

## FORMULACIÓN NODAL EN ELEMENTOS FINITOS ISOPARAMÉTRICOS PARA UNA RECUPERACIÓN MÁS PRECISA DEL CAMPO DE TENSIONES

José M. Pereiras<sup>a</sup>, Marcelo A. Cabrera<sup>b</sup>, y Claudio E. Jouglard<sup>c</sup>

<sup>a</sup>*Departamento de Ingeniería Civil. Facultad Regional General Pacheco. Universidad Tecnológica Nacional. General Pacheco, Argentina. [jpereiras@gmail.com](mailto:jpereiras@gmail.com), <http://www.frgp.utn.edu.ar>*

<sup>b</sup>*Departamento de Ingeniería Química. Facultad Regional Avellaneda. Universidad Tecnológica Nacional. Avellaneda, Argentina., [darklainsoul@yahoo.com.ar](mailto:darklainsoul@yahoo.com.ar), <http://www.fra.utn.edu.ar>*

<sup>c</sup>*Departamento de Ingeniería Civil. Facultad Regional Buenos Aires. Universidad Tecnológica Nacional. Buenos Aires, Argentina. [claudio.jouglard@frba.utn.edu.ar](mailto:claudio.jouglard@frba.utn.edu.ar), <http://www.frba.utn.edu.ar>*

**Palabras Clave:** cuadrilátero, integración nodal, tensiones.

**Resumen.** En este trabajo se presenta una formulación de elementos finitos basada en la recuperación nodal de tensiones. La formulación clásica isoparamétrica de elementos finitos usando funciones de forma lineales, produce un campo de tensiones discontinuo debiendo usar técnicas de post procesamiento de resultados para poder “suavizar” este campo de tensiones. Esto último no es necesario en esta formulación presentada en este trabajo ya que el campo de tensiones es continuo por naturaleza al elemento. Otro punto de importancia es que en la formulación clásica se utiliza integración en los puntos de Gauss, mientras que en esta formulación no es necesario realizar integración numérica, resultando en una reducción considerable del costo computacional. Por último, la obtención de las tensiones en los nodos, deriva en una ventaja para la captación de frentes de plasticidad y fractura frente a la formulación clásica donde las variables del cálculo no lineal, como la plasticidad, son acumuladas en los puntos internos de integración de Gauss.

## 1 INTRODUCCIÓN

La integración de las matrices de rigidez de cuadriláteros se puede hacer analíticamente (Babu y Pinder, 1984; Rathod, 1988), sin embargo la integración numérica mediante cuadratura de Gauss (Zienkiewicz, Taylor y Zhu, 2013) es la técnica preferida dado que es simple de codificar y se puede extender fácilmente a problemas no lineales. Usando cuadratura de Gauss el cálculo de una integral consiste en una suma ponderada de evaluaciones del integrando en ciertas ubicaciones dentro del elemento llamadas puntos de Gauss. El esfuerzo numérico es proporcional al número de estos puntos de integración.

El mínimo número de puntos Gauss es dictado por condiciones de consistencia y estabilidad (Zienkiewicz, Taylor y Zhu, 2013) y se conoce como cuadratura completa. La cuadratura completa es costosa pero el uso de un número menor de puntos de integración genera elementos con modos espurios o mecanismos (Irons y Ahmad, 1980). Para cuadriláteros en problemas de estado plano de tensiones o deformaciones la cuadratura completa requiere el uso de 2x2 puntos de integración, si usamos una cuadratura reducida de un punto el elemento presenta modos espurios conocidos como modos reloj de arena (hourglass modes) (Belytschko et al., 1984; Kosloff y Frazier, 1978). Muchos autores (Belytschko, 1983; Flanagan y Belytschko, 1981; Hansbo, 1998; Jacquotte y Oden, 1984; Liu, Ong y Uras, 1985; Liu y Belytschko, 1984; Schulz, 1985) han desarrollado controles efectivos de estos modos añadiendo algún tipo de estabilización al elemento obtenido con un punto de integración. Por ejemplo en (Liu, Ong y Uras, 1985) se realizó un desarrollo en series de Taylor para el campo de deformaciones y en (Schulz, 1985) se realizó una expansión similar pero para el campo de tensiones, en ambos casos se retienen un número mínimo de términos que aseguran convergencia y estabilidad.

En este trabajo desarrollamos paso a paso el elemento obtenido en (Liu, Ong y Uras, 1985; Liu, Hu y Belytschko, 1994) mostrando todas las matrices y vectores necesarios para su implementación y se propone una extensión para problemas no lineales utilizando los vértices del elemento como puntos de integración, usualmente llamada integración nodal.

