

ANÁLISIS DE UNICIDAD Y ESTABILIDAD DE LA RESPUESTA HOMOGÉNEA DE UNA BARRA DE HORMIGÓN MODELADA CON UN MODELO GRADIENTE DE DAÑO

Mariela Luege^a

^aCONICET. Instituto de Estructuras, Universidad Nacional de Tucumán. Avenida Independencia
1800, 4000 San Miguel de Tucumán, Argentina, iest@herrera.unt.edu.ar

Palabras Clave: Modelo gradiente de daño, formulación energética, análisis de estabilidad y unicidad, material hormigón

Resumen. En este trabajo se presenta el análisis de estabilidad para el problema de evolución de una barra de hormigón modelada con un modelo gradiente de daño. La particularidad del material interviene en el tipo de criterio usado en el modelo. El aspecto novedoso de este análisis está en que el problema de evolución se obtiene aplicando la formulación energética. En esta formulación, que no contiene derivadas con respecto al tiempo, la evolución del material está caracterizada por tres requisitos energéticos: un balance de energía, una desigualdad de disipación y un criterio global de estabilidad. Una de las ventajas de dicha formulación es que permite dar un significado claro a los conceptos de bifurcación y estabilidad para ambos, estructura y material. Aplicado al ensayo a tracción de una barra sujeta a una carga monótona, se considera la respuesta homogénea donde ambos campos de deformación y daño son uniformes en el espacio. En presencia de ablandamiento, se muestra que el estado homogéneo de la barra es estable, siempre y cuando la longitud de la barra sea menor que un valor crítico que depende del estado actual del sistema, de lo contrario es inestable. Sin embargo, también se muestra que la bifurcación puede aparecer para un estado homogéneo estable. Todos estos resultados se obtienen analíticamente y se ilustran con ejemplos.

1. INTRODUCCIÓN

Hay dos aspectos importantes a tener en cuenta en el comportamiento constitutivo del hormigón. Por un lado la introducción de una longitud característica que permita tener en cuenta el efecto escala en el material, este hecho ha sido verificado en una gran cantidad de resultados experimentales (Bazant, 1976). Por otro lado, debido al ablandamiento en este material, el problema de valores al contorno resulta mal puesto y los resultados numéricos verifican una energía disipada fuertemente dependiente del tamaño de la malla. En este trabajo se incluye dicha longitud característica a través de la introducción de un parámetro c , que permite describir la falla del material por localización, penalizando las deformaciones demasiado localizadas (Frémond y Nedjar (1996); Lorentz y Godard (2011); Marigo (2014)). La regularización del modelo se realiza mediante la utilización de un modelo gradiente de daño y la idea es analizar estos aspectos para el caso de una barra sujeta a tracción, siguiendo los trabajos de (Pham, 2010; Pham et al., 2010). Se llevará a cabo tanto un análisis de bifurcación, para el cual la obtención de infinitas soluciones implica que el problema es mal puesto, como un análisis de estabilidad mediante el cual es posible seleccionar, entre todas las posibles soluciones los caminos estables, aquel que constituirá la solución final del problema. El estudio de la estabilidad de los estados homogéneos permite luego evidenciar los efectos escala sobre los resultados de estabilidad. Todo ello se realiza en el contexto de aproximaciones variacionales globales.

Teniendo como objetivo el de analizar la estabilidad de estados homogéneos utilizando distintas funciones de rigidez, en el presente trabajo se propone analizar el problema de evolución del modelo gradiente de daño aplicando la formulación energética (Mielke et al., 2010). Dicha aproximación será utilizada en particular, para llevar a cabo un análisis general sobre el procedimiento de regularización mediante el estudio de las condiciones bajo las cuales los problemas de minimización resultan bien puestos. La formulación ha sido desarrollada para comportamientos independientes de la velocidad, siguiendo la propuesta de Mielke et al. (2002); Mielke (2005); Mielke y Roubicek (2015) y Marigo (2014), para la cual resulta necesario definir: las variables de estado del modelo, la energía total, que incluye la energía potencial y la energía disipada, y finalmente obtener el problema de evolución en base a tres principios fundamentales: el balance de energía, la condición de estabilidad y la irreversibilidad de la variable de daño. En dicha formulación se requiere que en cada instante de tiempo la energía alcance su mínimo, permitiendo así manejar evoluciones discontinuas en el tiempo. Dentro de las ventajas de esta aproximación variacional, pueden mencionarse que establece de manera unificada el análisis de la existencia, unicidad y estabilidad de soluciones cuasi-estáticas y su tratamiento numérico. El criterio no local de daño y las condiciones de borde en daño naturales se deducen de la formulación variacional directamente, las condiciones de Kuhn–Tucker se derivan de la condición de estabilidad de primer orden y del balance de energía, mientras que los resultados de estabilidad y bifurcación, principal objeto de análisis del presente trabajo, derivan de las condiciones de estabilidad de segundo orden y algunas propiedades de la derivada segunda de la energía potencial.

Este trabajo está organizado como sigue: en la Sección 2 se presenta el modelo gradiente de daño, en la Sección 3 se formula el problema de evolución en términos de los tres principios físicos de irreversibilidad, estabilidad y balance de energía. La formulación se escribe para el caso uniaxial solamente. En la Sección 4 se deducen las condiciones suficientes de estabilidad y no bifurcación que surgen de la derivada segunda de la energía potencial. En Sección 5, se analiza la estabilidad y bifurcación de la respuesta homogénea de una barra de hormigón sujeta a tracción, usando distintas funciones de rigidez mientras Sección 6 concluye el trabajo con algunas observaciones.

2. FORMULACIÓN UNIDIMENSIONAL DE UN MODELO GRADIENTE DE DAÑO

En esta primera sección se introduce el modelo gradiente de daño en el marco de los procesos independientes de la velocidad siguiendo la propuesta de (Frémond y Nedjar, 1996; Frémond, 2002), para luego desarrollar la formulación variacional del problema resultante de valores iniciales al contorno basándose en la formulación propuesta por (Mielke et al., 2002; Mielke, 2005; Mielke et al., 2010; Mielke y Roubicek, 2015). Todos estos desarrollos se realizan en el marco uniaxial.

Sea $(0, L)$ la configuración de referencia de una barra homogénea, compuesta de material elástico dañable, cuyo comportamiento se define como sigue:

1. La variable de daño es un escalar que crece de 0 a 1, $\beta = 0$ denota el estado del material no dañado, y $\beta = 1$ el estado completamente dañado.
2. El estado del elemento unidimensional está caracterizado por la terna $(u'(x), \beta(x), \beta'(x))$, donde $u'(x) = \partial u / \partial x$ es una deformación pequeña, β es la variable de daño y $\beta'(x) = d\beta/dx$ el gradiente de daño.
3. El comportamiento del material en cada punto x está caracterizado por:

(i) La función de estado $\psi(u'(x), \beta(x), \beta'(x))$

$$\psi(u', \beta, \beta') = \frac{1}{2}E(\beta)u'^2 + \frac{c}{2}\beta'^2 \quad (2.1)$$

la cual es independiente del camino seguido para alcanzar (u', β, β') y no-local debido a la dependencia con el gradiente de daño. Tal dependencia tiene como objetivo el de limitar la concentración del daño y es controlada a través del parámetro $c > 0$. En la modelación de la influencia del daño sobre el comportamiento macroscópico del material, la rigidez del material se asume descrita a través de una función $E(\beta)$ decreciente con la variable β . La expresión clásica para $E(\beta)$ es la propuesta por Kachanov (1958) $E(\beta) = (1 - \beta)E_0$. En el presente análisis se tendrán en cuenta otras funciones. Se precisa que la condición de admisibilidad de la variable β no se incluye en (2.1) a través la función indicador del intervalo $[0, 1]$, sino que se tiene en cuenta de manera explícita precisando dicho intervalo de admisibilidad cada vez.

