

MODELACIÓN COMPUTACIONAL DEL PUNZONAMIENTO EN LOSAS DE HORMIGÓN ARMADO REFORZADO CON FIBRAS DE ACERO

Fabián Fiengo Pérez^a, Sergio E. Gutiérrez^a y Domingo Sfer^a

^aInvestigadores Instituto de Estructuras, Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología, Universidad Nacional de Tucumán, Av. Independencia 1700, 4000 San Miguel de Tucumán, Argentina, ffiengoperez@facet.unt.edu.ar, sgutierrez@herrera.unt.edu.ar, dsfer@herrera.unt.edu.ar
<http://www.facet.unt.edu.ar/iest>

Palabras Clave: Punzonamiento, Hormigón con fibras.

Resumen. El diseño de losas de hormigón armado reforzado con fibras de acero (HARFA) en grandes estructuras presenta algunas limitaciones si se considera cierto grado de incertidumbre en su comportamiento estructural. La modelación numérica computacional resulta de gran utilidad mediante el uso de modelos materiales que tienen en cuenta los diferentes parámetros que definen las propiedades especiales y específicas de hormigón con fibras. El objetivo general del presente trabajo es exponer un procedimiento de modelación numérica a través del programa computacional ANSYS Mechanical para predecir el comportamiento mecánico de losas de HARFA. Esta simulación numérica permite analizar el punzonamiento, teniendo en cuenta la variación de diversos parámetros mecánicos, diferentes sistemas de apoyo y variación de cuantías de armadura. Los resultados de la modelación numérica realizada se comparan con resultados publicados de ensayos experimentales. Se concluye que la modelación numérica reproduce adecuadamente los resultados experimentales y puede ser usada como una herramienta de diseño y análisis de este tipo de elemento estructural.

1 INTRODUCCIÓN

Son numerosas las ventajas arquitectónicas que brinda la utilización de los entrepisos sin vigas, entre ellas se destacan tener pocas interferencias visuales y permitir a los proyectistas obtener amplios espacios.

Una de las limitantes en el uso de los entrepisos sin vigas, es su posible colapso por punzonamiento; siendo este el esfuerzo cortante de penetración que provoca la falla de las losas cuando se apoyan directamente sobre las columnas.

Para prevenir este problema los reglamentos de diseño de estructuras de hormigón armado, sugieren utilizar como refuerzo de estos entrepisos ábacos (drop panels) y capiteles (capitals) o simplemente ábacos. No obstante, la utilización de estos elementos resta atributos a los entrepisos sin vigas y el hecho de prescindir de los mismos responde a un criterio estructural y no de orden estético.

Por estas razones y teniendo en cuenta las bondades del hormigón reforzado con fibras de acero (HRFA), se considera que su utilización en los entrepisos sin vigas es una opción técnicamente viable para evitar su colapso por punzonamiento y poder prescindir de los ábacos y capiteles cuya construcción exige tiempo y recursos económicos.

2 OBJETIVOS Y ALCANCE

2.1 Objetivo general

Se pretende determinar numéricamente la carga crítica de punzonamiento en losas de hormigón armado reforzado con fibras de acero (HARFA), cuya geometría y cargas son muy similares a las empleadas en los entrepisos sin vigas construidos en nuestro medio.

2.2 Objetivos específicos

- Determinar el comportamiento a tracción y compresión uniaxial del HRFA modelado por medio de un programa computacional de elementos finitos multipropósito.
- Generar modelos de elementos finitos de losas de HARFA, obtener sus curvas carga–desplazamiento y compararlas con las experimentales respectivas.
- Determinar la influencia en los modelos generados, de factores tales como la orientación de las fibras y su volumen de adición.

2.3 Alcance

Los materiales analizados son hormigón reforzado con fibras de acero (HRFA) y acero de armadura de dureza natural. Se consideraron únicamente cargas estáticas y gravitacionales.

3 METODOLOGÍA

3.1 Herramienta computacional

Se empleó el programa computacional de elementos finitos Ansys Mechanical v.14.5, elaborado por la empresa norteamericana Swanson Analysis Systems Inc.

3.2 Criterios para la modelación del hormigón reforzado con fibras de acero en Ansys Mechanical

Ansys Mechanical no cuenta con un elemento finito concebido específicamente para modelar el HRFA. Este programa tiene incorporado el elemento finito SOLID65 empleado comúnmente para modelar hormigón simple y armado. A partir de las opciones de refuerzo del

tipo discreto o disperso (smeared) incorporadas en SOLID65, es posible modelar en Ansys Mechanical el HRFA.

Los parámetros requeridos para realizar esta modelación se determinan según las recomendaciones de Huang (1995), Kachlalev et al. (2001), Zhang (2004), López Lancheros (2012), Majeed (2012), y: Ragab (2013):

- El módulo de elasticidad, coeficiente de Poisson y resistencias a compresión y tracción uniaxial del HRFA.
- La colaboración al corte de la rugosidad entre los agregados:
 - Coeficiente de transferencia de cortante por fisura abierta $\beta_t = 0,3$ (Bangash, 2001).
 - Coeficiente de transferencia de cortante por fisura cerrada $\beta_c = 0,9$ (Zhang, 2004).
- El criterio de falla de cinco parámetros de Willam y Warnke (1974).
- Una rama en compresión de la curva tensión – deformación del HRFA.
- Un refuerzo disperso que emula las fibras de acero añadidas a la matriz de hormigón; orientado en volúmenes iguales en tres direcciones ortogonales X-Y-Z. Para este refuerzo son requeridos tanto el módulo de Young y el coeficiente de Poisson del acero. Se asigna a este refuerzo un comportamiento bilineal y el criterio de falla de Von Mises.

3.2.1 Elemento SOLID65 (Ansys, 2009)

Elemento del tipo brick compuesto por ocho nodos, que poseen únicamente desplazamientos en X, Y y Z (ver figura 1).

