se hace la transferencia propiamente dicha de las variables $\{e^p, \boldsymbol{\tau}\}$ desde los nodos de la malla anterior h_t a la malla nueva h_{t+1} empleando las mismas funciones de forma del elemento triangular convencional, y 3) se interpolan las variables internas desde los nodos hacia los puntos de Gauss.

Una vez transferidas las variables, es necesario recuperar el estado plástico del material de modo que la evolución del proceso elasto-plástico se haga en forma coherente con el nivel de deformación. Para esto es necesario recalcular la parte plástica del tensor gradiente de la

deformación, para lo cual primero se propone hacer la descomposición espectral del tensor de Kirchhoff transferido:

$$\boldsymbol{\tau} = \sum_{i=1}^3 \tau_i \mathbf{l}_i \otimes \mathbf{l}_i \quad (25)$$

A partir de la descomposición en componentes volumétricas y desviadoras de este tensor de tensiones, considerando que $p = (\sum \tau_i) / 3$, es posible obtener:

$$J = \exp\left(\frac{p}{K}\right) \quad (26)$$

y también:

$$\lambda_i = J^{1/3} \exp\left(\frac{\tau_i - p}{2\mu}\right) \quad (27)$$

donde (26) y (27) pueden derivarse rápidamente a partir de (8). Luego, con los resultados obtenidos en estas últimas dos ecuaciones se puede llegar a:

$$\mathbf{U}^e = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \mathbf{l}_i \otimes \mathbf{l}_i \quad (28)$$

Considerando que la configuración es la misma que había antes del remallado tenemos que $\mathbf{F}^e = \mathbf{U}^e$ y además se adoptó una Formulación Lagrangiana Actualizada (que implica que comenzarán a medirse desplazamientos desde la configuración resultante del remallado) entonces $\mathbf{F} = \mathbf{1}$. Consecuencia de esto último $\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \mathbf{F}^p = \mathbf{U}^e \mathbf{F}^p = \mathbf{1}$, y resulta entonces que:

$$\mathbf{F}^{p-1} = \mathbf{U}^e \quad (29)$$

de esta forma con el parámetro de endurecimiento e^p transferida y el tensor de deformación plástico calculado en (29) se tienen las variables internas necesarias para proseguir con el análisis elasto-plástico.

5. EJEMPLOS NUMÉRICOS

Habiendo expuesto las características de la aproximación utilizada en este trabajo, a continuación se presentan los resultados obtenidos para distintos problemas de sólidos bidimensionales en el área de las grandes deformaciones elasto-plásticas. En este trabajo se hizo especial énfasis en casos axilimétricos. Para comenzar se ha aplicado este elemento a casos donde no es necesario (o al menos no es imperativo) hacer el remallado, para mostrar el desempeño de la aproximación. Luego se estudian casos más complejos donde la alteración de la geometría acarrea la necesidad de generar nuevas mallas, de modo de mantener el nivel de precisión deseado en los resultados. En lo que sigue se identificarán los resultados obtenidos a partir de la aproximación que se propone en este trabajo con las siglas *TR2D*.

5.1. Comportamiento dinámico de un casquete esférico

En este problema se evalúa el comportamiento dinámico transitorio de un casquete esférico bajo carga de presión uniforme como se observa en la figura 4-a. La geometría del casquete está definida por un radio de 22,27 in y tiene un espesor de 0,41 in. Este ejemplo es un problema dominado por la flexión, y suele ser entonces usado como caso de prueba para elementos sólidos bidimensionales. En este problema axilsimétrico, el material tiene las siguientes propiedades: módulo de Young $E = 10,5 \times 10^6$ psi, relación de Poisson $\nu = 0,3$, una densidad $\rho = 2,45 \times 10^{-4}$ lib-seg/in⁴; y se supone endurecimiento isótropo con una tensión de fluencia $\sigma_y = 240$ kpsi y un módulo de endurecimiento $A' = 0,21 \times 10^6$ psi. Este casquete esférico está sometido a una carga de presión de 600 psi en función del tiempo (la carga es del tipo escalón). La geometría se discretizó con 80 (20x2x2) elementos triángulo como se observa en la figura 4-a.