Primeramente, se presenta la formulación de elementos finitos para problemas estáticos lineales. En la sección 3, se muestran las matrices gradiente para una interpolación bilineal sobre un elemento cuadrilátero de cuatro nodos. En la sección 4 se muestra cómo se llega a la matriz de rigidez aproximada obtenida en (Liu, Ong y Uras, 1985). Finalmente, en la sección 5 se presenta la propuesta de integración nodal para problemas no lineales.

## 2 ECUACIONES DE ELEMENTOS FINITOS PARA ELASTICIDAD LINEAL

El principio de los desplazamientos virtuales para un cuerpo deformables se puede postular como

$$\delta W = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV - \delta W_{ext} = 0 \quad (1)$$

La integración se realiza sobre el volumen  $V$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  es el campo de deformaciones,  $\boldsymbol{\sigma}$  es el campo de tensiones y  $\delta W_{ext}$  es el trabajo virtual de las fuerzas externas.

Las componentes del campo de tensiones son

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_{xy}]^T \quad (2)$$

Y las componentes del campo de deformaciones son

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}]^T \quad (3)$$

Para pequeños desplazamientos las componentes del campo de deformaciones están relacionadas con las derivadas de los desplazamientos como

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (4)$$

donde  $u, v$  son los campos de desplazamientos en las direcciones  $x, y$ , respectivamente.

En una aproximación por elementos finitos el campo de desplazamientos es interpolado a partir de los valores nodales del elemento como

$$u(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{NEN} N_i(\xi, \eta) u_i = \mathbf{N}^T \mathbf{u} \quad (5)$$

$$v(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{NEN} N_i(\xi, \eta) v_i = \mathbf{N}^T \mathbf{v}$$

donde  $NEN$  es el número de nodos del elemento asociados con desplazamientos,  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  son los vectores de desplazamientos nodales y  $\mathbf{N}$  es el vector de funciones de forma para desplazamientos asociado a cada nodo del elemento, esto es

$$\mathbf{u} = [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad \dots \quad u_{NEN}]^T \quad (6)$$

$$\mathbf{v} = [v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad \dots \quad v_{NEN}]^T$$

y

$$\mathbf{N} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad \dots \quad N_{NEN}]^T \quad (7)$$

Luego de sustituir los desplazamientos el campo de deformaciones del elemento se puede expresar como

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{d} \quad (8)$$

Donde  $\mathbf{d}$  es el vector de desplazamientos nodales y  $\mathbf{B}$  es la matriz gradiente formada por las derivadas de las funciones de forma

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial y} & \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Luego la variación del campo de deformaciones es

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \delta \mathbf{d} \quad (10)$$

Y el trabajo virtual de las cargas externas es

$$\delta W_{ext} = \delta \mathbf{d}^T \mathbf{f}_{ext} \quad (11)$$

Donde el vector de cargas  $\mathbf{f}$  sólo está aplicado en los nodos del elemento. Introduciendo estas cantidades en la ecuación (1) tenemos

$$\delta W = \delta \mathbf{d}^T \left( \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV - \mathbf{f}_{ext} \right) = 0 \quad (12)$$

Que debe ser válida para variaciones arbitrarias  $\delta \mathbf{d}$ . Por lo tanto, las ecuaciones resultantes de la aproximación de elementos finitos son

$$\mathbf{f}_{int} = \mathbf{f}_{ext} \quad (13)$$

donde

$$\mathbf{f}_{int} = \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV \quad (14)$$

Es el vector de fuerzas internas.

Para un material elástico lineal el vector de tensiones  $\boldsymbol{\sigma}$  se relaciona con el vector de deformaciones  $\boldsymbol{\varepsilon}$  mediante las ecuaciones constitutivas

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (15)$$

Donde  $\mathbf{C}$  es la matriz constitutiva de coeficientes elásticos.

Para un material elástico isotrópico la matriz constitutiva para problemas de estado plano de tensiones se puede escribir como

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \bar{\lambda} + 2\mu & \bar{\lambda} & 0 \\ \bar{\lambda} & \bar{\lambda} + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (16)$$

donde

$$\bar{\lambda} = \begin{cases} 2\lambda\mu/(\lambda + 2\mu) & \text{para estados planos de tensiones} \\ \lambda & \text{para estados planos de deformaciones} \end{cases} \quad (17)$$

y  $\lambda$ ,  $\mu$  son las constantes de Lamé.

Introduciendo las relaciones tensión-deformación en la ecuación (6) tenemos

$$\mathbf{f}_{int} = \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \mathbf{K} \mathbf{d} \quad (18)$$

donde

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV \quad (19)$$

Es la matriz de rigidez.