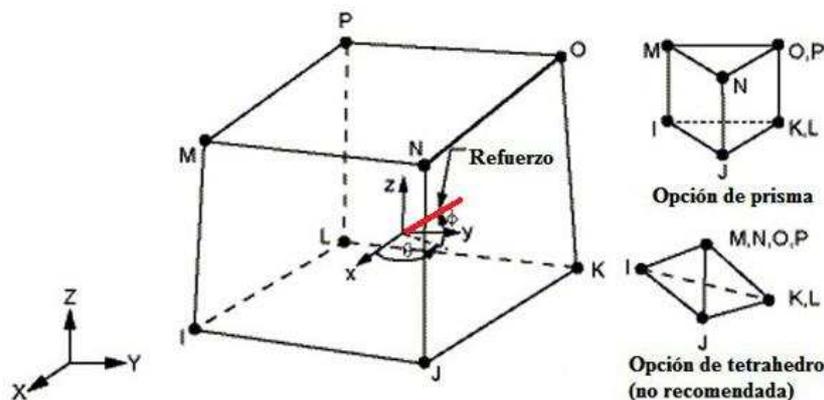


Figura 1. Elemento SOLID65.

Las propiedades elásticas que definen este elemento deben ser isotropas. Es capaz de agrietarse en tracción (en tres direcciones ortogonales), aplastarse en compresión, presentar deformaciones plásticas y tener características reológicas como la fluencia.

Este elemento es utilizado para la generación de las mallas de elementos finitos de los modelos generados. Su configuración hace posible asignar refuerzo de acero a una franja de elementos finitos (ver figura 2), siendo esta una de las características más importantes que permiten modelar el HRFA en Ansys Mechanical.

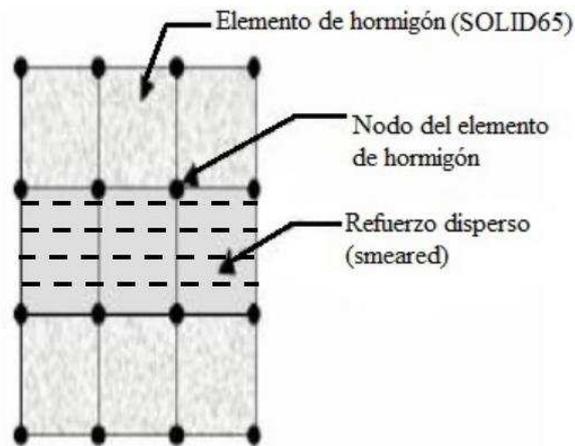


Figura 2. Idealización del refuerzo disperso en Ansys Mechanical (Tavarez, 2001).

3.2.2 El criterio de falla de cinco parámetros con meridianos curvos de Willam y Warnke

Este criterio queda definido por medio de la ecuación (1) (Willam y Warnke, 1974):

$$\frac{F}{f_c} - S \geq 0 \quad (1)$$

Donde:

- F Función del estado de tensiones principales ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$)
- S Superficie de falla expresada en términos de las tensiones principales y de cinco parámetros dato ($f_t, f_c, f_{cb}, f_1, f_2$).
- f_t Resistencia última a tracción uniaxial.
- f_c Resistencia última a compresión uniaxial.

En este trabajo se considera que el estado de tensiones es bajo, cumpliéndose lo indicado en la ecuación (2):

$$|\sigma_h| \leq \sqrt{3}f_c \quad (2)$$

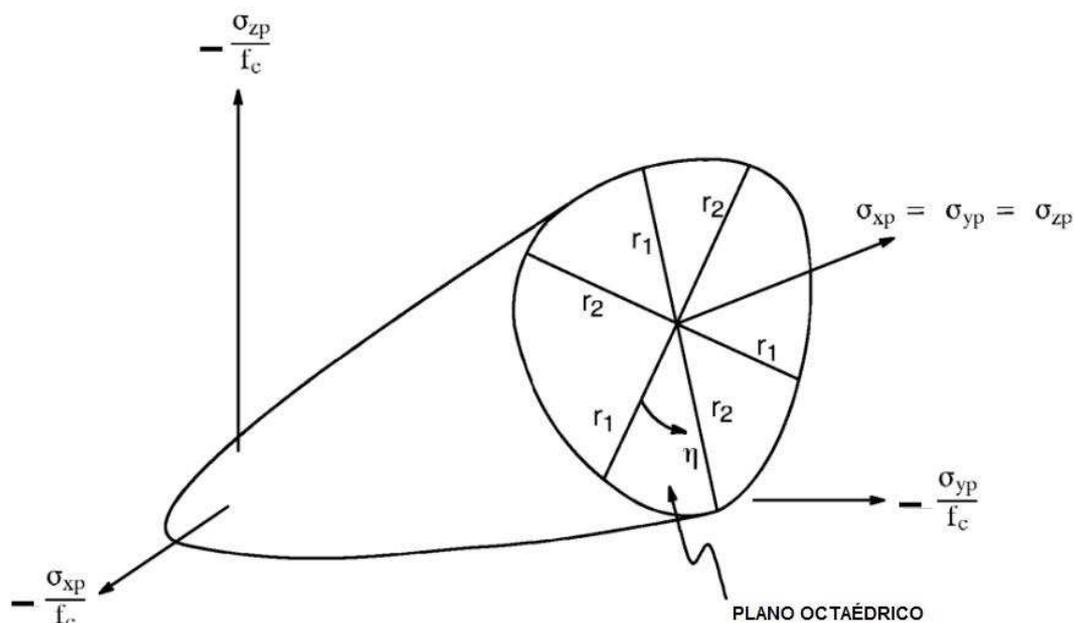
Siendo $\sigma_h = \frac{1}{3}(\sigma_{xp}, \sigma_{yp}, \sigma_{zp})$ la tensión hidrostática. De esta forma, la superficie de falla S queda definida por medio de los parámetros f_t y f_c ; los otros parámetros asumen por defecto los siguientes valores:

$$f_{cb} = 1.2f_c \quad (3)$$

$$f_1 = 1.45f_c \quad (4)$$

$$f_2 = 1.725f_c \quad (5)$$

En la figura 3, se presenta la superficie de falla S graficada en el plano octaédrico.

Figura 3. Superficie de falla S .

3.2.3 Refuerzo disperso de las fibras de acero agregadas al hormigón

En Huang V.Z. (1995) se presenta una expresión analítica para calcular el refuerzo disperso que simula la adición de fibras de acero al elemento SOLID65. Este refuerzo se llamó “refuerzo disperso equivalente” $\bar{\rho}_s$; que es calculado por medio de la ecuación (6):

$$\bar{\rho}_s = \frac{\beta_{z,f}}{\beta_s} \quad (6)$$

Donde:

- $\bar{\rho}_s$ Refuerzo disperso equivalente de fibras de acero.
- β_s Límite elástico de las fibras de acero determinado para una deformación del hormigón a primera fisura $\varepsilon'_R = 0.2 \text{ ‰}$, ver Nuñez Lopez (2011).
- $\beta_{z,f}$ Resistencia residual a tracción del HRFA.