(ii) El potencial de disipación $\phi(\dot{\beta})$

$$\phi(\dot{\beta}) = k\dot{\beta} + I_{\mathcal{R}^+}(\dot{\beta}), \quad (2.2)$$

dependiente sólo de la variable $\dot{\beta}$ y tal de ser creciente, positiva y homogénea de grado 1 en la variable $\dot{\beta}$. En (2.2) $k > 0$ es un parámetro escalar que determina la cantidad de energía disipada cuando β aumenta de 0 a 1 y constituye un umbral a partir del cual el daño evoluciona, como se verá más adelante. La función indicador $I_{\mathcal{R}^+}$ ($I_{\mathcal{R}^+} = 0$ si $\dot{\beta} \geq 0$, $I_{\mathcal{R}^+} = +\infty$ si $\dot{\beta} < 0$) modela la condición de irreversibilidad de daño, es decir que el material no puede 'curarse'.

4. Las variables duales asociadas con las variables de estado son respectivamente la tensión σ y las fuerzas termodinámicas V y H . Como parte de las asunciones del modelo,

se supone que

$$\sigma = \sigma^d + \sigma^{nd}, \quad V = V^d + V^{nd} \quad \text{y} \quad H = H^d + H^{nd}, \quad (2.3)$$

donde las fuerzas interiores nodisipativas (Fremond, 2002) están dadas por

$$\begin{aligned} \sigma^{nd} &= \frac{\partial \psi}{\partial u'}(u', \beta, \beta') = E(\beta)u' \\ V^{nd} &= \frac{\partial \psi}{\partial \beta}(u', \beta, \beta') = \frac{1}{2}E'(\beta)u'^2 \\ H^{nd} &= \frac{\partial \psi}{\partial \beta'}(u', \beta, \beta') = c\beta' \end{aligned} \quad (2.4)$$

mientras que para las fuerzas disipativas se asume

$$\sigma^d = 0, \quad V^d \in \partial\phi(\dot{\beta}) = k + \partial I_{\mathbb{R}^+}(\dot{\beta}) \quad \text{y} \quad H^d = 0, \quad (2.5)$$

donde $\partial\phi$ denota el subdiferencial de la función convexa ϕ definido por

$$\partial\phi(\dot{\beta}) = \{V^d \in R : \forall \bar{z} \in R : \phi(\dot{\beta}) + (\bar{z} - \dot{\beta})V^d \leq \phi(\bar{z})\} \quad (2.6)$$

Las relaciones constitutivas satisfacen la desigualdad de Clausius–Duhem, que toma la forma $V^d \dot{\beta} \geq 0$.

Considerando el caso de evolución cuasi estática y siguiendo el método de potencias virtuales, se asume como en Frémond y Nedjar (1996) que el daño se produce por movimientos microscópicos de rotura de las uniones entre partículas. Estos movimientos están descriptos mediante las variables $\dot{\beta} = d\beta/dt$ y $\dot{\beta}' = d(\partial\beta/\partial t)/dx$. Por lo tanto, en la potencia de fuerzas internas se tiene en cuenta también la potencia de estos movimientos y la potencia virtual de fuerzas internas está representada por la forma lineal

$$\mathcal{P}_i(u, \beta) = \int_0^L (\sigma \dot{\epsilon} + V \dot{\beta} + H \dot{\beta}') dx, \quad (2.7)$$

mientras la potencia virtual de fuerzas externas está representada por la siguiente forma lineal

$$\mathcal{P}_e(u) = [tu]_0^L + \int_0^L f u dx \quad (2.8)$$

donde f denota las fuerzas volumétricas y t las fuerzas de borde en $x = 0$ y $x = L$.

Denominando \mathcal{U}_t al espacio de desplazamientos admisibles, \mathcal{U}^0 al espacio de desplazamientos admisibles lineal asociado a \mathcal{U}_t y \mathcal{D} el espacio lineal del campo de daño admisible, definidos como

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_t &= \{v \in H^1(0, L) : v(0) = 0, v(L) = w_t\} \\ \mathcal{U}^0 &= H_0^1 = \{v \in H^1(0, L) : v(0) = v(L) = 0\} \\ \mathcal{D} &= \{\beta \in H^1(0, L) : 0 \leq \beta \leq 1\}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

el método de potencias virtuales establece que, para todo campo de desplazamientos $u \in \mathcal{U}^0$ y de daño $\beta \in \mathcal{D}$ admisibles, debe verificarse

$$\mathcal{P}_e(u) = \mathcal{P}_i(u, \beta). \quad (2.10)$$

En el caso estudiado en este trabajo, no se consideran cargas volumétricas ni de contorno, sino sólo condiciones de borde de Dirichlet que varían en el tiempo. Aplicando ahora el teorema de Gauss-Green y el lema fundamental de cálculo de variaciones, se obtienen dos ecuaciones de campo dadas por las siguientes ecuaciones de balance de momento lineal con los correspondientes condiciones naturales

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \sigma &= 0 && \text{en } (0, L), \\ \sigma n &= 0 && \text{para } x = 0 \text{ y } x = L, \\ \operatorname{div} H - V &= 0 && \text{en } (0, L), \\ Hn &= 0 && \text{para } x = 0 \text{ y } x = L. \end{aligned} \quad (2.11)$$

De la definición (2.6) de $\partial\phi(0)$, se obtiene $0 = \phi(0) \leq \phi(\bar{z}) + V^d \bar{z}$, y usando la homogeneidad de ϕ , se deriva en forma seguida el concepto de solución energética. Con tal objetivo, y gracias a la convexidad de ψ se deriva la siguiente desigualdad (ver Mielke et al. (2010) para más detalles):

$$\int_0^L \psi(u', \beta, \beta') \leq \int_0^L \psi(u', \bar{\beta}, \bar{\beta}') + \int_0^L \phi(\bar{\beta} - \beta) dx \quad \forall \bar{\beta} \in \mathcal{D}_+ \quad (2.12)$$

con $\mathcal{D}_+ = \{\bar{\beta} \in H^1(0, L) : \bar{\beta} \geq 0\}$. Si β satisface (2.12) se dice que β es parcialmente estable en el instante t . Para que se verifique la estabilidad completa, es necesario que también las ecuaciones de balance de momento lineal (2.11) se cumplan. Introduciendo la energía potencial definida como

$$\Psi_t = \int_0^L \psi(u'_t, \beta_t, \beta'_t) dx \quad (2.13)$$

donde no aparece la potencia de las fuerzas externas debido a las asunciones iniciales, multiplicando (2.11)₁ y (2.11)₂, respectivamente por $\dot{\beta}$ y $\partial(u - w)/\partial t$, integrando en el intervalo de tiempo $[0, T]$, y aplicando integración por partes en el tiempo, se obtiene la siguiente expresión de balance de energía

$$\Psi_T(u_T, \beta_T) + \operatorname{Diss}(\beta; 0, T) \leq \Psi_0(u_0, \beta_0) + \int_0^T \int_0^L \sigma \dot{w}' dx dt \quad (2.14)$$

donde w es la extensión de $u(L) = w$ en toda la barra, y Diss se denomina distancia de disipación, dada por

$$\operatorname{Diss}(\beta; s, t) = \int_s^t \int_0^L \phi(\dot{\beta}(s)) ds dx = \begin{cases} k \int_0^L (\beta_t(x) - \beta_s(x)) dx & \dot{\beta} \geq 0 \\ +\infty & \dot{\beta} < 0. \end{cases} \quad (2.15)$$

La igualdad en el balance de energía (2.14) se obtiene cuando la condición de estabilidad completa se verifica. Ahora se está en condiciones de introducir la formulación energética.

