

BASES DE WAVELETS B-SPLINES EN EL INTERVALO CON CONDICIONES DE DIRICHLET HOMOGÉNEAS

WAVELET B-SPLINES BASES ON THE INTERVAL WITH HOMOGENEOUS DIRICHLET CONDITIONS

Lucila D. Calderón^{a,b}, María T. Martín^b y Victoria Vampa^a

^a*Departamento de Ciencias Básicas, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de la Plata, La Plata, Argentina, cienciasbasicas@ing.edu.ar, <http://www.cienciasbasicas.ing.edu.ar>*

^b*CONICET, La Plata, Argentina, <http://www.laplata-conicet.gov.ar/>*

Palabras clave: B-splines, wavelets, ortogonalidad, número de condición.

Resumen.

La teoría de wavelets se ha estudiado y desarrollado intensamente en los últimos años. Las buenas propiedades de aproximación, localización y soporte compacto que tienen las funciones wavelets, las convierten en una herramienta favorable para el uso en diversos campos de las matemáticas aplicadas, el análisis numérico y la ingeniería. En particular en la resolución numérica de ecuaciones diferenciales con ciertas condiciones de contorno. Este tipo de problemas requieren bases wavelet en un intervalo acotado en lugar de en toda la recta real. La construcción de bases wavelet en el intervalo ha sido ampliamente discutida en la literatura y se han desarrollado varios enfoques para adaptar wavelets en la recta real al intervalo. En este trabajo proponemos una base de wavelets B-splines que generan un Análisis Multirresolución sobre el intervalo, formadas por wavelets interiores que se obtienen de las traslaciones y dilataciones de una wavelet madre; y wavelets de borde que se obtienen de combinaciones lineales adecuadas de las wavelets interiores. Para diferentes niveles de resolución, las derivadas de estas funciones son ortogonales. Cuando estas bases se aplican en la discretización de ecuaciones diferenciales de segundo orden, utilizando esquemas del tipo Wavelet - Galerkin, conducen a la resolución de sistemas lineales, cuyas matrices son esparcidas y diagonales por bloques. El condicionamiento de estas matrices se obtiene a partir de determinar las constantes de Riesz de las bases. Mostraremos que el número de condición se mantiene acotado independientemente del nivel de aproximación.

Keywords: B-splines, Wavelets, Orthogonality, Condition number.

Abstract. Due to good properties wavelets are used in several fields of applied mathematics, numerical analysis and engineering. In particular, they are applied in the numerical resolution of differential equations with certain boundary conditions. In this work we propose a B-spline wavelet basis that generates a Multiresolution Analysis on the interval. The basis is formed by inner wavelets that are obtained from translations and dilations of a mother wavelet, and boundary wavelets are adequate linear combinations of the inner wavelets. Wavelets of different levels are orthogonal with respect to the inner product of derivatives. These bases are applied in the discretization of differential equations of second order using Wavelet-Galerkin type schemes. The stiffness matrix of the resulting linear systems is sparse and block diagonal. The condition number of these matrices is obtained from the Riesz constants of the bases, and we show that it is uniformly bounded.

1. INTRODUCCIÓN

En los últimos años, las propiedades multirresolución de las wavelets han sido utilizadas con éxito para aproximar numéricamente la solución de diversos tipos de ecuaciones diferenciales. En estos casos se aplica con frecuencia el método wavelet-Galerkin que conduce a la resolución de un sistema de ecuaciones lineales. A fin de garantizar eficiencia en los cálculos y elevada precisión en las aproximaciones, es importante que la matriz asociada al sistema, conocida como matriz de rigidez, sea rala o esparcida con número de condición pequeño. Así, la elección de la base wavelet a utilizar y los requerimientos sobre la misma, son determinantes de las bondades del método.