La resistencia residual a tracción $\beta_{z,f}$ del elemento reforzado con fibras de acero, debe ser obtenida por medio del ensayo de flexo tracción con aplicación de carga en cuatro puntos, realizado en probetas prismáticas de 15 x 15 x 70 centímetros. Ver DAfStB (2012).

En caso de no contar con resultados experimentales, este valor puede ser determinado por medio de la expresión analítica propuestas por Huang V.Z. (1995) y Fiengo Perez (2016).

En la figura 4 se muestra la distribución de tensiones en una viga de HRFA en el estado agrietado (estado II); el hormigón aporta una resistencia igual a $\beta_{z,f}$.

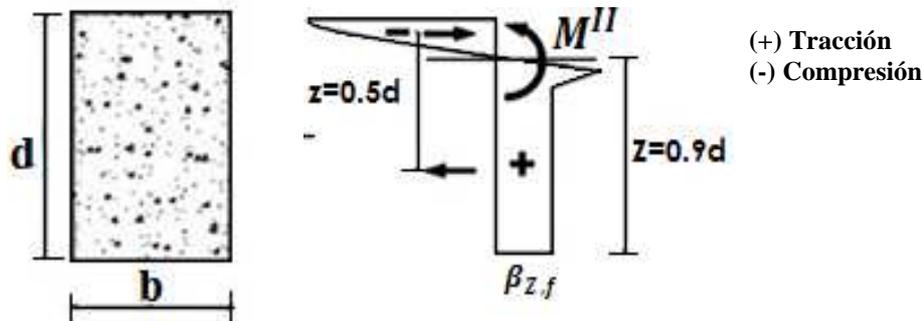
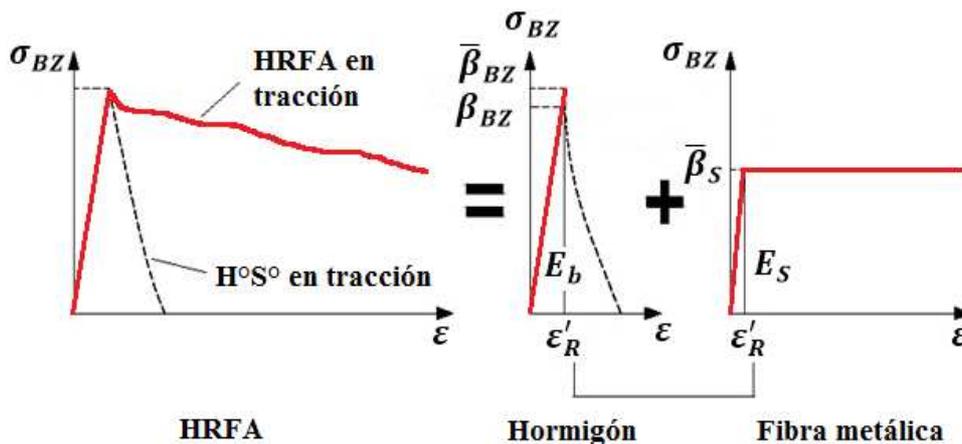


Figura 4. Distribución de tensiones en una viga de HRFA en estado fisurado.

Una vez que se produce la primera fisura en el hormigón, correspondiente a una deformación ϵ'_R las fibras de acero se deslizan y llegan a plastificarse; por lo cual se les asigna un comportamiento bilineal y un límite elástico $\bar{\rho}_s$ determinado para ϵ'_R .

La expresión para calcular $\bar{\rho}_s$ considera tanto las resistencias a tracción post agrietamiento del hormigón como las fibras de acero (ver figura 5).



Nota: $\bar{\beta}_{BZ} = 1.15\beta_{BZ}$

Figura 5. Comportamiento a tracción del HRFA a primera fisura de acuerdo con Huang V.Z.

3.2.4 Elemento LINK180

El elemento LINK180, es empleado para la generación de la malla de elementos finitos correspondiente a la armadura de refuerzo de las losas a ser modeladas.

Este elemento finito unidimensional posee dos nodos, donde cada nodo tiene únicamente desplazamientos en X, Y y Z (ver figura 6a). Es importante destacar que este elemento solo puede soportar esfuerzos axiales de tracción o compresión, que lo convierte en el más indicado para generar refuerzos del tipo discreto (ver figura 6b).

El refuerzo discreto es una sucesión de elementos Link180; debiendo procurarse que cada nodo de los elementos LINK180 coincida con los nodos de los elementos Solid65 adyacentes para garantizar la compatibilidad de deformaciones entre ambos.

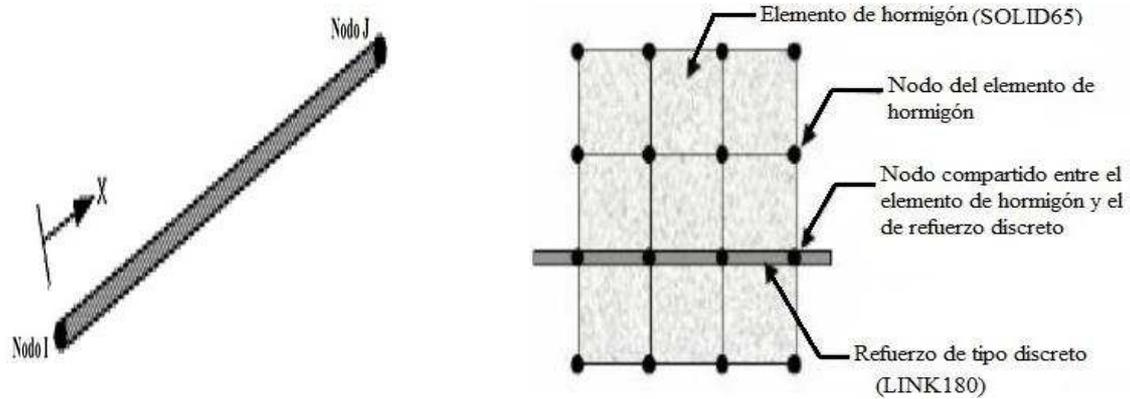


Figura 6. a) Elemento LINK180 y b) Refuerzo discreto.