La figura 4-b, muestra los desplazamientos del punto medio del casquete esférico A (ver figura 4-a) en función del tiempo para distintos elementos. En la gráfica de la figura 4-b, se han comparado las respuestas de cuatro elementos: un elemento cuadrilátero en deformaciones mejoradas *CAX4R* y un elemento de lámina axilsimétrico de dos nodos *SAXI* (ambos pertenecientes a la Referencia¹²), un elemento cuadrilátero de presión constante *Q1P0* y el *TR2D* con la aproximación que se define en este trabajo. En principio puede verse que el elemento cuadrilátero con aproximación constante de la presión no puede manejar el problema de flexión, por otro lado el elemento cuadrilátero en deformaciones mejoradas tiene una mejor precisión, pero no es suficiente. Las respuestas de los elementos *TR2D* y *SAXI* son bastante próximas, más aun ambos muestran buena concordancia con otros trabajos en la literatura donde se ha resuelto este problema.

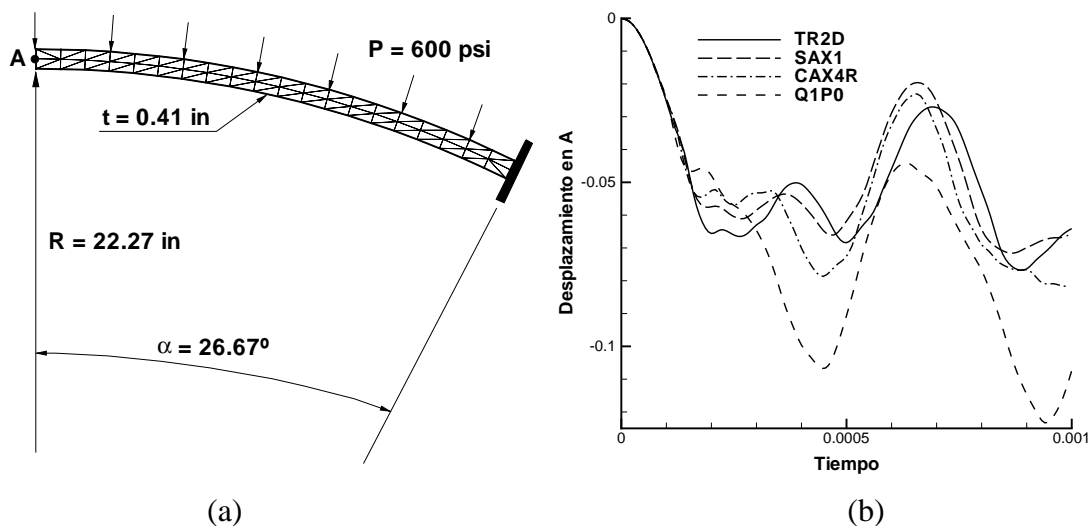


Figura 4: Comportamiento dinámico transitorio de un casquete esférico. (a) Geometría. (b) Desplazamiento en función del tiempo en el punto A.

5.2. Embutición de una lámina circular con un punzón hemi-esférico

Este problema axilsimétrico presenta deformaciones plásticas moderadas. Ha sido propuesto en la Referencia¹³ y empleado como *benchmark* para probar el comportamiento de elementos bidimensionales. La geometría se muestra en la figura 5-a. El espesor de la lámina es de 1 mm y el material está definido por las constantes elásticas $E = 69,004$ GPa y el módulo de Poisson $\nu = 0,3$, además de un modelo de plasticidad J_2 con una ley de endurecimiento $\sigma_y = 0,589 (10^{-4} + e^p)^{0,216}$ GPa. El contacto entre las herramientas y la lámina se modela usando penalización, y el coeficiente de fricción adoptado es $\mu = 0,3$. Se empleó una malla estructurada, con 28 elementos en la dirección r y 3 elementos en el espesor, con un total de 168 (28x3x2) elementos triangulares.

La curva de carga en función desplazamiento del punzón se ha graficado en la figura 5-b, esta curva está de acuerdo con la mayoría de simulaciones donde se usan elementos sólidos. Y algo interesante para destacar es la capacidad del elemento en el trato de las distorsiones por corte debido a los pequeños radios de la matriz y el contacto con fricción con las herramientas. Las figuras 6-a y 6-b muestran el cambio de la relación de espesor y la deformación plástica efectiva para distintas posiciones en la carrera del punzón, respectivamente. Estas curvas corresponden a valores tomados en la superficie media de la lámina. Estos resultados concuerdan muy bien con otros publicados para este problema, por ejemplo en la Referencia.⁶