3. FORMULACIÓN ENERGÉTICA UNIDIMENSIONAL

Se considera una barra fija en el extremo $x = 0$, y sujeta a un desplazamiento impuesto en el extremo $x = L$ de magnitud $w_t = t\epsilon_1 L$, siendo t el tiempo transcurrido desde el inicio de la aplicación del desplazamiento y $\epsilon_1 = f_{t0}/E_0$, con f_{t0} la resistencia uniaxial a tracción y E_0

el módulo de Young. Las condiciones de borde que los desplazamientos admisibles deben satisfacer en el instante t son

$$u_t(0) = 0, \quad u_t(L) = w_t, \quad t \geq 0. \quad (3.1)$$

Suponiendo la barra no está dañada en $t = 0$, $\beta_0 = 0$. El problema de evolución del desplazamiento y del daño en la barra se obtiene via la formulación variacional propuesta en Mielke et al. (2002); Mielke (2005); Mielke y Roubicek (2015); Marigo (2014) y utilizada también en Lorentz y Godard (2011).

El problema de evolución consiste en encontrar el campo de desplazamientos y daño $(u_t, \beta_t) \in \mathcal{U}_t \times \mathcal{D}$ que satisfagan en todo instante de tiempo t , las siguientes condiciones:

(IR) Condición de irreversibilidad: $\dot{\beta}_t \geq 0$. El daño es una función no decreciente de t , con $\beta_0 = 0$

(ST) Condición de estabilidad: el estado (u_t, β_t) tiene que ser estable direccionalmente, es decir verificar

$$\Psi_t(u_t, \beta_t) \leq \Psi_t(\bar{u}, \bar{\beta}) + \int_0^L \phi(\bar{\beta} - \beta_t) dx \quad \forall (\bar{u}, \bar{\beta}) \in \mathcal{U}_t \times \mathcal{D}_+ \quad (3.2)$$

(EB) Balance de energía: la energía potencial $\Psi_t(u_t, \beta_t)$ debe verificar el siguiente balance energético

$$\Psi_t(u_t, \beta_t) + \text{Diss}(\beta_t; 0, t) = \Psi_0(u_0, \beta_0) + \int_0^t \sigma_s(L) \dot{w}_s ds \quad (3.3)$$

donde u_0 es el campo de desplazamientos solución del problema elástico en $t = 0$ obtenido como $u_0 = \text{argmin}_{\bar{u}} \Psi_0(\bar{u}, \beta_0)$ mientras $\sigma_s = E(\beta_s)u'_s$ es el campo de tensión en $t = s$. Para más detalles de la formulación ver (Pham et al. (2010); Mielke et al. (2002); Mielke (2005); Mielke y Roubicek (2015); Bourdin et al. (2008); Luege et al. (2017)).

3.1. Aproximación incremental en el tiempo

La formulación energética (ST) y (EB) viene ahora aproximada como un problema incremental. Dado el intervalo de tiempo $[t_n, t_{n+1}]$, donde q_n son los valores de la variable q en t_n y q_{n+1} el valor en t_{n+1} , debido a la convexidad de los potenciales, se demuestra (Luege et al., 2017) que la evolución en el tiempo del sistema está gobernada por la minimización global de la energía total del sistema dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_t(u_t, \beta_t) &= \Psi_t(u_t, \beta_t) + \int_0^L \phi(\beta_t(x) - \beta_n(x)) dx \\ &= \int_0^L \left(\frac{1}{2} E(\beta(x)) u'(x)^2 + c \beta'(x)^2 + k(\beta(x) - \beta_n(x)) \right) dx \end{aligned} \quad (3.4)$$

donde la referencia explícita al estado inicial en el tiempo t_n se omite por simplicidad. Debido a la homogeneidad de ϕ la longitud del intervalo de tiempo desaparece.

3.2. Condición de estabilidad de primer orden

La condición de estabilidad de primer orden es una condición necesaria para la estabilidad (ST) de (u_t, β_t) solución del problema extremo (3.4). Dicha condición está dada por la no negatividad de la primera variación de la energía total \mathcal{E}_t para todas las variaciones admisibles de las variables de estado, como sigue

$$\mathcal{E}'_t(u_t, \beta_t)(v, \alpha) \geq 0 \quad \forall (v, \alpha) \in \mathcal{U}_t \times \mathcal{D} \quad (3.5)$$

donde $\mathcal{E}'_t(u_t, \beta_t)(v, \alpha)$ es la derivada de Gateaux de \mathcal{E}_t (3.4) evaluada en (u, β_t) en la dirección (v, α) dada por (Luege et al., 2017)

$$\mathcal{E}'_t(u, \beta)(v, \alpha) = \int_0^L E(\beta)u'v'dx + \int_0^L \left[\left(\frac{1}{2}E'(\beta)u'^2 + k \right) \alpha + \frac{c}{2}\beta'\alpha' \right] dx \quad (3.6)$$

Verificar la condición (3.5) es equivalente a verificar el equilibrio y el criterio no local de daño como se demuestra a continuación. Particularizando (3.5) para $\alpha = \dot{\beta}_t$ y $v = \dot{u}_t + w$, con $w \in \mathcal{U}^0$, se obtiene la ecuación variacional

$$\int_0^L E(\beta_t(x))u'(x)w'(x)dx = 0, \quad (3.7)$$

que expresa el equilibrio de la barra en forma variacional. De (3.7) se deriva que

$$\sigma'_t(x) = 0 \quad \forall x \in (0, L) \quad (3.8)$$

por lo tanto, la tensión a lo largo de la barra es constante. Despejando $u'_t(x)$ de $\sigma_t(x) = E(\beta)u'_t(x)$, integrando y aplicando las condiciones de borde en 0 y L , se obtiene

$$\sigma_t = \frac{w_t}{\int_0^L \frac{dx}{E(\beta_t(x))}} \quad (3.9)$$

Teniendo en cuenta la (3.7), ecuación (3.5) se reduce entonces a la desigualdad variacional

$$\int_0^L \left(\frac{1}{2}E'(\beta_t)u_t'^2 \alpha + \phi'(\beta_t) + c\beta_t'\alpha' \right) dx \geq 0 \quad (3.10)$$

válida para todo $\alpha \in \mathcal{D}$. Condición (3.10) gobierna la evolución del daño y se verifica como igualdad cuando $\alpha = \dot{\beta}_t$. Integrando por partes la (3.10) se obtienen por lo tanto las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_t &\geq 0 \\ \frac{1}{2}E'(\beta_t)u_t'^2 + \phi'(\beta_t) - c\beta_t'' &\geq 0 \\ \beta_t'(0) &\leq 0, \quad \beta_t'(L) \geq 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

3.3. Balance de energía

Suponiendo una evolución suave en el tiempo, de modo que \dot{u}_t y $\dot{\beta}_t$ pertenezcan a $H^1(0, L)$ y derivando (EB) con respecto a t , se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{E}'(u_t, \beta_t)(\dot{u}_t, \dot{\beta}_t) - \sigma_t \dot{w}_t \\ &= \int_0^L E(\beta) u_t' \dot{u}_t' dx - \sigma_t \dot{w}_t + \int_0^L \left[\left(\frac{1}{2} E'(\beta) u_t'^2 + k \right) \dot{\beta}_t + \frac{c}{2} \beta_t' \dot{\beta}_t' \right] dx \\ &= \int_0^L \left(\frac{1}{2} E'(\beta_t) u_t'^2 + \phi'(\beta_t) - c \beta_t'' \right) \dot{\beta}_t dx + \int_{\Omega} 2c(\beta_t' \dot{\beta}_t)' dx. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Luego, conjuntamente a (3.11), de (3.12) se obtienen las condiciones de consistencia del modelo gradiente de daño

$$\dot{\beta}_t \left(\frac{1}{2} E'(\beta_t) u_t'^2 + \phi'(\beta_t) - c \beta_t'' \right) = 0 \quad (3.13)$$

con $\dot{\beta}(0) \beta_t'(0) = 0$, $\dot{\beta}(L) \beta_t'(L) = 0$ y las condiciones de borde $\beta_t'(0) = 0$ y $\beta_t'(L) = 0$.

Mientras las ecuaciones de balance energético en forma fuerte se utilizan para el caso de evoluciones suaves en espacio y tiempo, el principio de balance energético (EB) da el marco para describir evoluciones discontinuas en el tiempo, como por ejemplo en el caso de materiales con ablandamiento que exhiben fenómenos de snap-back. Este es debido a que la energía total del cuerpo sigue siendo una función continua en el tiempo, aún cuando la evolución del daño no lo sea.