4 MODELOS DE ELEMENTOS FINITOS GENERADOS

4.1 Ensayos de compresión y tracción uniaxial

Se modelaron los ensayos de compresión y tracción uniaxial empleando probetas cilíndricas de 10 cm de diámetro y 20 cm de altura, tanto de hormigón simple como de HRFA con adiciones de 40 y 60 kilogramos de fibras por metro cúbico de hormigón.

La geometría y condiciones de borde de las probetas permitió generar los modelos a partir de una cuarta parte de la geometría (ver figura 7).

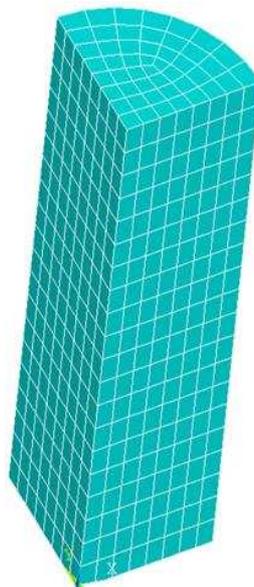


Figura 7. Malla de elementos finitos empleada para los modelos de tracción y compresión uniaxial.

La figura 8 muestra las condiciones de borde empleadas.

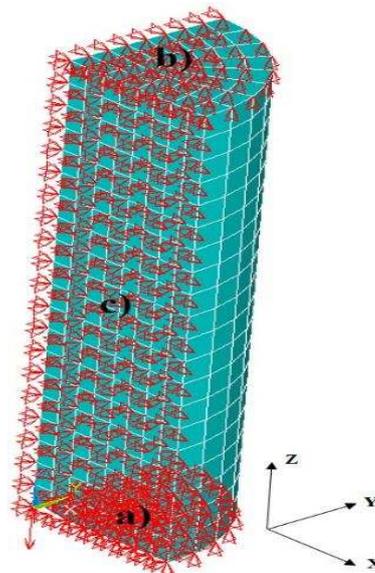


Figura 8. Condiciones de borde a) Desplazamientos en $X=Y=Z=0$, b) Desplazamientos en $X=Y=0, Z \neq 0$ y c) Condiciones de simetría.

4.2 Losas de hormigón armado

Con la finalidad de estudiar el punzonamiento se generaron modelos de losas de hormigón armado a partir de tres losas ensayadas en el Instituto de Estructuras de la Universidad Nacional de Tucumán (Villegas, 2009 e Isla, 2008). Estas losas fueron de forma octogonal (doblemente simétricas), de 1.8 metros de lado, 15 centímetros de espesor. Los modelos generados fueron llamados LT1, LT2 y LT3 (ver tabla 1).

Losa	Espesor [mm]	d [mm]	Armadura	f'_c [MPa] (1)	f_t [MPa] (2)	E_c [MPa] (3)	f_y [MPa] (4)	E_s [GPa] (5)
LT1	150	125	Ø8 c/10 cm	30	1.5	30000	420	210
LT2	150	125	Ø10 c/10 cm	30	1.5	30000	420	210
LT3	150	125	Ø10 c/ 5 cm	30	1.5	30000	420	210

(1) Resistencia cilíndrica a compresión del hormigón.

(2) Resistencia uniaxial a tracción del hormigón.

(3) Módulo de Young del hormigón.

(4) Límite de fluencia del acero de refuerzo.

(5) Módulo de Young del acero de refuerzo.

Tabla1. Detalle de refuerzo y propiedades mecánicas de los materiales de los modelos LT1, LT2 y LT3.

En el ensayo experimental de estas losas (ver figura 9), las mismas fueron sujetadas a la losa reactiva del laboratorio por medio de pernos de anclaje que impedían su desplazamiento vertical. La carga se aplicó al vástago de las columnas (empotradas a las losas) por medio de un actuador hidráulico situado debajo de las losas.



Figura 9. Montaje del ensayo experimental de los modelos LT1, LT2 y LT3 [16].

En la figura 10 se aprecian las condiciones de borde y cargas impuestas para la generación de los modelos LT1, LT2 y LT3. En esta figura “a)” representa la definición de simetría, “b)” el desplazamiento aplicado en Z que representa la presión ejercida por el actuador hidráulico, “c)” la restricción de grados de libertad en X, Y y Z que emula a los pernos de sujeción, “d)” la restricción de desplazamiento en Y. Finalmente “e)” representa la restricción de desplazamiento en X.

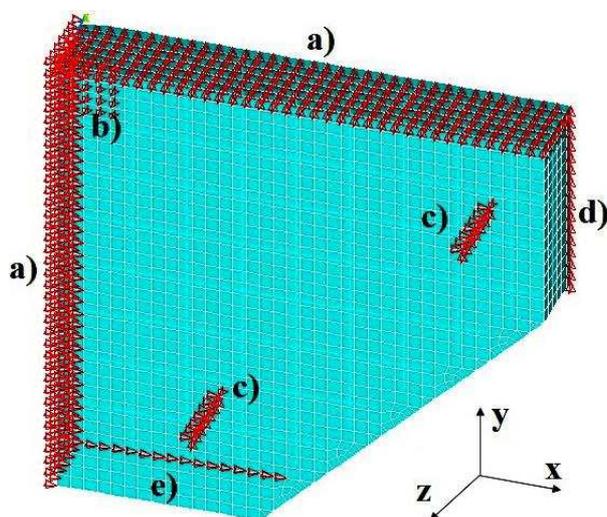


Figura 10. Modelos de elementos finitos LT1, LT2 y LT3.

4.3 Losas de hormigón armado reforzado con fibras de acero

A partir de los resultados experimentales obtenidos por [Higashiyama et al \(2011\)](#) y por [Cheng y Parra \(2010\)](#); se generaron 4 modelos de elementos finitos de losas cuadradas de HARFA. Estos modelos fueron llamados LC10, LC14, LC15 y LC18, porque sus espesores fueron 10, 14, 15 y 18 centímetros respectivamente. En la tabla 2 se presentan el detalle del refuerzo y las propiedades mecánicas de los materiales de estas losas y en la tabla 3 se presentan las características de las fibras de acero empleadas.