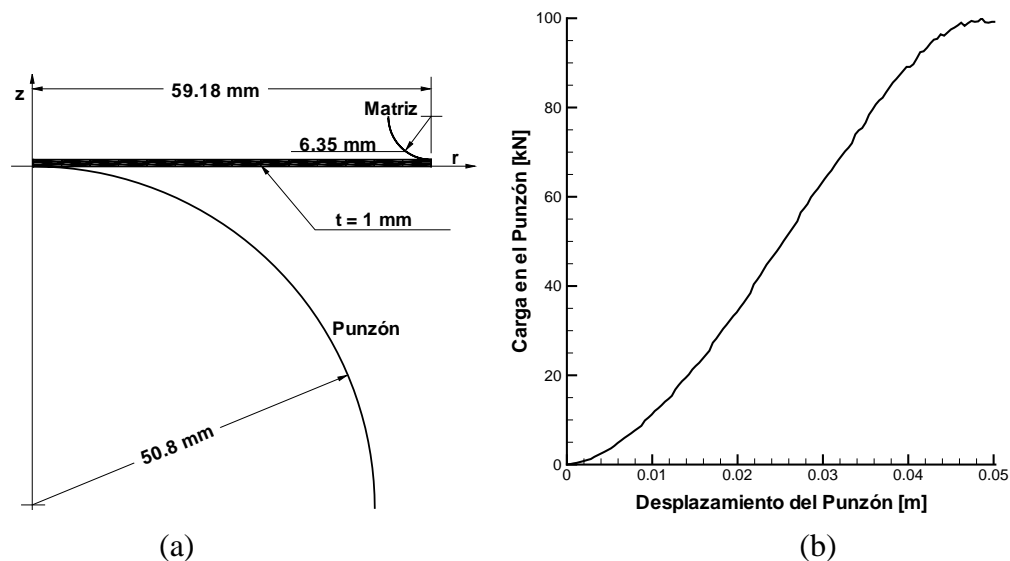


Figura 5: Embutición de una lámina circular con un punzón hemi-esférico. (a) Geometría. (b) Curva de carga vs desplazamiento del punzón.

5.3. Impacto de una barra cilíndrica

Este ejemplo axilsimétrico simula el impacto a una elevada velocidad de un barra de cobre sobre una pared rígida y se utiliza para determinar el comportamiento del elemento, suele de-

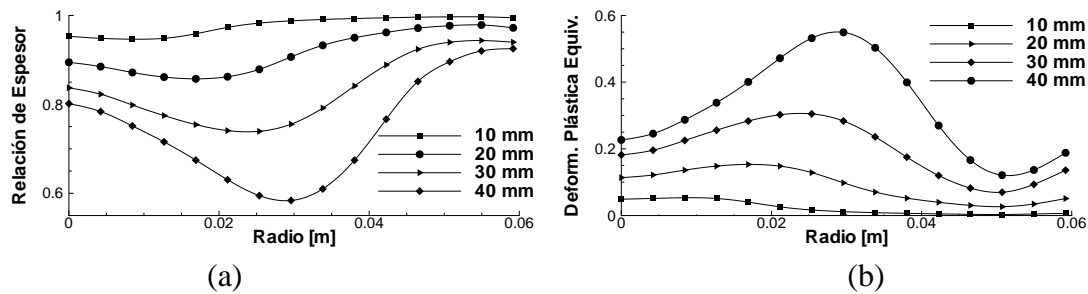


Figura 6: Embutición de una lámina circular con un punzón hemi-esférico. (a) Relación de espesor vs. radio para distintas posiciones del punzón. (b) Deformación plástica equivalente vs. radio para distintas posiciones del punzón.

nominarsse experimento de la barra de Taylor. Este problema puede encasillarse dentro de los problemas con grandes deformaciones, pues se generan deformaciones plásticas de importancia en el extremo que impacta la pared. El problema consiste en una barra de 32,4 mm de longitud y radio de 3,2 mm, que impacta una pared rígida con una velocidad inicial de $v_0 = 227$ m/s. La barra es de cobre, con un módulo de Young de $E = 110$ GPa, una relación de Poisson de $\nu = 0,3$ y tiene una densidad de $\rho = 8970$ Kg/m³. Para definir el comportamiento del material se usó un modelo de von Mises elástico perfectamente plástico, con una tensión de fluencia de $\sigma_y = 314$ MPa. La geometría discretizada se muestra en la figura 7-a, se utilizaron 432 (6x36x2) elementos triangulares. Esta cantidad de elementos es acorde a los problemas de deformaciones finitas en sólidos, además la distorsión que presenta la geometría deformada final en la figura 7-b justifica la densidad de la discretización.