4. CONDICIÓN SUFICIENTE DE ESTABILIDAD Y DE NO-BIFURCACIÓN

Para el análisis de la estabilidad global (ST) de la solución del problema incremental (3.4), además de verificar la condición de estabilidad de primer orden (3.5), se requiere que la expansión asintótica de segundo orden de la energía total \mathcal{E}_t evaluada en (u_t, β_t) sea no negativa para cada dirección admisible $(v, \alpha) \in \mathcal{U}^0 \times \mathcal{D}_+$.

Considerando para un dado tiempo t , la expansión de la energía total \mathcal{E}_t de un estado perturbado $(u_t + hv, \beta_t + h\alpha)$ con respecto a h hasta el término de segundo orden para una dada dirección admisible $(v, \alpha) \in \mathcal{U}^0 \times \mathcal{D}_+$

$$\mathcal{E}_t(u_t + hv, \beta_t + h\alpha) = \mathcal{E}_t(u_t, \beta_t) + h\mathcal{E}_t'(u_t, \beta_t)(v, \alpha) + \frac{h^2}{2} \mathcal{E}_t''(u_t, \beta_t)(v, \alpha) + o(h^2), \quad (4.1)$$

la condición de estabilidad total (ST) se expresa como

$$h\mathcal{E}_t'(u_t, \beta_t)(v, \alpha) + \frac{1}{2} h^2 \mathcal{E}_t''(u_t, \beta_t)(v, \alpha) + o(h^2) \geq 0 \quad (4.2)$$

donde $\mathcal{E}_t''(u_t, \beta_t)$ es la derivada segunda de \mathcal{E}_t en (u_t, β_t) .

Teniendo en cuenta de (3.5) y de (4.2), se obtiene que la solución (u_t, β_t) es estable en la dirección (v, α) , si para valores pequeños de h resulta que

$$h\mathcal{E}_t'(u_t, \beta_t)(v, \alpha) + \frac{h^2}{2} \mathcal{E}_t''(u_t, \beta_t)(v, \alpha) \geq 0. \quad (4.3)$$

Usando las ecuación de equilibrio en forma variacional, se muestra que (Benallal y Marigo, 2007; Luege et al., 2017) la derivada direccional primera de $\mathcal{E}_t(u_t, \beta_t)$ es una forma lineal

definida en $H^1(0, L)$, dada por

$$\mathcal{E}'_t(u_t, \beta_t)(v, \alpha) = \int_0^L \left[E(\beta_t)u'v' + \left(\phi'(\beta_t) + \frac{1}{2}E'(\beta_t)u'^2 \right) \alpha + 2c\beta'\alpha' \right] dx \quad (4.4)$$

mientras la derivada direccional segunda es una forma bilinear definida en $H^1(0, L)^2$ dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{E}''(u_t, \beta_t)(v, \alpha) = & \int_0^L c\alpha'^2 dx + \int_0^L E(\beta_t) (v'^2 - \alpha S'(\beta_t)\sigma_t)^2 dx \\ & - \int_0^L \left(\frac{1}{2}S''(\beta_t)\sigma_t^2 - \phi''(\beta_t) \right) \alpha^2 dx, \end{aligned} \quad (4.5)$$

donde $\phi'(\beta_t) = d\phi/d\beta_t$, $S(\beta_t) = 1/E(\beta_t)$, $S'(\beta_t) = dS/d\beta_t$ y $S''(\beta_t) = d^2S/d\beta_t^2$.

Si se introduce el siguiente cociente de Rayleigh

$$\mathcal{R}_t(v, \alpha) = \frac{2c \int_0^L \alpha'^2 dx + \int_0^L E(\beta_t) (v'^2 - \alpha S'(\beta_t)\sigma_t)^2 dx}{\int_0^L \left(\frac{1}{2}S''(\beta_t)\sigma_t^2 - \phi''(\beta_t) \right) \alpha^2 dx}. \quad (4.6)$$

verificar la positividad de (4.5), y por lo tanto la estabilidad del sistema, es también equivalente a verificar que en cada instante de tiempo t se verifica la siguiente relación

$$\min_{u^0 \times (D_+ \setminus \{0\})} \mathcal{R}_t > 1. \quad (4.7)$$

4.1. Análisis de estabilidad del estado homogéneo

Para analizar la estabilidad de la solución homogénea del problema de evolución, donde tanto el daño como la deformación son constantes en el espacio y evolucionan de manera suave en el tiempo, se observa que siendo $u_t(x) = \epsilon_1 t x$, las variables de estado que caracterizan el estado homogéneo están dadas por

$$u'_t(x) = \epsilon_1 t, \quad \beta'_t(x) = \beta''_t(x) = 0 \quad \text{y} \quad \sigma_t = E(\beta_t)\epsilon_1 t, \quad (4.8)$$

para $t \geq 0$ y $x \in (0, L)$. Asumiendo que la barra está inicialmente no dañada en cada punto, es decir $\beta_0(x) = 0$ para $x \in (0, L)$, se puede determinar el instante de tiempo t_e en que se verifica, por primera vez, el criterio de daño dado por

$$\frac{1}{2}S'(\beta_t)\sigma_t^2 + k \geq 0, \quad \dot{\beta}_t \left(\frac{1}{2}S'(\beta_t)\sigma_t^2 + k \right) = 0. \quad (4.9)$$

Se obtiene de esta manera que

$$t_e = \sqrt{\frac{-2\phi'(0)}{\epsilon_1 E'(0)}} \quad \text{y} \quad \sigma_e = \sqrt{\frac{-2\phi'(0)}{S'(0)}}, \quad (4.10)$$

donde $\phi'(0) = k > 0$. La fase elástica se verifica, por lo tanto, para todo tiempo t en el intervalo $[0, t_e]$. Por otro lado, en la fase de daño, es decir para $t > t_e$, resulta

$$t = \sqrt{\frac{-2k}{\epsilon_1 E'(\beta_t)}} \quad \text{y} \quad \sigma_t = E(\beta_t)\epsilon_1 t = \sqrt{\frac{2k}{S'(\beta_t)}} \quad (4.11)$$

y la derivada primera de la energía total (4.1) se escribe

$$\begin{aligned}\mathcal{E}'_t(u_t, \beta_t)(v, \alpha) &= (\phi' + \frac{1}{2}E'\epsilon_1^2 t^2) \int_0^L \alpha dx \\ &= \begin{cases} -\frac{1}{2}E'_0\epsilon_1^2(t_e^2 - t^2) \int_0^L \alpha dx & \text{si } t < t_e \\ 0 & \text{si } t \geq t_e. \end{cases}\end{aligned}\quad (4.12)$$

La discusión sobre la estabilidad se llevará a cabo considerando los estados elástico y de daño separadamente, como sigue:

1. Estado elástico: $t < t_e$. La solución homogénea es $(\epsilon_1 tx, 0)$. La derivada primera de la energía (4.12) es positiva en todas las direcciones (v, α) con $\alpha \neq 0$, mientras que el término de segundo orden en las direcciones admisibles $(v, 0)$, con $v \neq 0$ resulta

$$\mathcal{E}''_t(\epsilon_1 xt, 0)(v, 0) = E(0) \int_0^L v'^2 dx \quad (4.13)$$

el cual es positivo. Por lo tanto la condición (ST) se verifica (Luege et al., 2017) y la respuesta homogénea no dañada $(\epsilon_1 tx, 0)$ es solución estable del problema de evolución.

2. Estado dañado: $t \geq t_e$. La derivada primera de la energía (4.12) evaluada en la solución homogénea $(\epsilon_1 xt, \beta_t)$ es cero. La estabilidad de esta solución dependerá por lo tanto sólo del signo de la derivada segunda, es decir, para que se verifique la (ST), debe resultar que $\mathcal{E}''_t(u_t, \beta_t)(v, \alpha) > 0$ para todas las direcciones admisibles no-nulas.