Diversas construcciones de bases spline-wavelets cúbicas o multiwavelets sobre intervalo fueron propuestas. En el trabajo de (Jia y Liu, 2006), se diseñaron bases multiwavelets de Hermite adaptadas al intervalo $[0, 1]$. Recientemente, Černá y Finěk (2011, 2015) han propuesto varias construcciones de bases spline-wavelets cúbicas. Para la solución de ecuaciones diferenciales Vampa et al. (2013) aplicaron con buenos resultados bases spline-wavelets cúbicas adaptadas al intervalo, aunque el número de condición de la matriz de rigidez no resulta uniformemente acotado.

Un estudio teórico, dentro de un marco general sobre la construcción de bases de wavelets ortogonales respecto al producto de las derivadas de diferentes órdenes y en varias dimensiones, fue presentado en el trabajo de Han y Michelle (2017).

En el presente trabajo se propone la construcción de una base spline-wavelets cúbica con soporte compacto y cuyas derivadas primeras son ortogonales entre las distintas escalas. Esto proporciona la ventaja de una matriz de rigidez esparcida cuyo condicionamiento resulta uniformemente acotado.

La organización del artículo es la siguiente: en la Sección 2 se revisa brevemente el concepto de Análisis Multirresolución y se define una base para el espacio de las funciones de escala sobre el intervalo unidad. En la Sección 3 se propone la construcción de una base de spline-wavelets cúbicas sobre $[0, 1]$ adaptadas a condiciones de borde homogéneas. Finalmente en la Sección 4 se propone la aplicación de las bases wavelets obtenidas en la solución de un problema diferencial de segundo orden y se presentan dos ejemplos numéricos que muestran sus propiedades ventajosas.

2. FUNCIONES DE ESCALA B-SPLINES CÚBICAS EN EL INTERVALO

A partir del concepto de Análisis Multirresolución se proponen una función de escala y los espacios de escala generados por esa función.

Definición 1 *Un Análisis Multirresolución (AMR) sobre $L^2[0, 1]$ (Chui, 1992) consiste en una colección $V = \{V_j\}_{j \in \mathbb{N}_{j_0}}$ de subespacios cerrados $V_j \subset L^2[0, 1]$ que satisfacen*

$$V_{j_0} \subset V_{j_0+1} \subset \dots \subset V_j \subset V_{j+1} \dots \subset L^2[0, 1] \quad \text{y} \quad \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{N}_{j_0}} V_j} = L^2[0, 1]. \quad (1)$$

Sea φ_{m+1} , con $m = 3$, la función de escala B-spline cúbica, que puede escribirse de la siguiente

forma:

$$\varphi_{3+1}(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{6}, & x \in [0, 1] \\ -\frac{x^3}{2} + 2x^2 - 2x + \frac{2}{3}, & x \in [1, 2] \\ \frac{x^3}{2} - 4x^2 - 10x - \frac{22}{3}, & x \in [2, 3] \\ \frac{(4-x)^3}{6}, & x \in [3, 4] \end{cases} \quad (2)$$

De aquí en adelante y para simplificar la notación $\varphi(x) = \varphi_4(x)$.

Se consideran dos *funciones de borde* presentadas en (Cěrná y Finěk, 2015): φ_{b1} y φ_{b2} , que son polinomios cúbicos a trozos, cuyas formas explícitas estan dadas por:

$$\varphi_{b1}(x) = \begin{cases} \frac{7x^3}{4} - \frac{9x^2}{2} + 3x, & x \in [0, 1] \\ \frac{(2-x)^3}{4}, & x \in [1, 2] \end{cases}, \quad \varphi_{b2}(x) = \begin{cases} -\frac{11x^3}{12} + \frac{3x^2}{2}, & x \in [0, 1] \\ \frac{7x^3}{12} - 3x^2 + \frac{9x}{2} - \frac{3}{2}, & x \in [1, 2] \\ \frac{(3-x)^3}{4}, & x \in [2, 3] \end{cases}$$

Si $\varphi_{j,k}(x) := 2^{j/2}\varphi(2^j x - k)$, para cada $j \in \mathbb{Z}$, se definen las familias:

$$\Phi_j^{int} = \{ \varphi_{j,k}(x) : k = 0, 1, \dots, 2^j - 4 \}, \quad (3)$$

que corresponden a *funciones de escala interiores* y

$$\Phi_j^{bord} = \{ \varphi_{b1}(2^j x), \varphi_{b2}(2^j x), \varphi_{b2}(2^j(1-x)), \varphi_{b1}(2^j(1-x)) \}, \quad (4)$$

que son *funciones de escala de borde*.