En la figura 7-c se muestra una gráfica del resultado obtenido con esta aproximación (*TR2D*) en la evolución en el desplazamiento del vértice del extremo que se deforma por el impacto (punto A en la figura 7-b). Esta gráfica se compara con los resultados obtenidos en la Referencia,¹² utilizando un elemento cuadrilátero en deformaciones mejoradas (*CAX4R*) y un elemento triangular cuadrático (*CAX6M*). Los resultados tienen una excelente concordancia, aun cuando la figura 7-b muestra un excesiva deformación de los elementos en extremo de impacto.

La tabla 1 también muestra una comparativa de algunos resultados finales de esta aproximación, frente a los resultados obtenidos en otros trabajos u otros códigos. La comparativa muestra que la concordancia con los demás resultados es importante.

Tabla 1: Comparativa de los resultados de esta aproximación (*) respecto de otros trabajos.

Código	Radio Final	Longitud Final	Max(ϵ^P)
Garino 2D Ref. ⁶	7.11	21.47	3.09
NIKE2D	7.07	21.47	2.97
DYNA2D	7.13	21.47	3.05
<i>TR2D</i> *	7.05	21.53	3.10
MARC	7.12	21.43	3.13

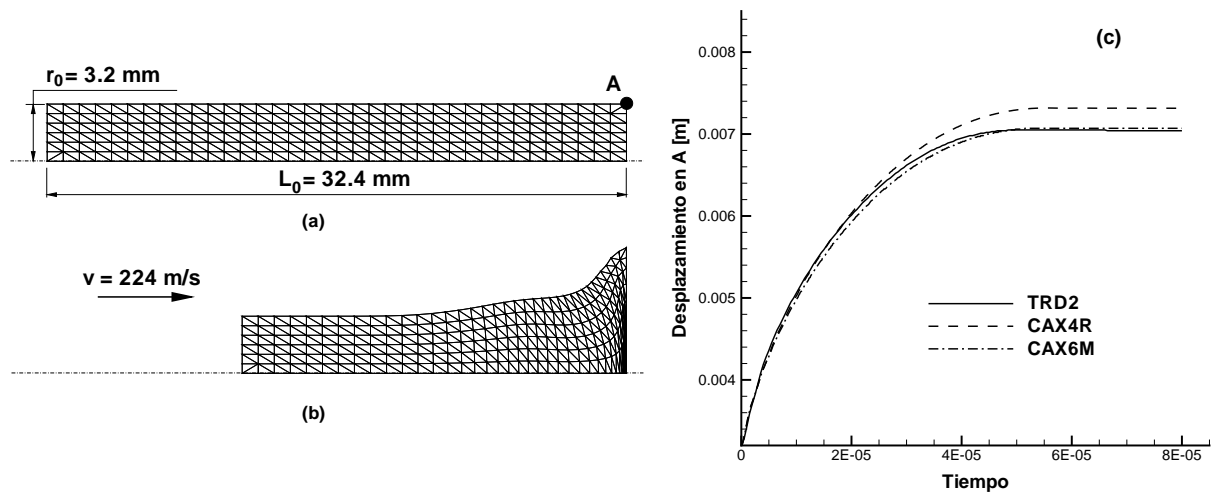


Figura 7: Impacto de una barra cilíndrica. (a) Malla original (b) Deformada. (c) Desplazamiento del punto A durante el proceso de deformación.

5.4. Impacto de una barra cilíndrica con remallado

Los datos del problema son los mismos que se detallaron en el apartado anterior. Las etapas de remallado realizadas para evitar la elevada distorsión en la malla son tres, y la cantidad de elementos en cada etapa de remallado se encuentra en el orden de los 800 elementos triángulo. La geometría y la malla original son las mismas que se observan en la figura 7-a, por otro lado la geometría final después del impacto y la malla correspondiente a ese estado se muestran en la figura 8. En esta misma figura 8 se presentan los resultados obtenidos con esta aproximación.

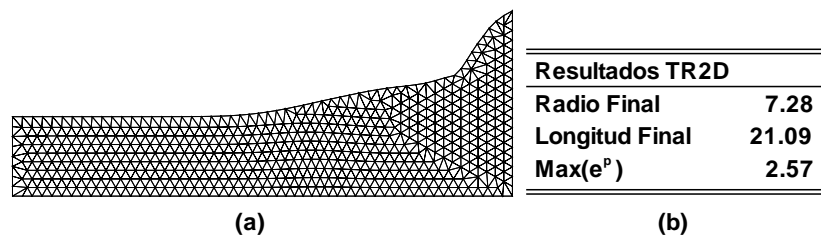


Figura 8: Impacto de una barra cilíndrica con remallado. (a) Geometría deformada. (b) Resultados finales con remallado.