Losa	Espesor [mm]	d [mm]	Armadura	V_f % (1)	f'_c [MPa] (2)	f_t [MPa] (3)	E_c [MPa] (4)	f_y [MPa] (5)	E_s [GPa] (6)
LC10	100	75	Ø10 c/12 cm	0.67	24.6	1.45	22600	377	210
LC14	140	115	Ø10 c/12 cm	0.67	24.6	1.45	22600	377	210
LC15	150	125	Ø12 c/15 cm	1.00	25.4	1.5	22680	420	210
LC18	180	155	Ø10 c/12 cm	0.67	24.6	1.45	22600	377	210

(1) Volumen de fibras de acero añadido.

(4) Módulo de Young del hormigón.

(2) Resistencia cilíndrica a compresión del hormigón.

(5) Límite de fluencia del acero de refuerzo.

(3) Resistencia uniaxial a tracción del hormigón.

(6) Módulo de Young del acero de refuerzo.

Tabla 2. Detalle de refuerzo y propiedades mecánicas de los materiales de los modelos LC10, LC14, LC15 y LC18.

Losa	Tipo de fibra	Longitud [mm]	Diámetro [mm]	f_{yf} [MPa] (1)	E_{sf} [GPa] (2)
LC10	Con ganchos	30	0.62	1119	210
LC14	Con ganchos	30	0.62	1119	210
LC15	Con ganchos	30	0.55	1100	210
LC18	Con ganchos	30	0.62	1119	210

(1) Límite de fluencia de las fibras de acero.

(2) Módulo de Young de las fibras de acero.

Tabla 3. Características de las fibras de acero utilizadas.

En la figura 11 se muestra el montaje de los ensayos experimentales de los modelos LC10, LC14, LC15 y LC18.

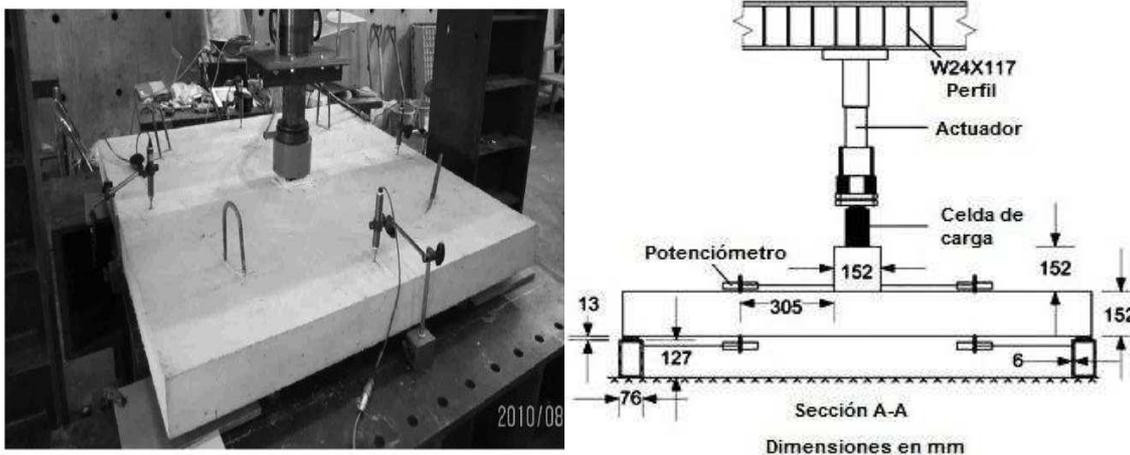


Figura 11. Montaje de los ensayos experimentales, a) Modelos LC10, LC14, LC18 Higashiyama et al (2011) y b) Modelo LC15 Cheng y Parra (2010).

Las losas de los modelos LC10, LC14 y LC18 son de 120 x 120 cm con una luz libre entre apoyos de 100 cm, a su vez la losa del modelo LC15 es de 150 x 150 cm.

Considerando que la geometría, condiciones de borde y cargas de las losas eran doblemente simétricas, sus respectivos modelos de elementos finitos se generaron a partir de una cuarta

parte de las geometrías.

Los modelos LC10, LC14 y LC18 son de 60 x 60 cm y la luz libre entre sus apoyos es de 50 cm. En la figura 12 se puede apreciar la malla de elementos finitos y las condiciones de borde de estos modelos. En esta figura, “a)” representa los nodos en los que se impuso desplazamientos en Z que cumplen la función de emular el empuje constante aplicado por el actuador hidráulico a las losas, “b)” representa la definición de las condiciones de simetría, “c)” indica la restricción de desplazamientos en X y Z (apoyos), “d)” indica la restricción de desplazamientos en Y y Z (apoyos) y “e)” es un nodo de esquina donde se restringen los desplazamientos en X, Y y Z.

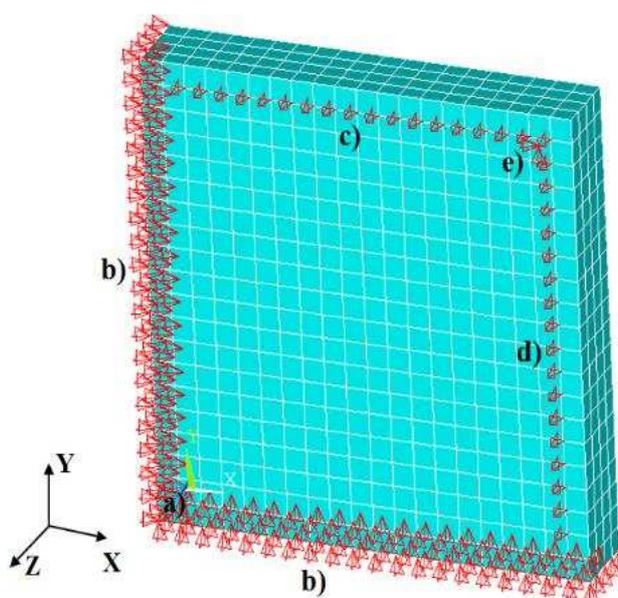


Figura 12. Malla de elementos finitos y condiciones de borde de los modelos LC10, LC14 y LC18.

El modelo LC15 es de 75 x 75 cm, de acuerdo con la figura 13, “a)” representa los nodos en los que se impuso desplazamientos en Z que cumplen la función de emular el empuje constante aplicado por el actuador hidráulico a las losas, “b)” representa la definición de las condiciones de simetría, “c)” indica la restricción de desplazamientos en X y Z (apoyos), “d)” indica la restricción de desplazamientos en Y y Z (apoyos) y “e)” son los nodos de esquina donde se restringen los desplazamientos en X, Y y Z.