### 3 ELEMENTO CUADRILATERO DE CUATRO NODOS

Considere el mapeo del elemento cuadrilátero de cuatro nodos desde el espacio físico al espacio paramétrico, como se muestra en la figura 1. La configuración del elemento patrón en coordenadas  $\xi, \eta$  es un cuadrado biunitario  $[-1,1] \times [-1,1]$ .

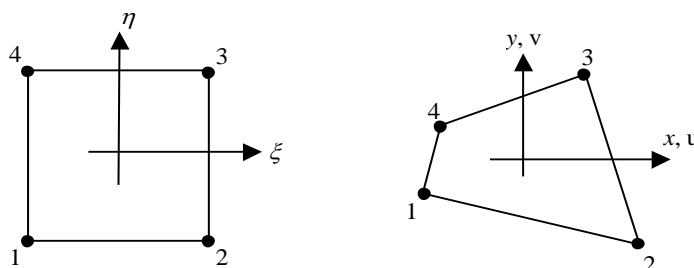


Figure 1. Mapeo del elemento cuadrilateral de cuatro nodos

Las coordenadas espaciales  $x, y$  son interpoladas en el elemento a partir de sus valores nodales  $x_i, y_i$  como

$$x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) x_i = \mathbf{N}^T \mathbf{x} \quad (20)$$

$$y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) y_i = \mathbf{N}^T \mathbf{y}$$

donde  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  son los vectores de coordenadas nodales

$$\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4]^T \quad (21)$$

$$\mathbf{y} = [y_1 \quad y_2 \quad y_3 \quad y_4]^T$$

y  $\mathbf{N}$  es el de funciones de forma bilineales

$$\mathbf{N} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4]^T \quad (22)$$

Las funciones de forma bilineales estándar  $N_i(\xi, \eta)$  son (Zienkiewicz, Taylor y Zhu, 2013)

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) \quad (23)$$

Donde  $\xi_i, \eta_i$  son los valores nodales del elemento patrón en coordenadas paramétricas  $\xi, \eta$ .

Si definimos los vectores  $\mathbf{s}, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}$  y  $\mathbf{h}$  como

$$\mathbf{s} = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T \quad (24)$$

$$\boldsymbol{\xi} = [-1 \quad 1 \quad 1 \quad -1]^T$$

$$\boldsymbol{\eta} = [-1 \quad -1 \quad 1 \quad 1]^T$$

$$\mathbf{h} = [1 \quad -1 \quad 1 \quad -1]^T$$

Luego las funciones de forma bilineales se pueden escribir como:

$$\mathbf{N}(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (\mathbf{s} + \boldsymbol{\xi} \xi + \boldsymbol{\eta} \eta + \mathbf{h} \xi \eta) \quad (25)$$

Las transformaciones de coordenadas del elemento se pueden expresar como:

$$x(\xi, \eta) = a_0 + a_1 \xi + a_2 \eta + a_3 \xi \eta \quad (26)$$

$$y(\xi, \eta) = b_0 + b_1 \xi + b_2 \eta + b_3 \xi \eta$$

donde

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{4} \mathbf{s}^T \mathbf{x} = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)/4 & b_0 &= \frac{1}{4} \mathbf{s}^T \mathbf{y} = (y_1 + y_2 + y_3 + y_4)/4 \\
 a_1 &= \frac{1}{4} \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{x} = (-x_1 + x_2 + x_3 - x_4)/4 & b_1 &= \frac{1}{4} \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{y} = (-y_1 + y_2 + y_3 - y_4)/4 \\
 a_2 &= \frac{1}{4} \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{x} = (-x_1 - x_2 + x_3 + x_4)/4 & b_2 &= \frac{1}{4} \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{y} = (-y_1 - y_2 + y_3 + y_4)/4 \\
 a_3 &= \frac{1}{4} \mathbf{h}^T \mathbf{x} = (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)/4 & b_3 &= \frac{1}{4} \mathbf{h}^T \mathbf{y} = (y_1 - y_2 + y_3 - y_4)/4
 \end{aligned} \quad (27)$$

Las derivadas de las funciones de forma (25) con respecto a las coordenadas paramétricas  $\xi, \eta$  son

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi} = \frac{1}{4} (\boldsymbol{\xi} + \eta \mathbf{h}) \quad (28)$$

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \eta} = \frac{1}{4} (\boldsymbol{\eta} + \xi \mathbf{h})$$

La relación entre las derivadas de las funciones de forma con respecto a las coordenadas paramétricas  $\xi, \eta$ , y con respecto a las coordenadas físicas,  $x, y$  viene dado por la regla de la cadena

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (29)$$

Las derivadas en ambos sistemas están relacionadas por la matriz Jacobiana

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (30)$$

donde las derivadas se obtienen de (26) como

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial x}{\partial \xi} &= a_1 + a_3 \eta & \frac{\partial y}{\partial \xi} &= b_1 + b_3 \eta \\
 \frac{\partial x}{\partial \eta} &= a_2 + a_3 \xi & \frac{\partial y}{\partial \eta} &= b_2 + b_3 \xi
 \end{aligned} \quad (31)$$