En primera instancia puede notarse el aspecto más regular de los elementos, a diferencia del caso anterior donde los elementos se deformaban excesivamente. Por otro lado los resultados geométricos, como longitud y radio final, cambian muy poco respecto de los obtenidos y mostrados en la tabla 1. Sin embargo puede observarse que la máxima deformación plástica efectiva disminuye susceptiblemente con el remallado, este efecto está asociado al esquema de transferencia utilizado en donde las operaciones realizadas producen un suavizado de los gradientes

en las variables y como consecuencia una pérdida importante en las magnitudes transferidas.

5.5. Acortamiento de un tocho cilíndrico

Este problema, introducido en la Referencia,¹⁴ consiste en la compresión de un tocho cilíndrico para reducir su longitud hasta un 40 % de la longitud original. Por sus características este problema se enmarca en el campo de las grandes deformaciones elasto-plásticas, y además los elementos de la malla sufren una importante distorsión. Algunos códigos como el de la Referencia,¹² aplican estrategias de rezoñificación de nodos a fin de suavizar la distorsión de la malla. El problema comprende un pequeño tocho cilíndrico, de 30 mm de longitud y con un radio de 10 mm, el cual se encuentra entre dos placas rígidas y se supone a estas superficies como perfectamente rugosas. El modelo de material usado está definido por un módulo de Young $E = 200$ GPa, una relación de Poisson $\nu = 0,3$ y una densidad de $\rho = 7833$ kg/m³. Se asume un endurecimiento isótropo, con una tensión de fluencia $\sigma_y = 700$ MPa y un módulo de endurecimiento $A' = 0,3$ GPa. La geometría se ha discretizado con un malla estructurada de 288 (12x12x2) elementos triangulares de tres nodos, figura 9-a. Se han aplicado dos etapas de remallado a fin de mejorar la simulación, estos remallados involucran alrededor de 400 elementos triángulo en cada etapa como se observa en la figura 9-b.

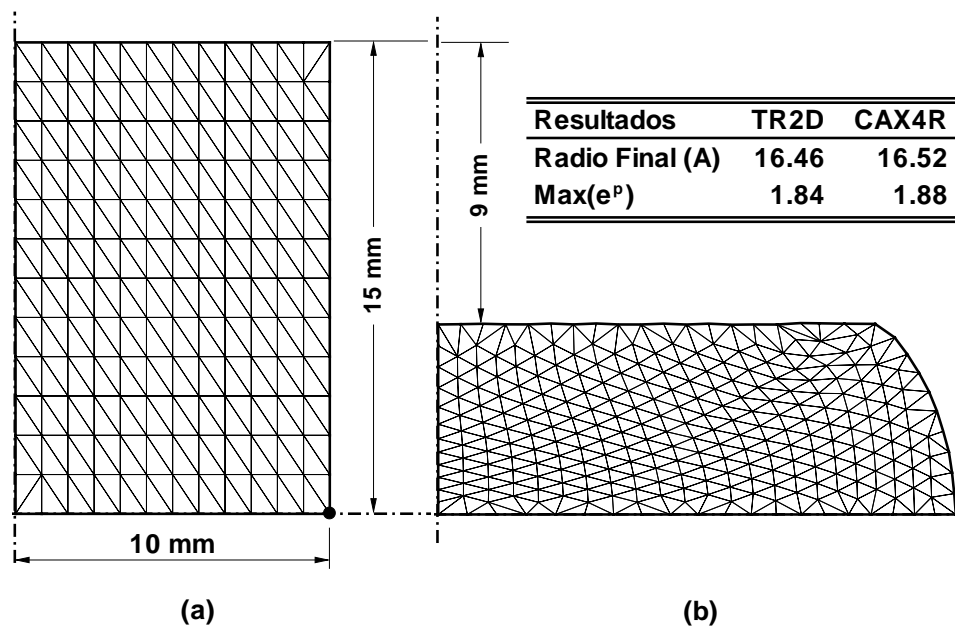


Figura 9: Acortamiento de un tocho cilíndrico con remallado. (a) Geometría original. (b) Geometría deformada un 60 % de su longitud inicial.

La figura 9 muestra que el cambio de geometría es muy marcado, también en esta figura se ha tabulado los resultados obtenidos con dos elementos: el cuadrilátero en deformaciones mejoradas *CAX4R* de la Referencia¹² con rezoñificación de nodos y el elemento *TR2D* con la

aproximación que se introduce en este trabajo más remallado. Cabe destacar las similitudes de los resultados.