Mirando directamente a la (4.5), se observa que cuando $S''_t < 0$, llamado comportamiento en endurecimiento, resulta $\mathcal{E}''_t(u_t, \beta_t)(v, \alpha) > 0$ para todas las direcciones admisibles, entonces la solución homogénea $(\epsilon_1 xt, \beta_t)$ es estable. El estudio de estabilidad es por lo tanto relevante para modelos constitutivos donde $S''_t \geq 0$, que definen comportamientos en ablandamiento. Para la función $S(\beta_t) = 1/E(\beta_t)$ definida en (5.1) que se considera en los ejemplos numéricos de este artículo, analizando directamente a la (4.5) se observa que $\mathcal{E}''_t(u_t, \beta_t)(v, \alpha) > 0$ para las direcciones admisibles del tipo $(v, 0)$ con $v \neq 0$. Para analizar el signo de (4.5) para las otras direcciones (v, α) con $\alpha \neq 0$, se examina la condición de Rayleigh (4.6) que toma la siguiente expresión (Pham, 2010; Luege et al., 2017)

$$\mathcal{R}_t(\alpha) = \frac{c \int_0^L \alpha'^2 dx + ES''\sigma_t^2 \left(\int_0^L \alpha dx \right)^2}{\left(\frac{1}{2}S''\sigma_t^2 - \phi'' \right) \int_0^L \alpha^2 dx} > 1, \quad \alpha \in \mathcal{D}_+ \setminus \{0\} \quad (4.14)$$

donde \mathcal{R}_t depende sólo de α . El mínimo de \mathcal{R}_t definido en (4.14) puede obtenerse analíticamente, (Pham, 2010; Luege et al., 2017). Dicha deducción va más allá del objetivo de este artículo, sin embargo de dicho análisis se deduce que

$$\min_{\alpha \in (\mathcal{D}_+ \setminus \{0\})} \mathcal{R}_t^* = \begin{cases} \frac{E_t S_t'^2 \sigma_t^2}{\left(\frac{1}{2}S''\sigma_t^2 - \phi'' \right)} & \text{si } \pi^2 c \geq E_t S_t'^2 \sigma_t^2 L^2 \\ \frac{c^{1/3} (\pi E_t S_t'^2 \sigma_t^2)^{2/3}}{\left(\frac{1}{2}S''\sigma_t^2 - \phi'' \right) L^{2/3}} & \text{si } \pi^2 c < E_t S_t'^2 \sigma_t^2 L^2 \end{cases} \quad (4.15)$$

Analizando la expresión (4.15) se deduce que para $t \geq t_e$, la solución homogénea $(\epsilon_1 t x, \beta_t)$ es estable si y sólo si la longitud de la barra es suficientemente pequeña, i.e.

$$\begin{aligned} L < L_s(t) &\rightarrow (\epsilon_1 t x, \beta_t) \text{ satisface (ST),} \\ L > L_s(t) &\rightarrow (\epsilon_1 t x, \beta_t) \text{ no satisface (ST),} \end{aligned} \quad (4.16)$$

con

$$L_s(t) = \sqrt{\frac{c\pi^2 E_t^2 S_t'^4 \sigma_t^4}{(\frac{1}{2} S'' \sigma_t^2 - \phi'')^3}}. \quad (4.17)$$

Dado que $\sigma_t = E(\beta_t)\epsilon_1 t$ y $\phi''(\beta_t) = 0$, el límite estable $L_s(t)$ de longitud de la barra a partir del cual, los resultados dejan de ser estables, resulta

$$L_s(t) = \sqrt{\frac{8c\pi^2 S_t'^4}{S''^3 \epsilon_1^2 t^2}}. \quad (4.18)$$

La longitud límite de estabilidad $L_s(t)$ depende por lo tanto de la función de rigidez $E(\beta)$ elegida, de la constante de regularización c , del límite elástico de deformación y disminuye con el tiempo t . La respuesta de la barra puede seguir la rama homogénea siempre y cuando el estado homogéneo asociado sea estable. Esto se verifica cuando la longitud de la barra es suficientemente pequeña, menor que L_s .

4.2. Criterio de no-bifurcación

El hecho que la respuesta homogénea sea estable no garantiza que la evolución seguirá dicho camino hasta la pérdida de estabilidad. Puede ocurrir que una evolución pase a otro estado homogéneo estable, es decir bifurque en otra rama estable pero asociada a un estado nohomogéneo. El interés en este trabajo es encontrar posibles puntos de bifurcación en la rama homogénea. Suponiendo primeramente que la evolución sea suficientemente regular, tal que la derivada exista en t , y tome el valor $(\dot{u}, \dot{\beta}) = (\epsilon_1 x, \dot{\beta}_t)$, cuando la evolución sigue la rama homogénea, el objetivo es estudiar si otra evolución de la velocidad es posible. Para realizar dicho análisis, se examina la condición que se obtiene derivando con respecto al tiempo la forma variacional del problema de evolución, dada por (Pham, 2010; Pham et al., 2011; Luege et al., 2017)

$$\dot{\mathcal{E}}_t''(u_t, \beta_t)(\dot{X}_t, Y - \dot{X}_t) + \dot{\mathcal{E}}_t'(u_t, \beta_t)(Y - \dot{X}_t) \geq 0, \quad \forall Y \in \dot{\mathcal{U}}_t \times \mathcal{D} \quad (4.19)$$

donde $\dot{X}_t = (\dot{u}, \dot{\beta})$ y $Y = (v, \alpha)$.

A continuación se estudia la solución homogénea durante el proceso de ablandamiento, es decir para $t \geq t_e$.

Dada la solución homogénea $(\epsilon_1 t x, \beta_t)$, de la condición (IR) se obtiene que $\dot{\beta} \geq 0$. Luego para el caso de desplazamientos impuestos resulta $\dot{\mathcal{E}}_t'(u_t, \beta_t) = 0$, por lo tanto el estudio de unicidad del problema de velocidad se reduce nuevamente al estudio de la forma cuadrática (4.5), aunque el espacio funcional sea distinto. La condición de estabilidad (ST) implica, por otro lado, la condición de estabilidad de primer orden y que la evolución de $(\dot{u}, \dot{\beta})$ satisfaga la desigualdad en la derivada segunda de la energía

$$\mathcal{E}_t''(\dot{u}_t, \dot{\beta}_t)(v, \alpha) \geq 0 \quad \forall (v, \alpha) \in \dot{\mathcal{U}}^0 \times \mathcal{D} \quad (4.20)$$

La solución $(\dot{u}_t, \dot{\beta}_t)$ de este problema es por lo tanto única si la derivada segunda de la energía es una forma bilinear simétrica definida positiva sobre $H_0^1(0, L) \times H^1(0, L)$ (Nguyen, 2000). Para materiales con ablandamiento, se introduce el mismo cociente de Rayleigh que para el estudio de estabilidad. La diferencia entre los dos criterios es el espacio sobre el cual se realiza la minimización del cociente de Rayleigh. Para el criterio de no-bifurcación el mínimo se busca en el espacio funcional $\mathcal{D}_+ \setminus \{0\}$ mientras que para el estudio de la estabilidad en $\mathcal{U}^0 \times \mathcal{D}_+$, obteniendo los siguientes resultados (Luege et al., 2017)

$$\min_{\alpha \in \mathcal{D}_+ \setminus \{0\}} \mathcal{R}_t^*(\alpha) = \begin{cases} \frac{E_t S_t'^2 \sigma_t^2}{(\frac{1}{2} S'' \sigma_t^2 - \phi'')} & \text{si } \pi^2 c \geq E_t S_t'^2 \sigma_t^2 L^2 \\ \frac{c \pi^2}{(\frac{1}{2} S'' \sigma_t^2 - \phi'') L^2} & \text{si } \pi^2 c < E_t S_t'^2 \sigma_t^2 L^2. \end{cases} \quad (4.21)$$