La relación inversa entre las derivadas de las funciones de forma es

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (32)$$

Donde la inversa de la matriz Jacobiana es

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \quad (33)$$

Siendo  $J$  el *Jacobiano* de la transformación que viene dado por el determinante de la matriz Jacobiana

$$J = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} = J_{00} + J_{10}\xi + J_{01}\eta \quad (34)$$

con

$$J_{00} = a_1 b_2 - a_2 b_1 \quad (35)$$

$$J_{10} = a_1 b_3 - a_3 b_1$$

$$J_{01} = a_3 b_2 - a_2 b_3$$

El área del elemento cuadrilateral se puede obtener integrando el Jacobiano

$$A = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 J(\xi, \eta) d\xi d\eta = 4J_{00} \quad (36)$$

Donde hemos hecho uso de las propiedades

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 d\xi d\eta = 4, \quad \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \xi d\xi d\eta = 0, \quad \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \eta d\xi d\eta = 0 \quad (37)$$

El coeficiente  $J_{00}$  es siempre positivo e igual a un cuarto del área del elemento. Para un elemento rectangular o paralelogramo tenemos  $a_3 = b_3 = 0$ , esto implica que  $J_{10} = J_{01} = 0$  y el Jacobiano es constante para estas formas de elemento.

Luego el Jacobiano se puede escribir como

$$J(\xi, \eta) = J_{00}(1 + \gamma_{10}\xi + \gamma_{01}\eta) \quad (38)$$

donde

$$\gamma_{10} = J_{10}/J_{00} \quad (39)$$

$$\gamma_{01} = J_{01}/J_{00}$$

Estos coeficientes se pueden interpretar como medidores de distorsión de la geometría del elemento (Yuan, Huang y Pian, 1994).

Luego de (29) podemos obtener las derivadas de las funciones de forma del elemento con respecto a las coordenadas físicas  $x$ ,  $y$  como

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} = \frac{1}{J} \left( \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) \quad (40)$$

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} = \frac{1}{J} \left( -\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \right)$$

### 3.1 Matriz gradiente para interpolación bilineal de desplazamientos

Los desplazamientos  $u$ ,  $v$  son interpolados con las mismas funciones de forma usadas para describir la geometría del elemento, esto es

$$\begin{aligned} u(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) u_i = \mathbf{N}^T \mathbf{u} \\ v(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) v_i = \mathbf{N}^T \mathbf{v} \end{aligned} \quad (41)$$

donde  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  son vectores de desplazamientos nodales y las funciones de forma bilineal se pueden escribir como:

$$\mathbf{N}(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (\mathbf{s} + \xi \xi + \eta \eta + \mathbf{h} \xi \eta) \quad (42)$$

De la ec. (23) la matriz gradiente  $\mathbf{B}$  es

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial y} & \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x} \end{bmatrix} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \mathbf{b}\mathbf{x}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{b}\mathbf{y}^T \\ \mathbf{b}\mathbf{y}^T & \mathbf{b}\mathbf{x}^T \end{bmatrix} \quad (43)$$

Donde  $\mathbf{b}\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{b}\mathbf{y}$  serán llamados *vectores gradiente* y de la ec. (41) se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}\mathbf{x} &= J \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \mathbf{b}\mathbf{y} &= J \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} = -\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{aligned} \quad (44)$$

Luego de sustituir las derivadas de las funciones de forma de la ec. (28) y las derivadas de las coordenadas  $x$ ,  $y$  con respecto a las coordenadas paramétricas  $\xi$ ,  $\eta$  with respect to  $x$ ,  $y$  de (31) tenemos

$$\mathbf{b}\mathbf{x} = \mathbf{b}\mathbf{x}_{00} + \mathbf{b}\mathbf{x}_{10}\xi + \mathbf{b}\mathbf{x}_{01}\eta \quad (45)$$

$$\mathbf{b}\mathbf{y} = \mathbf{b}\mathbf{y}_{00} + \mathbf{b}\mathbf{y}_{10}\xi + \mathbf{b}\mathbf{y}_{01}\eta$$