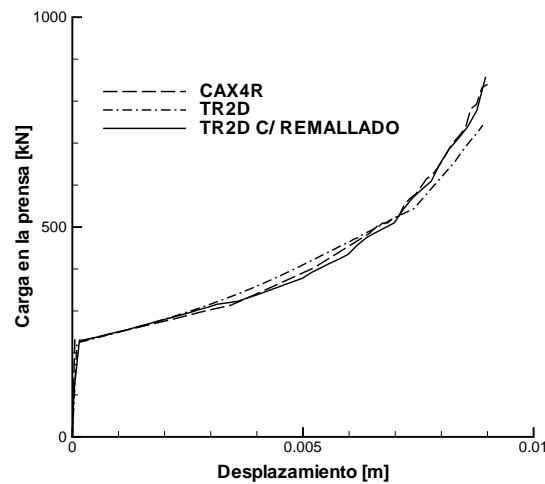


Figura 10: Acortamiento de un tocho cilíndrico. Gráfica comparativa de Carga vs Desplazamiento de la prensa.

Además de los resultados presentados, la figura 10 muestra las curvas de carga vs desplazamiento de la prensa para los elementos: *CAX4R*, y *TR2D* sin remallar y con remallado. Según se observa en esta figura, las curvas de los tres elementos muestran las mismas tendencias y niveles de carga para producir la deformación del tocho. Sin embargo la curva del elemento *TR2D* sin remallar muestra un nivel de carga final mucho más bajo y esto se debe a la elevada distorsión de la malla.

5.6. Acortamiento de tubos circulares

Este problema ha sido planteado por en el trabajo de Gupta *et al.*,¹⁵ y donde se trata el análisis de la deformación de tubos metálicos en compresión. Estos tubos metálicos suelen utilizarse como dispositivos de absorción de energía, y los modos de colapso están asociados a la relación diámetro-espesor (D/h). En la Referencia¹⁵ se analiza un tubo de diámetro 25 mm con un espesor de 4,01 mm, de modo que se tiene una relación (D/h) = 6,25 por lo que se espera que el modo de colapso sea en múltiples embarrilamientos (multiple barrelling). Se supone al tubo circular entre dos platos de una prensa y estos se modelan como cuerpo rígido. Se adoptan como coeficientes de fricción: en el plato superior $\alpha_s = 0,45$ y en el plato inferior $\alpha_i = 0,15$. El material con que está construido el tubo es aluminio y está definido por un módulo de Young $E = 69$ GPa, una relación de Poisson $\nu = 0,33$ y una densidad $\rho = 2783$ kg/m³; además se adopta una ley de endurecimiento isótropa lineal con una tensión de fluencia de $\sigma_y = 240$ MPa y un módulo de endurecimiento $A' = 290$ Mpa. La geometría original del tubo se discretizó con 400 (4x50x2) elementos triangulares y se necesitaron ocho etapas de remallado con 600 elementos en promedio por cada etapa.

La figura 11 muestra las deformadas para distintas posiciones de avance de la prensa. Estas

deformadas son acordes a las geometrías obtenidas por Gupta *et al.*¹⁵ en su trabajo. Más aun en la tabla 2 se presenta los valores finales de la tensión equivalente de von Mises σ_e y la deformación plástica efectiva e^p obtenidas con esta aproximación, y se los compara con los resultados finales de la Referencia.¹⁵ La comparación muestra un importante similitud entre los resultados de ambos trabajos. Por último la figura 12 muestra la curva de carga vs. desplazamiento de la prensa. Se han graficado tres curvas: la curva que arroja la simulación con el elemento TR2D de este trabajo, la curva que se obtiene de la simulación numérica en la Referencia¹⁵ y una curva experimental propuesta en Ref.¹⁵ para validar los resultados. Se observa que las tres curvas muestran la misma tendencia y solo se alejan levemente de los resultados obtenidos a través del método experimental.