En la Figura (1) se observan en color azul las funciones de escala interiores y en color verde y rojo a las funciones de borde.

Ahora, considerando las familias de Ecs. (3) y (4), los espacios de escala V_j están determinados por:

$$V_j = \text{span } \Phi_j, \quad \text{donde } \Phi_j = \Phi_j^{int} \cup \Phi_j^{bord}. \quad (5)$$

Es conveniente normalizar $\varphi_{j,k}$ de manera tal que $\|\varphi'_{j,k}\|_{L^2[0,1]} = 1$.

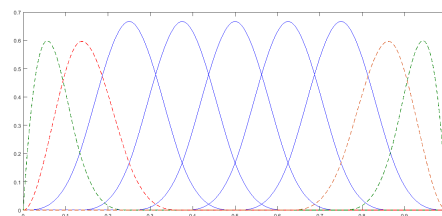


Figura 1: Funciones base del espacio V_3

Los espacios V_j , cuya dimensión es $2^j + 1$, constituyen un AMR de $L^2[0, 1]$ (Cěrná y Finěk, 2011).

La estructura de subespacios anidados, generado por el AMR, implica la existencia de complementos, ie. espacios wavelets W_j , tales que

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j. \quad (6)$$

3. BASES DE WAVELETS EN EL INTERVALO

3.1. Construcción de wavelets interiores

En la sección anterior se definieron la función de escala y los espacios V_j del AMR en $L^2[0, 1]$. En esta sección se van a construir los espacios wavelets W_j , con un requerimiento extra de ortogonalidad. Para ello se define una *wavelet madre* ψ (o generadora), cuyas traslaciones enteras y dilataciones diádicas formen una base para los espacios W_j .

Sean V_0 y V_1 , los espacios generados por las traslaciones de $\varphi(x)$ y $\varphi(2x)$, respectivamente. Si se considera $\psi \in W_0$, y teniendo en cuenta que $V_1 = V_0 \oplus W_0$, se obtiene que $\psi \in V_1$, con lo cual vale la siguiente representación,

$$\psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d(k) \varphi(2x - k). \quad (7)$$

Se deben hallar los coeficientes $\{d(k)\}$ tales que ψ cumpla con el siguiente requerimiento de ortogonalidad:

$$\langle \psi'(x), \varphi'(x - l) \rangle = 0, \quad \forall l \in \mathbb{Z}. \quad (8)$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ representa el producto interno usual de $L_2[0, 1]$.

Para $l \in \mathbb{Z}$, el producto interno adopta la siguiente forma:

$$\langle \psi'(x), \varphi'(x - l) \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d(k) \langle \varphi'(2x - k), \varphi'(x - l) \rangle. \quad (9)$$

Teniendo en cuenta el soporte y las propiedades de las B-splines, para cada l , el conjunto $\{d(k)\}$ es finito y la Ec. (9) adopta la forma

$$\langle \psi'(x), \varphi'(x - l) \rangle = -4 \sum_{k=2l-3}^{2l+7} d(k) \sum_{n=0}^4 h_n \varphi_8''(4 + 2l + n - k), \quad (10)$$

donde $\varphi_8''(4 + 2l + n - k)$ representa la derivada segunda de la spline de orden 7 evaluada en $x = 4 + 2l + n - k$ y los coeficientes h_n son las componentes del vector $h = [\frac{1}{8}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}]$.