Examinando (4.21) se deduce que un punto de bifurcación de la rama homogénea es entonces posible para $t \geq t_e$ cuando la longitud de la barra es mayor que un cierto límite $L_b(t)$, i.e.

$$\begin{aligned} L < L_b(t) &\rightarrow (\epsilon_1 x t, \beta_t) \text{ no es punto de bifurcación,} \\ L \geq L_b(t) &\rightarrow (\epsilon_1 x t, \beta_t) \text{ posible punto de bifurcación,} \end{aligned} \quad (4.22)$$

con

$$L_b(t) = \sqrt{\frac{c \pi^2}{(\frac{1}{2} S'' \sigma_t^2 - \phi'')}}. \quad (4.23)$$

5. EJEMPLO NUMÉRICO

En esta sección se analiza la estabilidad y bifurcación de una barra sujeta a tracción. Para ello es necesario definir la función de rigidez $E(\beta)$, representativa del comportamiento macroscópico del material. Con el objeto de estudiar la respuesta de distintas funciones de rigidez, se eligen dos funciones $E^I(\beta)$ y $E^{II}(\beta)$, como sigue

$$E^I(\beta) = \frac{(1 - \beta)^2}{(1 - \beta)^2 + \beta \frac{3E_0 G_f}{2f_{t0}^2 D} (1 + \beta p \exp \beta^2 q)} E_0 \quad E^{II}(\beta) = (1 - \beta)^2 E_0 \quad (5.1)$$

Ambas funciones verifican las hipótesis constitutivas $E(0) = E_0 > 0$ denominado módulo de Young, $E(1) = 0$, $E'(1) = 0$, y $\forall \beta \in [0, 1)$ resulta $E(\beta) > 0$, $E'(\beta) < 0$ y $E''(\beta) > 0$. En la expresión de E^{II} se tienen parámetros macroscópicos adicionales que son: G_f la energía de fractura, f_{t0} la resistencia a tracción uniaxial y D la longitud característica, y ello con el objetivo de que la respuesta obtenida sea coincidente con la respuesta del modelo cohesivo cuando la longitud de banda se acerque a cero, manteniendo los demás parámetros constantes siguiendo los sugerimientos de Lorentz et al. (2011, 2012).

Considerando el material hormigón con $E_0 = 30000 \text{MPa}$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,2$, $f_{t0} = 3 \text{MPa}$, $D = 0,05 \text{m}$, se pueden calcular los parámetros k y c de las ecuaciones (2.1) y (2.2) como sigue

$$k = \frac{3 G_f}{4 D} \quad c = \frac{1}{2} k D^2 \quad (5.2)$$

Por lo tanto resulta $\phi'(0) = k$, $\phi''(\beta) = 0$ y

$$\begin{aligned} E^{II}(0) &= -\frac{3}{2} \frac{E_0^2 G_f}{f_{0t}^2 D} & S^{II}(0) &= \frac{3}{2} \frac{G_f}{f_{0t}^2 D} \\ E^{III}(0) &= -2E_0 & S^{III}(0) &= -\frac{2}{E_0} \end{aligned} \quad (5.3)$$

cuyas expresiones se obtienen derivando (5.1) respecto a β . Reemplazando en (4.10) se obtiene que $t_e = 1$ y $\sigma_e = f_{0t}$.

En la Figura 5 se grafica la tensión en función del tiempo, para ambas funciones de rigidez y parámetros p y q .

Se verifica que para $t \in [0, 1)$ la respuesta de la barra es elástica, y el campo de daño permanece en su valor inicial 0, ya que la desigualdad (4.9)₁ es estricta. En $t = 1$, la desigualdad resulta una igualdad en cada punto material, el daño evoluciona en toda la barra, y comienza la fase de ablandamiento del material. Se nota que incrementando el valor de p y q , la respuesta de la barra utilizando la función de rigidez E^I se acerca a la respuesta de la función de E^{II} .

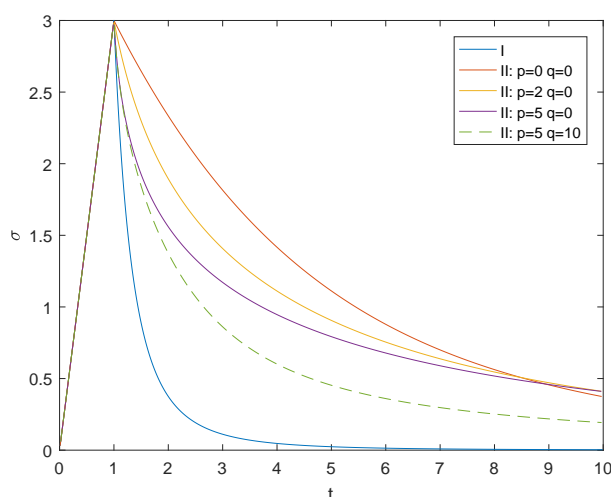


Figura 1: Tensión vs. tiempo, usando las funciones de rigidez E^I y E^{II} para distintos valores de p y q .

Analíticamente se ha mostrado que durante la fase elástica la respuesta homogénea es estable y única. Cuando comienza la fase de daño, en la sección anterior se dedujo que si para cada estado de deformación homogénea se verifican simultáneamente el equilibrio mecánico y el criterio de daño, dicho camino verifica las condiciones necesarias de estabilidad de primer orden. Sin embargo para saber si es realmente un mínimo se deben estudiar las condiciones de segundo orden. Para ello, en las Figuras 2 y 3 se grafica el cociente de Rayleigh (4.15) para longitud de la barra $L = 0,01m$ y $L = 0,1m$ respectivamente.

La elección de la función de rigidez es importante para la estabilidad del modelo, notando que para E^I , a partir de $t = 8$ el valor de \mathcal{R}_t^* toma valores menores de 1, mientras que para los valores de parámetros adoptados en E^{II} el valor de \mathcal{R}_t^* se mantiene mayor que 1 en el intervalo de tiempo $[1, 10]$ y por lo tanto resulta estable en un intervalo de tiempo más amplio. Para una longitud de barra mayor, es decir $L = 0,1m$, la solución homogénea sólo resulta estable durante un tiempo relativamente corto o no es estable en ningún instante de tiempo, y ello una vez que la respuesta inicia la fase de ablandamiento.

Se verifica entonces que las longitudes cortas son más estables que las largas, como se deduce también de la expresión (4.15). Análogamente se puede estudiar la unicidad de la solución según la longitud de la barra a través del criterio de no-bifurcación dado por ecuación (4.21). La Figura 4 muestra los límites de estabilidad para ambos criterios de estabilidad L_s y bifurcación L_b , respectivamente, utilizando las distintas funciones de rigidez. En dichas curvas se observa que el límite de unicidad se alcanza para longitudes menores que el límite de estabilidad, ya que la solución homogénea encuentra un punto crítico de bifurcación mientras la solución es estable.

6. CONCLUSIONES

Usando el marco de la formulación energética para modelos independientes de la velocidad, se ha analizado la eficacia de la regularización del modelo gradiente daño elegido, a través de análisis de estabilidad y bifurcación de la respuesta obtenida. Para ello se ha estudiado la solución homogénea, donde el campo de deformaciones y de daño son uniformes en el espacio, del problema de evolución de una barra sujeta a una tracción creciente monótona en el extremo libre. Se han examinado las curvas tensión deformación y analizado la estabilidad de la solución homogénea asociado a cada valor de desplazamiento prescrito. Ello permite vislumbrar efectos escala e introducir una función fundamental dada por la longitud crítica característica de la barra a partir de la cual el estado homogéneo no es más estable. Se ha estudiado también la posibilidad de bifurcación a partir de una rama homogénea, mostrando que la bifurcación de una rama estable es posible para una longitud de barra menor de la longitud crítica asociada a la pérdida de estabilidad del estado homogéneo. Se ha observado que la respuesta homogénea es la única posible si la longitud de la barra es suficientemente pequeña.