Donde los vectores gradiente  $\mathbf{b}\mathbf{x}_{pq}$ ,  $\mathbf{b}\mathbf{y}_{pq}$  se definen como

$$\begin{aligned} \mathbf{b}\mathbf{x}_{00} &= (\xi b_2 - \eta b_1) / 4 & \mathbf{b}\mathbf{y}_{00} &= (\eta a_1 - \xi a_2) / 4 \\ \mathbf{b}\mathbf{x}_{10} &= (-\mathbf{h} b_1 + \xi b_3) / 4 & \mathbf{b}\mathbf{y}_{10} &= (\mathbf{h} a_1 - \xi a_3) / 4 \\ \mathbf{b}\mathbf{x}_{01} &= (\mathbf{h} b_2 - \eta b_3) / 4 & \mathbf{b}\mathbf{y}_{01} &= (-\mathbf{h} a_2 + \eta a_3) / 4 \end{aligned} \quad (46)$$

Luego la matriz gradiente  $\mathbf{B}(\xi, \eta)$  se puede escribir como



$$\mathbf{B}(\xi, \eta) = \frac{1}{J} (\mathbf{B}_{00} + \mathbf{B}_{10} \xi + \mathbf{B}_{01} \eta) \quad (47)$$

Donde las matrices  $\mathbf{B}_{pq}$  serán llamadas *matrices gradiente de orden p, q*

$$\mathbf{B}_{pq} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}\mathbf{x}_{pq}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{b}\mathbf{y}_{pq}^T \\ \mathbf{b}\mathbf{y}_{pq}^T & \mathbf{b}\mathbf{x}_{pq}^T \end{bmatrix} \quad (48)$$

#### 4 MATRIZ DE RIGIDEZ APROXIMADA

En (Liu, Ong y Uras, 1985) se propone aproximar la matriz gradiente  $\mathbf{B}(\xi, \eta)$  mediante series de Taylor alrededor del centroide del elemento y retener hasta términos lineales resultando

$$\mathbf{B}(\xi, \eta) \approx \bar{\mathbf{B}}(\xi, \eta) = \mathbf{B}(\mathbf{0}) + \mathbf{B}_{,\xi}(\mathbf{0})\xi + \mathbf{B}_{,\eta}(\mathbf{0})\eta \quad (49)$$

Donde

$$\mathbf{B}(\mathbf{0}) = \frac{1}{J_0} (\mathbf{B}_{00}) \quad (50)$$

$$\mathbf{B}_{,\xi}(\mathbf{0}) = \frac{1}{J_0} (\mathbf{B}_{10} - \gamma_1 \mathbf{B}_{00})$$

$$\mathbf{B}_{,\eta}(\mathbf{0}) = \frac{1}{J_0} (\mathbf{B}_{01} - \gamma_2 \mathbf{B}_{00})$$

La justificación de esta aproximación radica en el hecho de que si el jacobiano  $J$  es constante, lo cual sucede para un elemento de forma regular, ya sea rectangular o paralelogramo, entonces esta matriz gradiente aproximada coincide con la exacta. Luego si podemos asegurar que si refinando el elemento en el límite este tiende a una forma regular, lo cual se consigue subdividiendo el elemento por los puntos medios de los lados, entonces esta aproximación es convergente. Luego la matriz de rigidez se puede aproximar como

$$\mathbf{K} \approx \int_V \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{C} \bar{\mathbf{B}} dV = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 t \bar{\mathbf{B}}^T \mathbf{C} \bar{\mathbf{B}} J_0 d\xi d\eta \quad (51)$$

donde  $t$  es el espesor del elemento y siguiendo a (Liu, Ong y Uras, 1985) se ha asumido el jacobiano constante para el cálculo del diferencial  $dV$ .

Sustituyendo la matriz gradiente aproximada e integrando llevando en cuenta las siguientes propiedades

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \xi \eta d\xi d\eta = 0, \quad \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \xi^2 d\xi d\eta = \frac{4}{3}, \quad \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \eta^2 d\xi d\eta = \frac{4}{3} \quad (52)$$

La matriz de rigidez aproximada resulta

$$\mathbf{K} \approx \tilde{\mathbf{K}}^C + \tilde{\mathbf{K}}^S \quad (53)$$

Donde la primera matriz es la llamada matriz de rigidez *consistente*

$$\mathbf{K}^C = \mathbf{K}_{00} \quad (54)$$

Siendo  $\mathbf{K}_{00}$

$$\mathbf{K}_{00} = \frac{4t}{J_{00}} \mathbf{B}_{00}^T \mathbf{C} \mathbf{B}_{00} \quad (55)$$

La segunda matriz de la expresión (53) es la llamada matriz de *estabilización*

$$\mathbf{K}^S = \frac{1}{3} (\tilde{\mathbf{K}}_{20} + \tilde{\mathbf{K}}_{02}) \quad (56)$$

Donde

$$\tilde{\mathbf{K}}_{20} = \mathbf{K}_{20} - \gamma_1 \mathbf{K}_{10} + \gamma_1^2 \mathbf{K}_{00} \quad (57)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_{02} = \mathbf{K}_{02} - \gamma_2 \mathbf{K}_{01} + \gamma_2^2 \mathbf{K}_{00}$$