Entonces

$$\begin{aligned} \langle \psi'(x), \varphi_4'(x - l) \rangle = & -\frac{1}{240} d(2l - 3) - \frac{7}{60} d(2l - 2) - \frac{39}{80} d(2l - 1) - \frac{8}{15} d(2l) + \\ & + \frac{59}{120} d(2l + 1) + \frac{13}{10} d(2l + 2) + \frac{59}{120} d(2l + 3) - \frac{8}{15} d(2l + 4) - \\ & - \frac{39}{80} d(2l + 5) - \frac{7}{60} d(2l + 6) - \frac{1}{240} d(2l + 7). \end{aligned}$$

Para $l \in \mathbb{Z}$ restan hallar los coeficientes $d(k)$, $k = \{2l - 3, 2l - 2, \dots, 2l + 7\}$, que satisfagan la condición de ortogonalidad dada en la Ec. (8) para cada valor de l . Si

$$q_1(z) := \sum_{l \in \mathbb{Z}} d(2l + 1) z^{2l+1} \quad q_2(z) := \sum_{l \in \mathbb{Z}} d(2l) z^{2l}, \quad (11)$$

la condición de ortogonalidad se puede reescribir matricialmente:

$$B(z)(q_1(z), q_2(z))^T = 0, \tag{12}$$

donde

$$(B(z))^T = \begin{bmatrix} -\frac{1}{240}z^7 - \frac{39}{80}z^5 + \frac{59}{120}z^3 + \frac{59}{120}z - \frac{39}{80}z^{-1} - \frac{1}{240}z^{-3} \\ -\frac{7}{60}z^6 - \frac{8}{15}z^4 + \frac{13}{10}z^2 - \frac{8}{15} - \frac{7}{60}z^{-2} \end{bmatrix}.$$

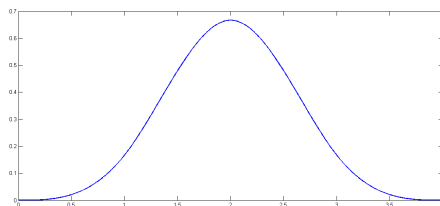
Una solución para este sistema ¹ es:

$$\begin{bmatrix} q_1(z) \\ q_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -28z^5 - 184z^3 - 28z^1 \\ z^6 + 119z^4 + 119z^2 + 1 \end{bmatrix}.$$

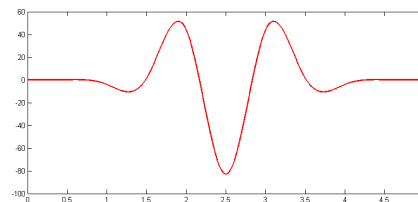
Por lo tanto la wavelet está dada por

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^6 d(k)\varphi(2x - k), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{13}$$

con $d = [1, -28, 119, -184, 119, -28, 1]$.



(a) B-spline cúbica.



(b) Wavelet $\psi(x)$.

Figura 2: Función de escala y wavelet

Una vez determinada la wavelet ψ , que tiene soporte $[0, 5]$ (ver Figura (2b)), es simétrica y además satisface la condición de ortogonalidad requerida, quedan por determinar los espacios W_j .

3.2. Construcción de wavelets de borde

Para poder proponer una base adecuada para los espacios W_j , se consideran dos *wavelets de borde* $\psi_{b1}, \psi_{b2} \in W_0$ que son definidas, en el trabajo de (Cěrná y Finěk, 2015), como combinación lineal de elementos de V_1 :

$$\psi_{b1}(x) = c_0^{b1}\varphi_{b1}(2x) + c_1^{b1}\varphi_{b2}(2x) + \sum_{k=2}^4 c_k^{b1}\varphi(2x - k + 2) \tag{14}$$

$$\psi_{b2}(x) = c_0^{b2}\varphi_{b1}(2x) + c_1^{b2}\varphi_{b2}(2x) + \sum_{k=2}^6 c_k^{b2}\varphi(2x - k + 2) \tag{15}$$