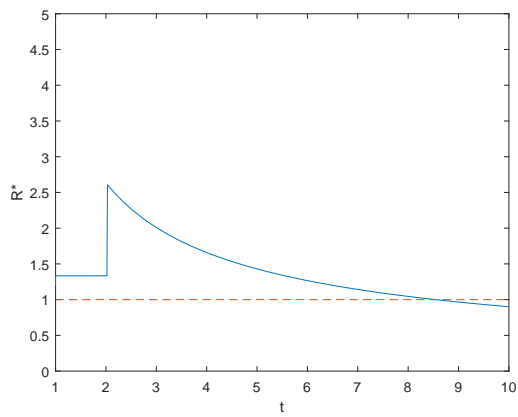
AGRADECIMIENTOS

La autora agradece el CONICET y la Universidad Nacional de Tucumán por su apoyo financiero a través del proyecto PIUNT CX-E 527.

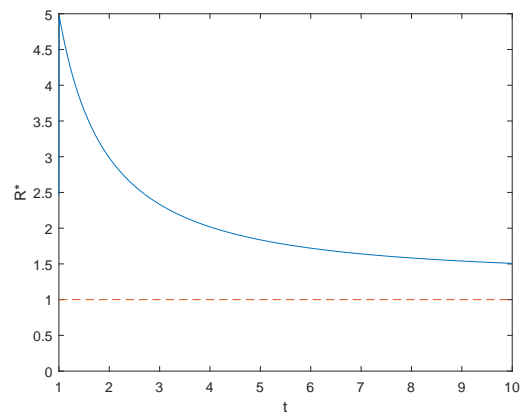
REFERENCIAS

- Bazant Z. Instability, ductility and size effect in strain-softening concrete. *ASCE J. Engng. Mech.*, 102:331–344, 1976.
- Benallal A. y Marigo J.J. Bifurcation and stability issues in gradient theories with softening. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 15:283–295, 2007.
- Bourdin B., Francfort G., y Marigo J.J. Numerical experiments in revised brittle fracture. *Journal of Elasticity*, 91:1–148, 2008.
- Fremont M. *Non-smooth Thermomechanics*. Springer, 2002.
- Frémond M. y Nedjar B. Damage, gradient of damage and principle of virtual power. *International Journal of Solids Structures*, 8, 1996.
- Kachanov L. Time of the rupture process under creep conditions. *Izvestiia Akademii Nauk SSSR*, 8:26–31, 1958.
- Lorentz E., Cuvilliez S., y Kazymyrenko K. Convergence of a gradient damage model toward a cohesive zone model. *C. R. Mecanique*, 339:20–26, 2011.
- Lorentz E., Cuvilliez S., y Kazymyrenko K. Modelling large crack propagation: from gradient damage to cohesive zone models. *Int. J. Fract.*, 178:85–95, 2012.
- Lorentz E. y Godard V. Gradient damage models: Toward full-scale computations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200:1927–1944, 2011.

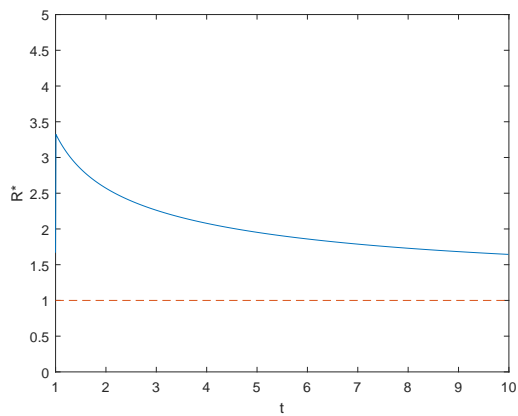
- Luege M., Almenar M., Orlando A., y Pilotta E.A. An energetic formulation of a gradient damage model for concrete and its numerical implementation. *En preparación*, 2017.
- Marigo J.J. *Gradient damage models: construction and fundamental properties*. École d'Été de Mécanique Théorique de Quiberon, 2014.
- Mielke A. Evolution of rate-independent systems. evolutionary equations. *Handbook of Differential Equations. Elsevier/North-Holland*, 2:461–559, 2005.
- Mielke A. y Roubicek T. *Rate-Independent Systems*. Springer, 2015.
- Mielke A., Roubicek T., y Zeman J. Complete damage in elastic and viscoelastic media and its energetics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199:1242–1253, 2010.
- Mielke A., Theil F., y Levitas V.I. A variational formulation of rate-independent phase transformations using an extremum principle. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 162:137–177, 2002.
- Nguyen Q. *Stability and Nonlinear Solid Mechanics*. Wiley Son, 2000.
- Pham K. *Construction et Analyse de Modeles d'Endommagement a Gradient*. These Docteur en Sciences. Université Pierre et Marie Curie, 2010.
- Pham K., Amor H., Marigo J.J., y Maurini C. Gradient damage models and their use to approximate brittle fracture. *International Journal of Damage Mechanics*, 20:618–652, 2010.
- Pham K., Marigo J.J., y Maurini C. The issue of the uniqueness and the stability of the homogeneous response in uniaxial tests with gradient damage models. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 59:1163–1190, 2011.



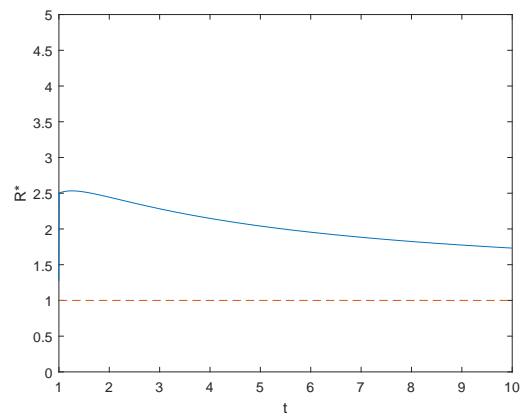
(a)



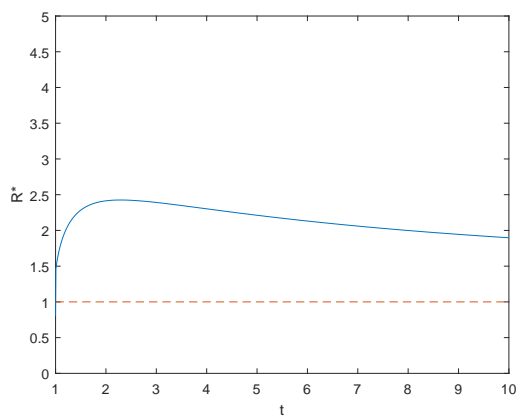
(b)



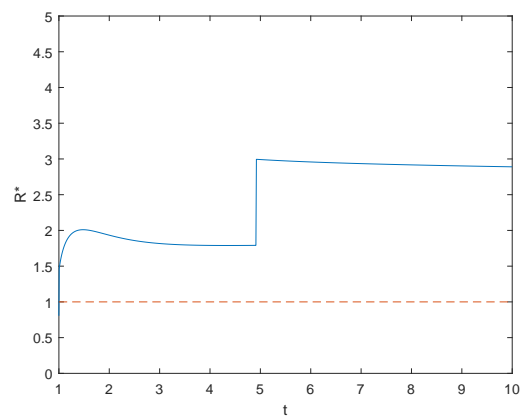
(c)



(d)



(e)



(f)

Figura 2: Cociente de Rayleigh vrs. tiempo, para $L = 0,01\text{m}$ y función de rigidez tipo I (a); tipo II con $p = 0$ y $q = 0$ en (b), $p = 1$ y $q = 0$ en (c), $p = 2$ y $q = 0$ en (d), $p = 5$ y $q = 0$ en (e), $p = 5$ y $q = 10$ en (f)