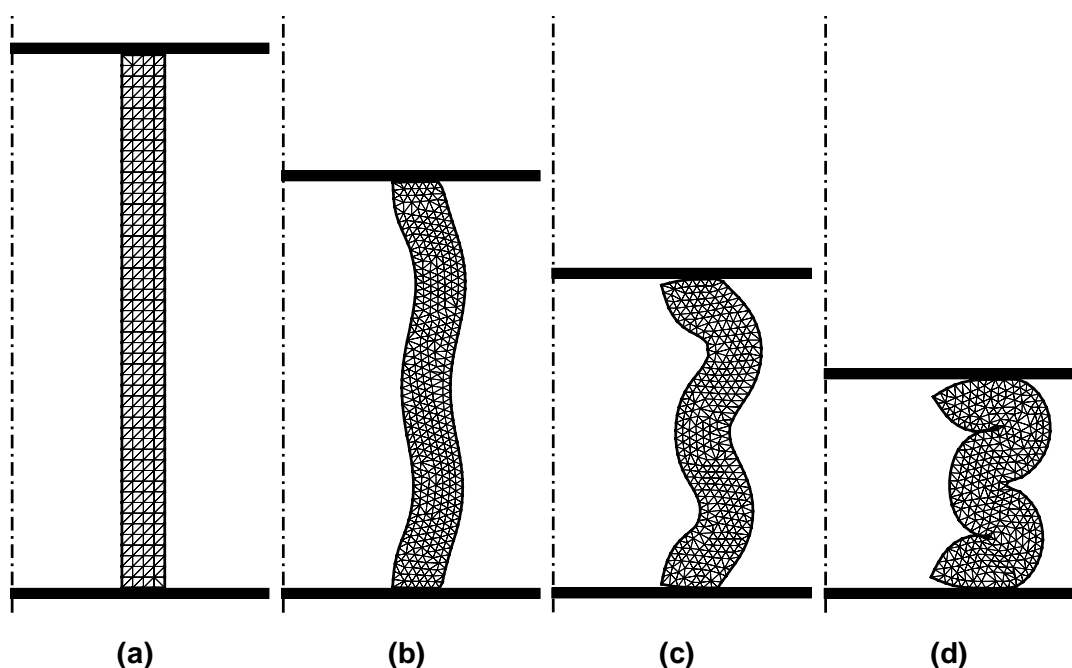


Figura 11: Colapso en múltiples embarrilamientos de un tubo metálico en compresión. Geometrías deformadas para: (a) 0.00, (b) 12.44, (c) 21.77 y (d) 30.00 mm de desplazamiento de la prensa.

Tabla 2: Comparativa de los resultados de esta aproximación (*) respecto de las obtenidas por Gupta.¹⁵

Resultado	Max(σ_e)	Max(e^p)
Gupta Ref. ¹⁵	843.60 MPa	2.30
TR2D *	844.00 MPa	2.16

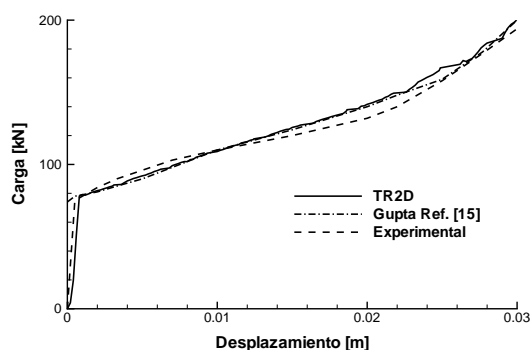


Figura 12: Acortamiento de un tubo circular, curva de carga vs. desplazamiento de la prensa.

6. CONCLUSIONES

Se ha presentado un elemento finito triangular para el análisis de sólidos bidimensionales en grandes deformaciones, donde la geometría queda definida simplemente por tres nodos con solo grados de libertad de desplazamiento. De esta manera el elemento resulta eficaz para ser implementado en códigos con integración explícita de las ecuaciones de balance, e inclusive resulta ventajoso en problemas que introducen contacto y remallado adaptativo. La aproximación del gradiente elemental en deformaciones impuestas resulta del promedio de los gradientes evaluados a la mitad de cada lado del triángulo, donde se considera además el aporte del triángulo adyacente al lado que se evalúa.

En el caso de problemas con flexión dominante el elemento muestra un comportamiento similar al de un elemento triangular de deformación lineal. Más aun los casos en que se ha probado el comportamiento frente a la flexión utilizan discretizaciones pobres, con lo cual podemos predecir que en problemas habituales donde la discretización es masiva el elemento se comportará mejor.