¹ El sistema se resuelve utilizando comandos específicos y lenguaje simbólico en MATLAB.

donde

$$\begin{aligned} [c_0^{b1}, c_1^{b1}, \dots, c_4^{b1}] &= \left[\frac{939}{70}, \frac{-393}{20}, \frac{6233}{560}, -4, 1 \right] \\ [c_0^{b2}, c_1^{b2}, \dots, c_6^{b2}] &= \left[\frac{1444}{953}, \frac{1048}{1871}, \frac{-1340}{209}, \frac{545}{48}, \frac{-6839}{655}, 7, -3 \right] \end{aligned}$$

Por su construcción, el soporte de ψ_{b1} es $[0, 3]$ y el soporte de ψ_{b2} es $[0, 4]$. Ambas wavelets tienen dos momentos nulos y cumplen la condición de ortogonalidad Ec. (8).

A partir de estas funciones se define el conjunto de *wavelets de borde*:

$$\Psi_j^{bord} = \{ \psi_{b1}(2^j x), \psi_{b2}(2^j x), \psi_{b2}(2^j(1-x)), \psi_{b1}(2^j(1-x)) \}. \tag{16}$$

Notar que si $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$, la dimensión de los espacios W_j debe ser 2^j . Con lo cual, una base para estos espacios es:

$$\Psi_j = \Psi_j^{int} \cup \Psi_j^{bord}, \tag{17}$$

donde se denota el conjunto de *wavelets interiores* como,

$$\Psi_j^{int} = \{ \psi_{j,k} : k = 0, 1, \dots, 2^j - 5 \}, \tag{18}$$

con $\psi_{j,k}(x) := 2^{j/2} \psi(2^j x - k)$, para cada $j \in \mathbb{Z}$.

Las funciones del conjunto Ψ_j están normalizadas ($\| \psi'_{j,k} \|_{L_2(0,1)} = 1$).

Observación 1 *Teniendo en cuenta la expresión que define a ψ , vemos que $V_{j+1} \supset V_j + W_j$ y además $V_j \cap W_j = \{0\}$. Por lo tanto,*

$$\dim(V_j + W_j) = \dim V_j + \dim W_j = 2^{j+1} + 1 = \dim(V_{j+1}). \tag{19}$$

Así, V_{j+1} es suma directa de V_j y W_j . Consecuentemente, para $j_0 \geq 3$

$$V_{j+1} = V_{j_0} + W_{j_0} + W_{j_0+1} \dots + W_j.$$

Además si $v \in V_{j_0}$ y $w_{j_1} \in W_{j_1}$ se cumple que

$$\langle v', w'_{j_1} \rangle = 0 \tag{20}$$

$$\langle w'_{j_1}, w'_{j_2} \rangle = 0 \tag{21}$$

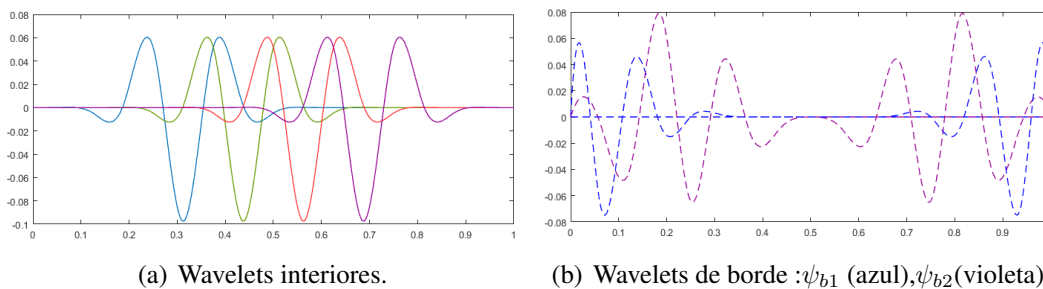


Figura 3: Funciones bases del espacio W_3 .