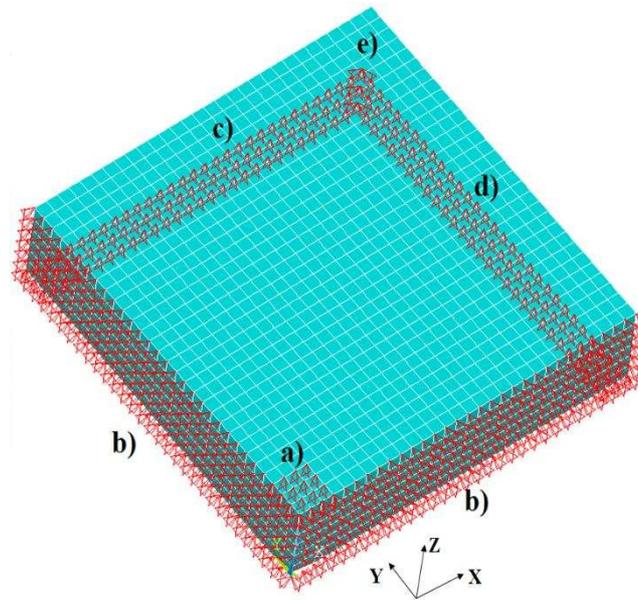


Figura 13. Malla de elementos finitos y condiciones de borde del modelo LC15.

5 RESULTADOS OBTENDOS

5.1 Ensayos de compresión y tracción uniaxial

Las curvas tensión – deformación obtenidas muestran tanto en compresión (figura 14) como en tracción uniaxial (figura 15), que la adición de fibras de acero aumenta la resistencia del material.

Se aprecia también que una vez alcanzadas las resistencias a compresión y a tracción, el material falla por aplastamiento o por agrietamiento. Ansys Mechanical representa la falla por medio de una caída abrupta de la resistencia, no pudiendo apreciarse las ramas de ablandamiento.

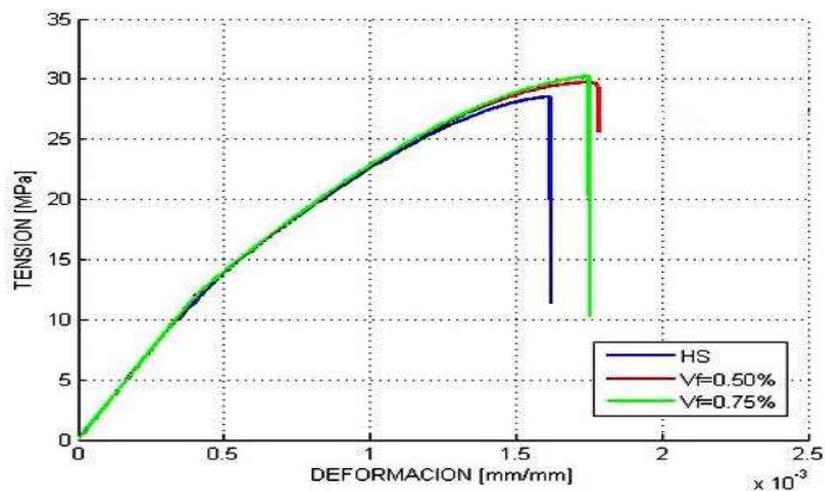


Figura 14. Rama en compresión de las curvas tensión – deformación obtenidas.

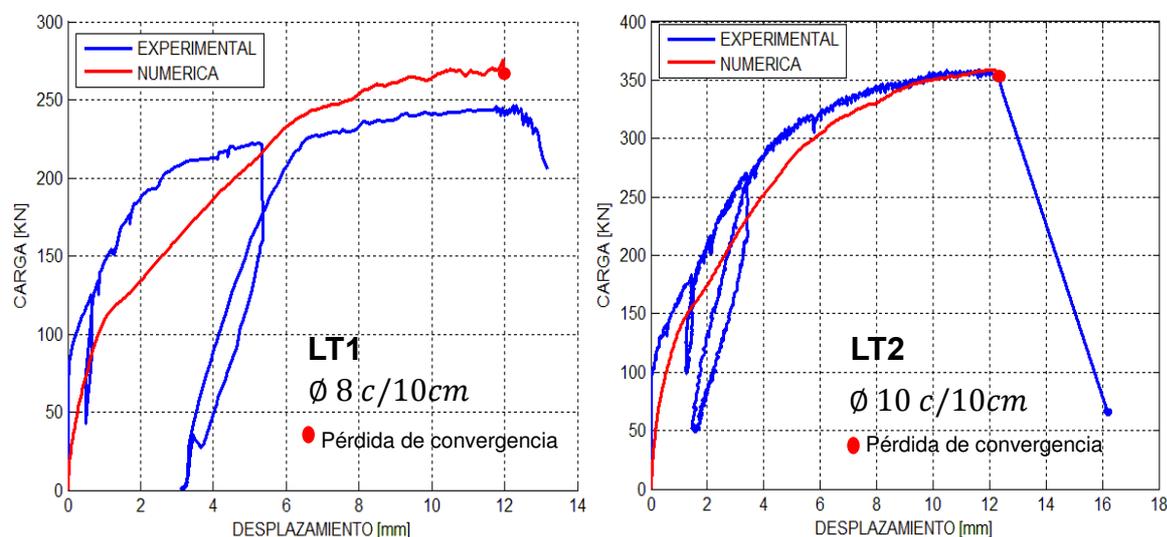


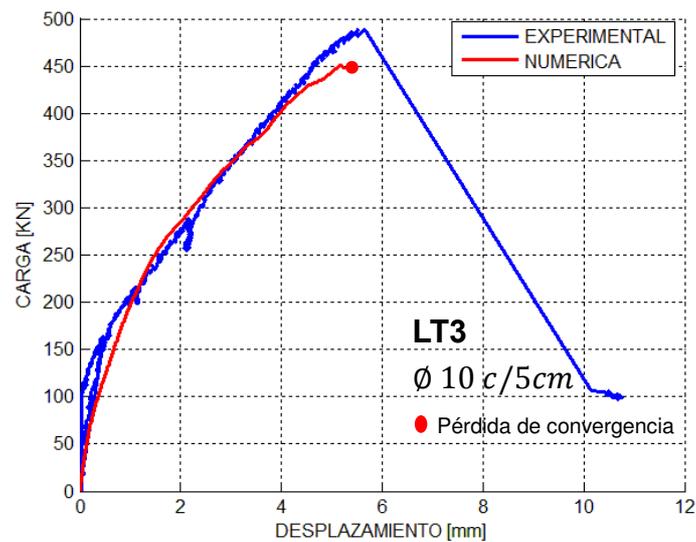
Figura 15. Rama en tracción de las curvas tensión – deformación obtenidas.