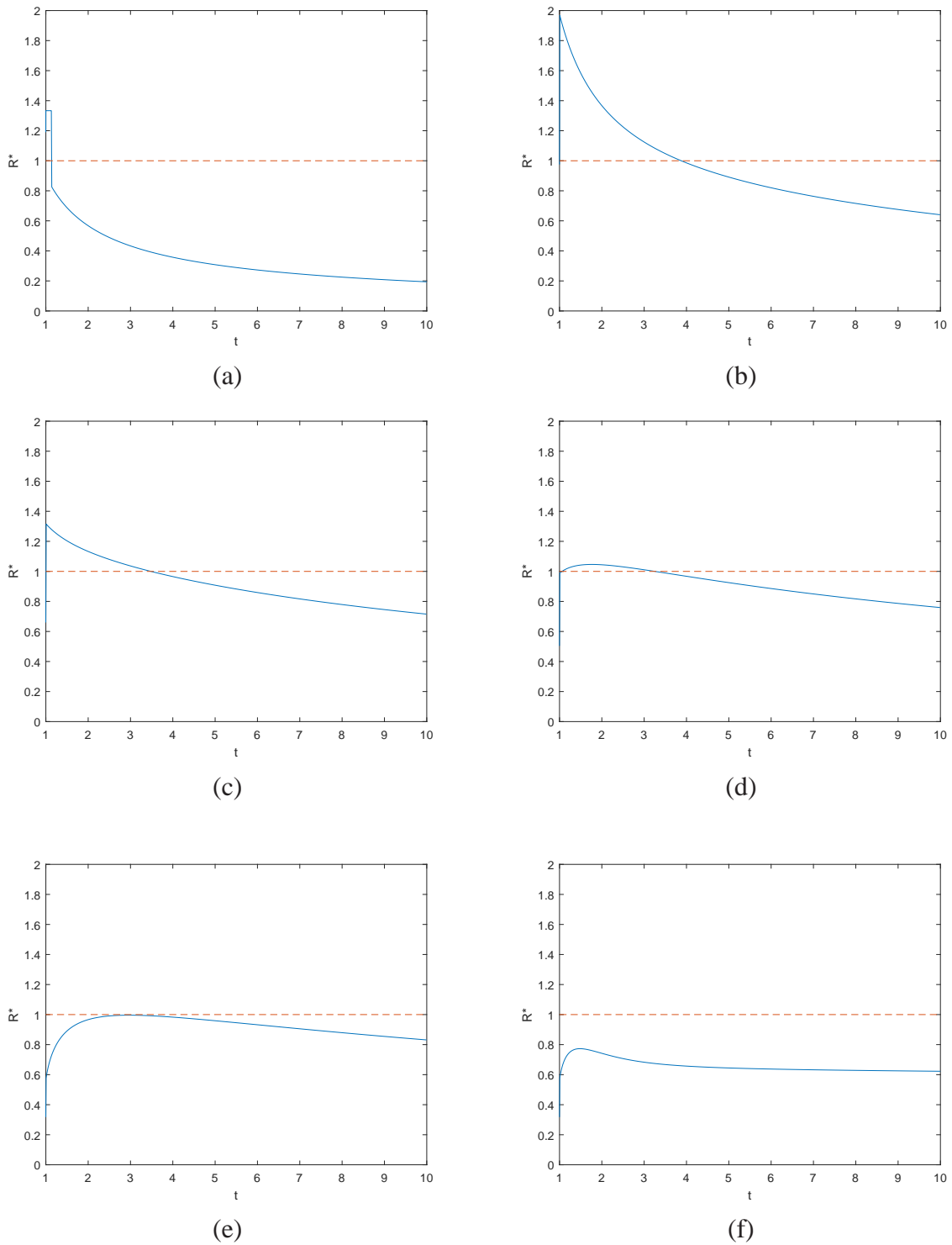


Figura 3: Cociente de Rayleigh vs. tiempo, para $L = 0,1\text{m}$ y función de rigidez tipo I (a); tipo II con $p = 0$ y $q = 0$ en (b), $p = 1$ y $q = 0$ en (c), $p = 5$ y $q = 0$ en (d), $p = 1$ y $q = 0$ en (e), $p = 5$ y $q = 10$ en (f)

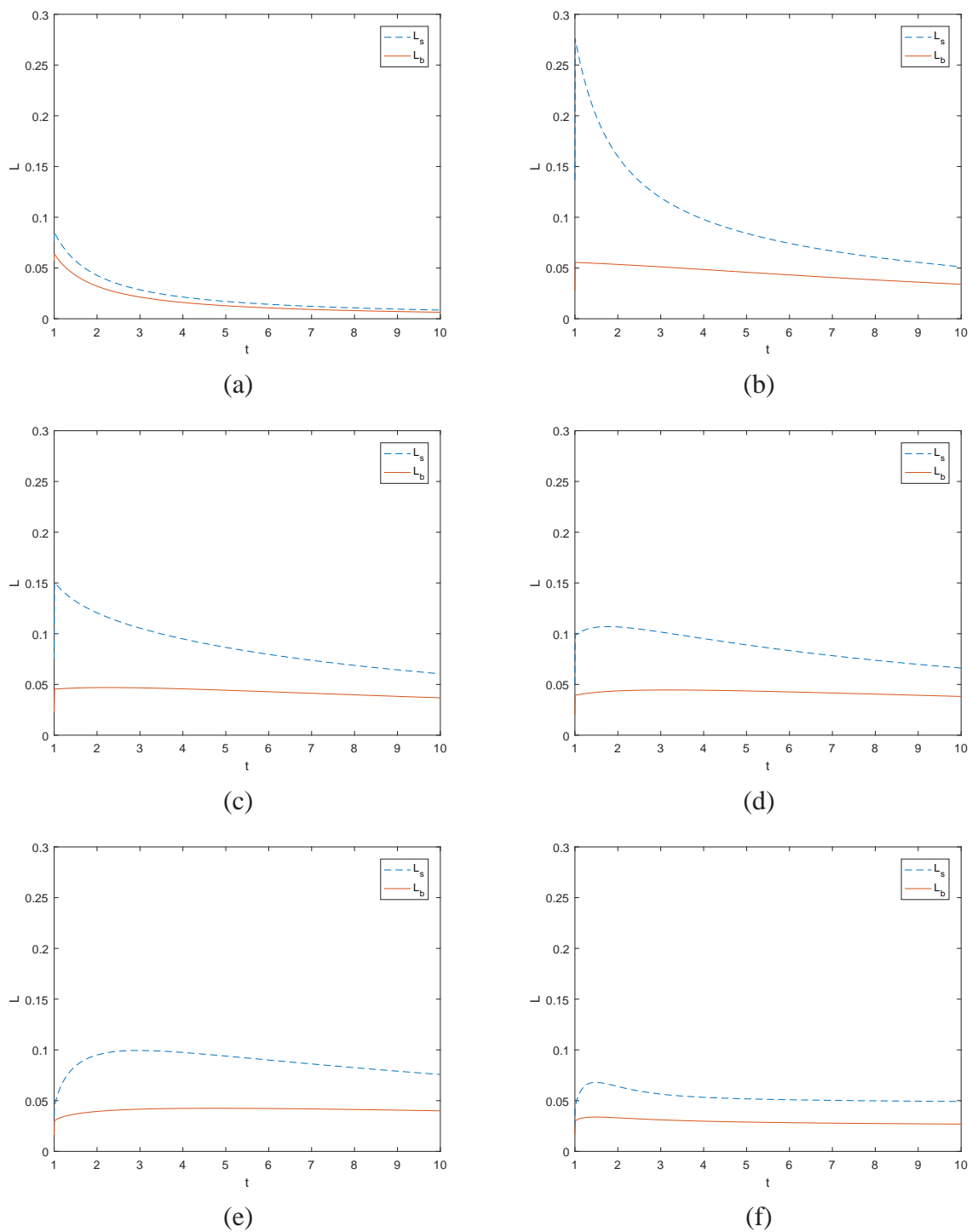


Figura 4: Longitud límite vs. tiempo para función de rigidez tipo I (a); tipo II con $p = 0$ y $q = 0$ en (b), $p = 1$ y $q = 0$ en (e), $p = 2$ y $q = 0$ en (c), $p = 5$ y $q = 0$ en (d), $p = 5$ y $q = 10$ en (f)