Siendo las matrices de rigidez  $\mathbf{K}_{ij}$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{10} &= \frac{4t}{J_0} (\mathbf{B}_{00}^T \mathbf{C} \mathbf{B}_{10} + \mathbf{B}_{10}^T \mathbf{C} \mathbf{B}_{00}) & \mathbf{K}_{20} &= \frac{4t}{J_0} \mathbf{B}_{10}^T \mathbf{C} \mathbf{B}_{10} \\ \mathbf{K}_{01} &= \frac{4t}{J_0} (\mathbf{B}_{00}^T \mathbf{C} \mathbf{B}_{01} + \mathbf{B}_{01}^T \mathbf{C} \mathbf{B}_{00}) & \mathbf{K}_{02} &= \frac{4t}{J_0} \mathbf{B}_{01}^T \mathbf{C} \mathbf{B}_{01} \end{aligned} \quad (58)$$

La matriz de rigidez consistente  $\mathbf{K}^C$  es la matriz que obtendría integrando con un punto de integración. Esta matriz provee las fuerzas internas exactas para cualquier estado de deformación constante y asegura la convergencia del elemento. Sin embargo, es sabido (Liu, Ong y Uras, 1985; Liu y Belytschko, 1984) que esta matriz tiene deficiencias de rango y posee dos modos propios además de los modos asociados con movimientos de cuerpo rígido. La matriz de estabilización  $\mathbf{K}^S$  elimina estos modos espurios de la matriz de rigidez aproximada proveyendo estabilidad a la aproximación.

#### 4.1 Expresión alternativa simplificada para la matriz de estabilización

Para un campo de desplazamientos lineal la matriz de estabilización  $\mathbf{K}^S$  no debe proveer fuerzas internas, ya que en este caso la matriz de rigidez consistente provee los valores correctos. Luego las fuerzas internas generadas por la matriz de estabilización deben ser producidas por campos de desplazamientos ortogonales a un campo de desplazamiento lineal.

Si definimos un vector  $\boldsymbol{\gamma}$  (Liu, Ong y Uras, 1985; Liu y Belytschko, 1984) como

$$\boldsymbol{\gamma} = \alpha_1 \mathbf{s} + \alpha_2 \boldsymbol{\xi} + \alpha_3 \boldsymbol{\eta} + \mathbf{h} \quad (59)$$

Donde hemos utilizado el hecho de que los vectores  $\mathbf{s}$ ,  $\boldsymbol{\xi}$ ,  $\boldsymbol{\eta}$  and  $\mathbf{h}$  forman una base. Si imponemos la condición de ortogonalidad de este vector con un campo de desplazamientos lineales, esto implica que para valores arbitrarios  $\beta_0$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  debemos tener

$$\boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{d}_L = (\alpha_0 \mathbf{s}^T + \alpha_1 \boldsymbol{\xi}^T + \alpha_2 \boldsymbol{\eta}^T + \mathbf{h}^T) (\beta_0 \mathbf{s} + \beta_1 \mathbf{x} + \beta_2 \mathbf{y}) = \mathbf{0} \quad (60)$$

Luego de algún algebra tenemos

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = -\gamma_{01}, \quad \alpha_2 = -\gamma_{10} \quad (61)$$

resultando

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{h} - \gamma_{01}\boldsymbol{\xi} - \gamma_{10}\boldsymbol{\eta} \quad (62)$$

Este vector  $\boldsymbol{\gamma}$  es conocido como el *vector de estabilización*, y de esta ecuación podemos despejar

$$\mathbf{h} = \boldsymbol{\gamma} + \gamma_{01}\boldsymbol{\xi} + \gamma_{10}\boldsymbol{\eta} \quad (63)$$

Sustituyendo el vector  $\mathbf{h}$  en las expresiones (46) de los vectores gradiente tenemos

$$\mathbf{b}\mathbf{x}_{10} = [-b_1\boldsymbol{\gamma} - (\gamma_{01}b_1 - b_3)\boldsymbol{\xi} - \gamma_{10}b_1\boldsymbol{\eta}]/4 \quad \mathbf{b}\mathbf{y}_{10} = [a_1\boldsymbol{\gamma} + (\gamma_{01}a_1 - a_3)\boldsymbol{\xi} + \gamma_{10}a_1\boldsymbol{\eta}]/4 \quad (64)$$

$$\mathbf{b}\mathbf{x}_{01} = [b_2\boldsymbol{\gamma} + \gamma_{01}b_2\boldsymbol{\xi} + (\gamma_{10}b_2 - b_3)\boldsymbol{\eta}]/4 \quad \mathbf{b}\mathbf{y}_{01} = [-a_2\boldsymbol{\gamma} - \gamma_{01}a_2\boldsymbol{\xi} - (\gamma_{10}a_2 - a_3)\boldsymbol{\eta}]/4$$