Cabe indicar que en tracción uniaxial, las probetas de HRFA presentan en el comportamiento post pico, un despunte de la resistencia, representado en forma de ramas ascendentes. Las mismas se constituyen en la resistencia residual que generan las fibras de acero añadidas. Por el contrario, la probeta de hormigón simple (curva en trazo azul de la figura 15) no presenta ningún tipo de resistencia post agrietamiento.

5.2 Losas de hormigón armado

Los resultados obtenidos de los modelos LT1, LT2 y LT3 son presentados en forma de curvas carga – desplazamiento, con la finalidad de comparar los resultados numéricos con los experimentales respectivos.





Figuras 16. Curvas carga – desplazamiento de los modelos LT1, LT2 y LT3.

Las curvas en trazo azul de las figuras 16 corresponden a los resultados experimentales y aquellas en trazo rojo a los numéricos. Para los modelos LT2 y LT3 se aprecia un buen ajuste entre las curvas experimentales y las numéricas, pero en el modelo LT1 se aprecia cierta diferencia entre ambas. En la tabla 4 se muestra el resumen de las cargas de punzonamiento experimentales y numéricas obtenidas para estas losas (columnas 1 y 2 respectivamente). El error relativo porcentual entre estas cargas alcanza como máximo un 10.3% para LT1 y como mínimo 2.6% para LT2 (columna 3).

Losa	Carga Experimental [KN] (1)	Carga Numérica [KN] (2)	E.R.P [%] (3)
LT1	250.0	275.8	+10.30
LT2	350.0	359.1	+2.60
LT3	470.0	450.0	-4.20

(1) Carga de punzonamiento experimental.

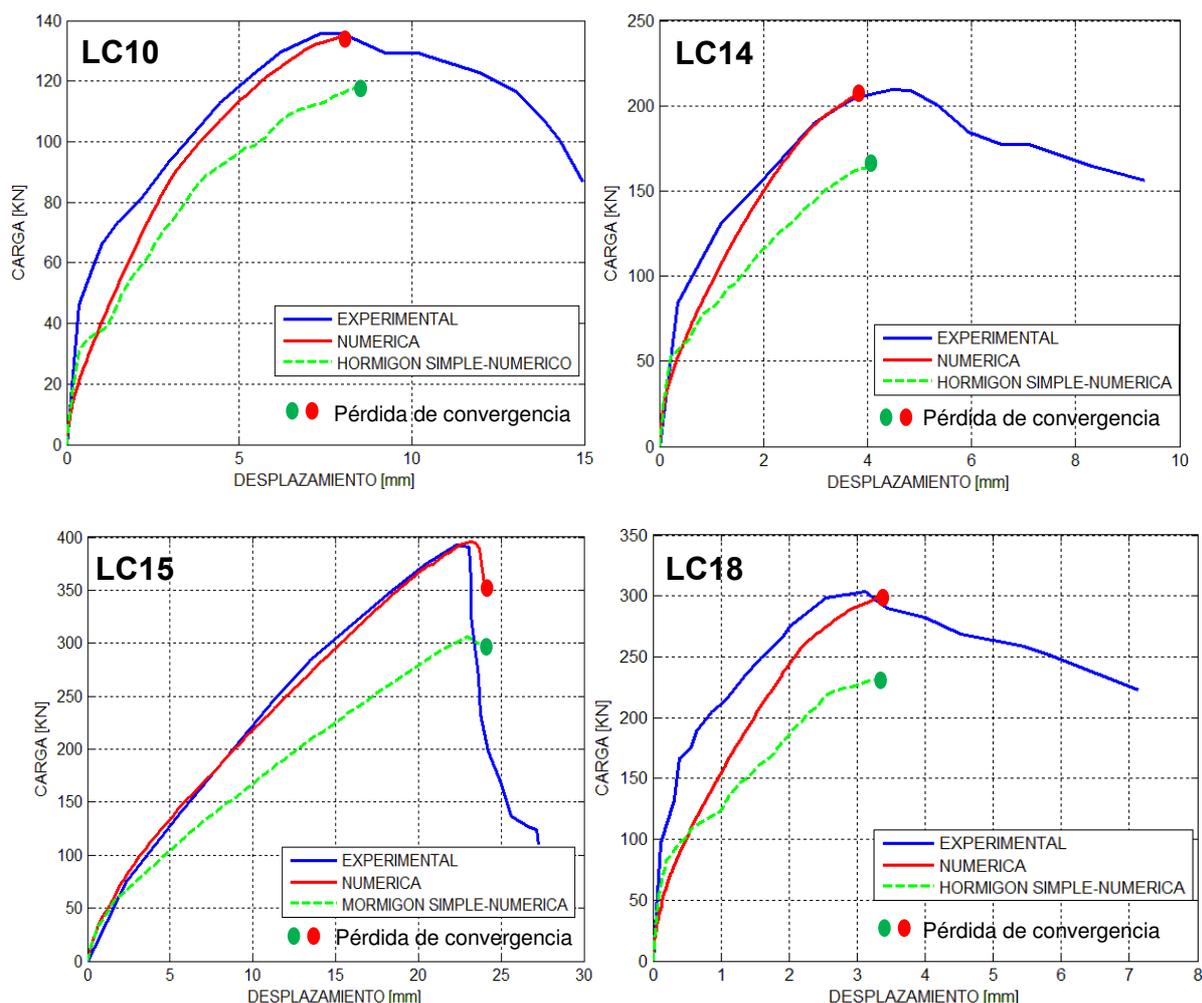
(2) Carga de punzonamiento numérica.

(3) Error relativo porcentual de la carga numérica con respecto a la experimental.

Tabla 4. Cargas de punzonamiento de los modelos LT1, LT2 y LT3.