En el área de las deformaciones finitas en el rango plástico moderado el elemento muestra un comportamiento muy bueno, inclusive si se lo compara con elementos en deformaciones mejoradas. También cuando se consideran grandes deformaciones elasto-plásticas, el elemento tiene un buen comportamiento, aun cuando la distorsión de la malla es excesiva. Si además se considera la opción del remallado adaptativo, este elemento permite simular casos muy complejos con cambios importantes en la geometría dando resultados con una precisión excelente. Además como se muestra en este trabajo, el remallado adaptativo propuesto no adiciona una cantidad de elementos sustancial comparado con la discretización de la geometría original. Estos aspectos, una discretización relativamente pequeña y el hecho de tener un elemento triangular, hacen que esta aproximación sea fácilmente aplicable a los problemas industriales de conformado plástico y sin la necesidad de contar con ordenadores muy potentes. Hay que considerar además que el uso del remallado ha permitido analizar el comportamiento del elemento en mallas no estructuradas, y a luz de los resultados podemos decir que se desenvuelve muy bien.

Quedan por estudiar algunas mejoras relacionadas con el esquema de transferencia con el objetivo de disminuir la pérdida de información en el proceso de transpaso de variables. Actual-

mente se está trabajando en la implementación de un esquema basado en el *super-convergent patch recovery* propuesto por Zienkiewicz *et al.*¹⁶ Además en el caso de distorsiones altamente excesivas de la malla, como es el caso de los problemas de impacto a grandes velocidades, parece necesario incluir alguna estrategia de refinamiento adaptativo para poder captar los picos en las variables durante el remallado.

AGRADECIMIENTOS

Los autores desean agradecer el apoyo financiero de CONICET (Argentina) y del Dpto de Estructuras de Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de la U.N.C. La utilización del programa Stampack ha sido posible gracias al apoyo de la empresa Quantech ATZ.

REFERENCIAS

- [1] J.C. Simo y M.S. Rifai. "A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes". *Int. J. Num. Meths. in Engng*, vol. 29, pp 1595-1638, 1990.
- [2] J.M.A. César de Sá, y R.M. Natal Jorge. "New enhanced strain element incompressible problems". *Int. J. Num. Meths. in Engng*, vol. 44, pp 229-248, 1999.
- [3] F. Armero. "On the locking and stability of finite elements in finite deformation plane strain problems". *Computers & Structures*, vol. 75, pp 261-290, 2000.
- [4] F.G. Flores, "A two-dimensional linear assumed strain triangular element for finite deformation analysis". *ASME Journal of Applied Mechanics*, aceptado para publicación.
- [5] A.L. Eterovic y K.J. Bathe. "A hyperelastic-based large strain elasto-plastic constitutive formulation with combined isotropic-kinematic hardening using logarithmic stress and strain measures", *Int. J. Num. Meths. in Engng*, vol. 30, pp 1099-1115, 1990.
- [6] C.G. García Garino. *Un modelo numérico para el análisis de sólidos elasto-plásticos sometidos a grandes deformaciones*, Tesis Doctoral, UPC, Barcelona, 1993.
- [7] A. S. Khan y P. Cheng. "An anisotropic elastic-plastic constitutive model for single and polycrystalline metals I". *Int. Journal of Plasticity*, vol. 12, pp 147-162, 1996.
- [8] A. S. Khan y P. Cheng. "An anisotropic elastic-plastic constitutive model for single and polycrystalline metals II". *Int. Journal of Plasticity*, vol. 14, 209-226, 1998.
- [9] M.A. Crisfield. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures: Advanced Topics (Vol. 2)*, Jhon Wiley & Sons Ltd, 1997.
- [10] STAMPACK. version 6.0.0 *A General Finite Element System for Sheet Stamping and Forming Problems*, Quantech ATZ, Barcelona, España, (www.quantech.es), 2004.
- [11] C.-S. Han y P. Wriggers. "An *h*-adaptive method for elasto-plastic shell problems". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 189, 651-671, 2000.
- [12] Hibbit, Karlson and Sorensen Inc., *ABAQUS, version 6.4.2 (student edition)*, Pawtucket, EE.UU., 2003.
- [13] J.K. Lee, R.H. Wagoner y E. Nakamachi. *A benchmark test for sheet metal forming*. Technical Report, Ohio State University, 1990.
- [14] L.M. Taylor y E.B. Becker. "Some computational aspects of large deformation rate depen-

dent plasticity problems". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol 41, 251-278, 1983.

- [15] P.K. Gupta y N.K. Gupta. "Multiple barrelling in axial compression of cylindrical tubes". *Latin American J. of Solids and Structures*, vol. 2, pp 195-217, 2005.
- [16] O.C. Zienkiewicz y J.Z. Zhu, "The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. Part 1. The recovery technique", *Int. J. Num. Meth. Engng*, vol. 33, 1331-1364 (1992).