Luego las matrices de estabilización se pueden escribir como

$$\tilde{\mathbf{K}}_{20} = \mathbf{K}_{20} - \gamma_{10}\mathbf{K}_{10} + \gamma_{10}^2\mathbf{K}_{00} = \frac{4t}{J_{00}} [(\mathbf{B}_{10}^T - \gamma_{10}\mathbf{B}_{00}^T)\mathbf{C}(\mathbf{B}_{10} - \gamma_{10}\mathbf{B}_{00})] \quad (65)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_{02} = \mathbf{K}_{02} - \gamma_{01}\mathbf{K}_{01} + \gamma_{01}^2\mathbf{K}_{00} = \frac{4t}{J_{00}} [(\mathbf{B}_{01}^T - \gamma_{01}\mathbf{B}_{00}^T)\mathbf{C}(\mathbf{B}_{01} - \gamma_{01}\mathbf{B}_{00})]$$

donde

$$\begin{aligned} (\mathbf{B}_{10} - \gamma_{10}\mathbf{B}_{00}) &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -b_1\boldsymbol{\gamma} & 0 \\ 0 & a_1\boldsymbol{\gamma} \\ a_1\boldsymbol{\gamma} & -b_1\boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix} \\ (\mathbf{B}_{01} - \gamma_{01}\mathbf{B}_{00}) &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} b_2\boldsymbol{\gamma} & 0 \\ 0 & -a_2\boldsymbol{\gamma} \\ -a_2\boldsymbol{\gamma} & b_2\boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (66)$$

Luego la matriz de estabilización se puede escribir como

$$\mathbf{K}^S = \frac{t}{12J_0} \begin{bmatrix} h_{11}\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\gamma}^T & h_{12}\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\gamma}^T \\ h_{12}\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\gamma}^T & h_{22}\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\gamma}^T \end{bmatrix} \quad (67)$$

donde

$$h_{11} = C_{11}(b_1^2 + b_2^2) + C_{33}(a_1^2 + a_2^2) \quad (68)$$

$$h_{12} = -(C_{12} + C_{33})(a_1b_1 + a_2b_2)$$

$$h_{22} = C_{22}(a_1^2 + a_2^2) + C_{33}(b_1^2 + b_2^2)$$

Siendo  $C_{pq}$  los coeficientes de la matriz constitutiva

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix} \quad (69)$$

Para el caso de un material elástico lineal, ec. (16), los coeficientes  $h_{pq}$  son

$$\begin{aligned}
 h_{11} &= (\bar{\lambda} + 2\mu)(b_1^2 + b_2^2) + \mu(a_1^2 + a_2^2) \\
 h_{12} &= -(\bar{\lambda} + \mu)(a_1b_1 + a_2b_2) \\
 h_{22} &= (\bar{\lambda} + 2\mu)(a_1^2 + a_2^2) + \mu(b_1^2 + b_2^2)
 \end{aligned}
 \tag{70}$$

Notemos que el esfuerzo computacional se reduce notablemente para el cálculo de la matriz de estabilización.

## 5 INTEGRACIÓN NODAL PARA PLASTICIDAD Y CONTACTO

El elemento mostrado previamente ha sido presentado en (Liu, Hu y Belytschko, 1994; Liu et al., 1998), sin embargo para su utilización se sugiere utilizar una regla de integración, poco ortodoxa, de dos puntos de integración sobre una de las diagonales del elemento. El argumento utilizado es que la utilización de un único punto de integración es insuficiente para predecir adecuadamente la evolución de un frente plástico.

En este trabajo se propone utilizar como puntos de integración los vértices del elemento. Notemos que en una malla de cuadriláteros hay aproximadamente la misma cantidad de vértices que elementos (Ewing, Fawkes and Griffiths, 1970), por lo tanto la cantidad de puntos de integración es equivalente a la utilización de un punto por elemento.

Además, la utilización de los vértices presenta varias ventajas: 1) las variables elastoplásticas se comparten con todos los elementos vinculados al nodo, 2) mejora la captura de frentes de plasticidad por estar en el contorno del elemento, 3) en el caso de refinamiento adaptativo de la malla se conservan los valores calculados en los vértices ya que estos vértices se comparten con las mallas más finas sin necesidad de extrapolar variables elastoplásticas. Por el lado de las desventajas se tiene que se requiere utilizar valores únicos de las deformaciones y tensiones en los vértices lo que obliga a un postprocesamiento para hallar estos valores.