5.3 Losas de hormigón armado reforzado con fibras de acero

La figura 17 muestra las curvas carga – desplazamiento obtenidas para cada modelo, destacándose el buen ajuste entre los resultados experimentales y los numéricos de los modelos LC14 y LC15.



Figuras 17. Curvas carga – desplazamiento de los modelos LC10, LC14, LC15 y LC18.

La tabla 5 muestra el resumen de las cargas de punzonamiento experimentales y numéricas obtenidas para estos modelos (columnas 1 y 2). El error relativo porcentual entre ambas cargas (columna 3) indica que los resultados numéricos son bastante aproximados a los experimentales.

Losa	Carga Experimental [KN] (1)	Carga Numérica [KN] (2)	E.R.P [%] (3)
LC10	137.5	134.6	-2.1
LC14	210.2	209.8	-0.2
LC15	392.5	396.1	+0.9
LC18	297.6	300.7	+1.0

(1) Carga de punzonamiento experimental.

(2) Carga de punzonamiento numérica.

(3) Error relativo porcentual de la carga numérica con respecto a la experimental.

Tabla 5. Cargas de punzonamiento de los modelos LC10, LC14, LC15 y LC18.

6 CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos permitieron arribar a las siguientes conclusiones:

1. La generación de modelos de elementos finitos de losas de hormigón armado reforzado con fibras de acero, empleando Ansys Mechanical; permite describir el comportamiento de los materiales de manera adecuada, obteniendo curvas carga – desplazamiento cuyo contraste con aquellas obtenidas experimentalmente es satisfactorio.

2. En caso de realizar los modelos de HRFA en Ansys Mechanical, resulta una buena aproximación el considerar que las fibras se orientan en tres direcciones ortogonales (X, Y y Z) en volúmenes iguales, no siendo necesario considerar otras alternativas referentes a la orientación puesto que las mismas no son influyentes en los resultados.

3. La simulación de los ensayos de tracción y compresión uniaxial, permite apreciar que la incorporación del refuerzo disperso que emula la adición de las fibras de acero en Ansys Mechanical; aumenta la resistencia a compresión del material y en tracción provee al mismo de resistencia post agrietamiento representada en forma de ramas ascendentes en la curva tensión-deformación.

4. Ansys Mechanical no logra generar las ramas post pico de las curvas carga–desplazamiento, independientemente del volumen de fibras adicionado; a causa de la caracterización computacional del hormigón como material frágil por medio del criterio de falla del elemento SOLID65.

7 AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido desarrollado en el marco del Proyecto PIUNT E545/4 “Estudio Experimental y Numérico de la Reparación Estructural con Hormigón Reforzado con Fibras”. Período 2015–2016, financiado por la Secretaría de Ciencia, Arte e Innovación Tecnológica de la U.N.T.

8 REFERENCIAS

- Ansys Inc, *Theory Reference for the Mechanical APDL and Mechanical Applications*, SAS, Canonsburg, USA, 2009.
- Bangash, M.Y.H., *Manual of Numerical Methods in Concrete*, Thomas Telford, UK, 2001.
- Cheng, M.Y y G.J. Parra-Montesinos, *Evaluation of Steel fiber Reinforcement for Punching Shear Resistance in Slab – Column Connections*, ACI Structural Journal, No. 107-S11, pp.101-109, 2010.
- DAfStB, *DafStB Guideline Steel Fibre Reinforced Concrete*, Beuth Verlag Gmbh, Berlín, 2012.
- Fiengo Pérez, F. *Análisis Numérico Computacional del Punzonado en Losas de H^oA^o Reforzado con Fibras*, Tesis de Magister, Universidad Nacional de Tucumán, Tucumán, 2016.
- Huang V.Z., *Grenzbeanspruchung Gebetteter Stahlfaserbetonplatten*, Ph.D. Dissertation, Institut für Baustoffe, Massivbau und Brandschutz, TU Braunschweig, 1995.
- Higashiyama, H., Ota, A. y Mizukashi, M., *Design Equations for Punching Shear Capacity of SFRC Slabs*, International Journal of Concrete Structures and Materials, Vol.5, pp.35-42, 2011.

- Isla, A.F., *Estudio Analítico y Experimental del Punzonado*, proyecto final de la carrera de ingeniería civil, Universidad Nacional de Tucumán, Tucumán, 2008.
- Kachlakev, D., Miller, D., Yim, S., Chansawat, K. y Tanarat, P., *Finite Element Modeling of Reinforced Concrete Structures Strengthened with FRP Laminates*, Final Report, Oregon Department of Transportation, Oregon, 2001.
- López Lancheros, P.A., *Simulación Numérica de Vigas en Concreto Reforzado con Barras Longitudinales, Transversales y Fibras Cortas de Acero Mediante el Método de los Elementos Finitos*, Tesis de Maestría, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2012.
- Majeed, H.Q., *Nonlinear Finite Element Analysis of Steel Fiber Reinforced Concrete Deep Beams with and without Opening*, Journal of Engineering, Vol.18, No.12 pp.1421-1438, December 2012.
- Núñez López, A. M., *Análisis Numérico–Experimental de Elementos de Hormigón Reforzado con Fibras de Acero*, Tesis doctoral, Univ. Politécnica de Valencia, España, 2011.
- Ragab, K.S., *Study Punching Shear of Steel Fiber Reinforced Self Compacting Concrete Slabs by Nonlinear Analysis*, International Journal of Civil, Architectural, Structural and Construction Engineering, Vol.7, pp.288-299, 2013.
- Tavarez, F.A., *Simulation of Behavior of Composite Grid Reinforced Concrete Beams Using Explicit Finite Element Methods*, Master's Degree Thesis, University of Wisconsin, Madison, 2001.
- Villegas, O.E., *Análisis Experimental del Punzonado en Losas de Hormigón Armado*, Proyecto final de la carrera de ingeniería civil, Universidad Nacional de Tucumán, Tucumán, 2009.
- Willam, K.J. y Warnke, E.P., *Constitutive Model for the Triaxial Behavior of Concrete*, Seminar en concrete structures subjected to triaxial stresses, Bérmago, Italia, 17 al 19 de Mayo de 1974.
- Zhang, Q., *Finite Element Application to Slab – Column Connections Reinforced with Glass Fibre – Reinforced Polymers*, Master's Degree Thesis, Memorial University of Newfoundland, Terranova, 2004.