Aquí se propone mantener las mismas matrices gradientes del elemento estabilizado y utilizar para la matriz constitutiva un promedio de los valores nodales

$$\bar{\mathbf{C}} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 \mathbf{C}_i
 \tag{71}$$

Luego se construye la matriz de rigidez estabilizada utilizando esta matriz constitutiva promediada.

Se puede demostrar de manera simple que podemos llegar a esta expresión si dividimos al elemento en cuatro partes por los puntos medios de los lados y asumimos que cada cuarto posee las propiedades constitutivas del vértice incluido en ese cuarto.

Como mencionamos previamente es necesario obtener valores únicos de deformación en los nodos previo al cálculo de las variables elastoplásticas, para ello se propone extrapolar en cada elemento las deformaciones en sus cuatro puntos de Gauss a los vértices. Para este caso es posible utilizar las técnicas descritas en (Durand y Farias, 2014). Luego estos valores extrapolados deben ser promediados en cada vértice para tener un único valor por vértice.

Luego es posible utilizar los valores postprocesados no sólo para los cálculos nodales sino también para la presentación de resultados suavizados.

## 6 CONCLUSIONES

Existen varias formulaciones (Artioli, Castellazzi y Krysl, 2014; Krysl y Zhu, 2008) que

utilizan la integración nodal, sin embargo son más complejas. La presente formulación está basada en un elemento eficiente (Liu et al., 1998; Liu, Hu y Belytschko, 1994) pero cuya implementación es poco ortodoxa, por ejemplo, los puntos de integración no están distribuidos simétricamente en el elemento. Se está trabajando en la obtención de resultados numéricos.

## REFERENCIAS

- Artioli, E., Castellazzi, G. y Krysl, P., Assumed strain nodally integrated hexahedral finite element formulation for elastoplastic applications, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 99(11), pp. 844–866, 2014.
- Babu, D.K. y Pinder, G.F., Analytical integration formulae for linear isoparametric finite elements, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 20(6), pp. 1153–1163, 1984.
- Belytschko, T., Correction of article by D.P. Flanagan and T. Belytschko, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 19(3), pp. 467–468, 1983.
- Belytschko, T., Ong, J.S.-J., Wing Kam Liu y Kennedy, J.M., Hourglass control in linear and nonlinear problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 43(3), pp. 251–276, 1984.
- Durand, R. y Farias, M.M., A local extrapolation method for finite elements, *Advances in Engineering Software*, 67, pp. 1–9, 2014.
- Ewing, D.J.F., Fawkes, A.J. y Griffiths, J.R., Rules governing the numbers of nodes and elements in a finite element mesh, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2(4), pp. 597–600, 1970.
- Flanagan, D.P. y Belytschko, T., A uniform strain hexahedron and quadrilateral with orthogonal hourglass control, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 17(5), pp. 679–706, 1981.
- Hansbo, P., A new approach to quadrature for finite elements incorporating hourglass control as a special case, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 158(3–4), pp. 301–309, 1998.
- Irons, B. y Ahmad, S., *Techniques of Finite Elements*. E. Horwood, 1980.
- Jacquotte, O.-P. y Oden, J.T., Analysis of hourglass instabilities and control in underintegrated finite element methods, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 44(3), pp. 339–363, 1984.
- Kosloff, D. y Frazier, G.A., Treatment of hourglass patterns in low order finite element codes, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2(1), pp. 57–72, 1978.
- Krysl, P. y Zhu, B., Locking-free continuum displacement finite elements with nodal integration, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 76(7), pp. 1020–1043, 2008.
- Liu, W.K. y Belytschko, T., Efficient linear and nonlinear heat conduction with a quadrilateral element, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 20(5), pp. 931–948, 1984.
- Liu, W.K., Guo, Y., Tang, S. y Belytschko, T., A multiple-quadrature eight-node hexahedral finite element for large deformation elastoplastic analysis, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 154(1), pp. 69–132, 1998.
- Liu, W.K., Hu, Y.-K. y Belytschko, T., Multiple quadrature underintegrated finite elements, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37(19), pp. 3263–3289, 1994.

- Liu, W.K., Ong, J.S.-J. y Uras, R.A., Finite element stabilization matrices-a unification approach, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 53(1), pp. 13–46, 1985.
- Rathod, H.T., Some analytical integration formulae for a four node isoparametric element, *Computers & Structures*, 30(5), pp. 1101–1109, 1988.
- Schulz, J.C., Finite element hourglassing control, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 21(6), pp. 1039–1048, 1985.
- Yuan, K.-Y., Huang, Y.-S. y Pian, T.H.H., Inverse mapping and distortion measures for quadrilaterals with curved boundaries, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37(5), pp. 861–875, 1994.
- Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. y Zhu, J.Z., *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*. 7th edn. Elsevier Butterworth-Heinemann, 2013.