4. APLICACIONES Y RESULTADOS NÚMERICOS

Se presenta en esta sección la aplicación de la base construida en la resolución de un problema diferencial de segundo orden dado por:

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x)u(x) = f(x), & x \in (0, 1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (22)$$

La formulación débil del problema es: hallar $u \in V = H_0^1(0, 1)$ tal que

$$a(u, v) = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in V$$

donde

$$a(u, v) = \int_0^1 p(x)u'(x)v'(x) dx + \int_0^1 q(x)u(x)v(x) dx, \quad u, v \in V.$$

A partir de esta formulación, utilizando el método Wavelet-Galerkin, es posible obtener una aproximación de la solución del problema diferencial, considerando la formulación discreta en un subespacio adecuado de V de dimensión finita, y resolviendo luego un sistema algebraico (Vampa et al., 2013).

De acuerdo a lo desarrollado anteriormente, se propone utilizar el subespacio V_{J+1} cuya base ordenada está formada por unión de las bases definidas en Ec. (5) y (17), esto es,

$$G_J = \{g_1, g_2, \dots, g_{2^{J+1}+1}\},$$

donde $g_i \in \Phi_{j_0}$ para $i = 1, 2, \dots, 2^{j_0} + 1$ y $g_i \in \Psi_j$ para $i = 2^{j_0} + 2, \dots, 2^{J+1} + 1$ y $j = j_0, \dots, J$.

Con esta base para V_{J+1} , la solución aproximada se escribe como,

$$u_{J+1} = \sum_{i=1}^{2^{J+1}+1} \alpha_i g_i,$$

y el problema se reduce a calcular α_i , solución del sistema algebraico :

$$\sum_{i=1}^{2^{J+1}+1} \alpha_i a(g_i, g_l) = \langle f, g_l \rangle \quad \forall l \in \{1, 2, \dots, 2^{J+1} + 1\}$$

o matricialmente

$$K_J \vec{\alpha} = b$$

con $K_J = (a(g_i, g_l))_{1 \leq i, l \leq 2^{J+1}+1}$.

El número de condición de una matriz invertible A está dado por

$$\text{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\| \quad (23)$$

($\|\cdot\|$ es una norma matricial), y cuando A es una matriz simétrica, en norma 2 es

$$\text{cond}(A) = \frac{\max_i |\lambda_i(A)|}{\min_i |\lambda_i(A)|}, \quad (24)$$

donde $\lambda_i(A)$ son los autovalores de la matriz A .

Se sabe que si la matriz K_J es dispersa y tiene número de condición pequeño y acotado, la resolución del sistema puede realizarse en forma eficiente, con mínimo costo computacional. Estas ventajas son las que presenta la utilización de los espacios y bases del AMR desarrollados en este trabajo, como se verá en los ejemplos a continuación.

Ejemplo 1

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{25}$$

donde $f(x) = 2 + \left(\frac{4}{e^{50} - 1}\right) \left(100^2 e^{50x} \frac{e^{50x}}{e^{50} - 1} - 50^2 \left(1 + \frac{2}{e^{50} - 1}\right) e^{50x}\right)$ y la solución exacta se puede ver en la Figura (4).

La matriz de este problema es $K_J = (\langle g'_i, g'_i \rangle)_{1 \leq i, i \leq 2^{J+1}+1}$, ya que $p(x) = 1$ y $q(x) = 0$.

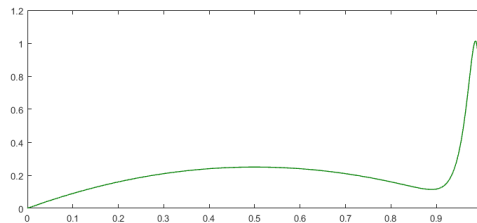


Figura 4: Solución exacta del Ejemplo 1.

Como consecuencia de la condición de ortogonalidad requerida Ec. (8), la matriz de rigidez resulta diagonal por bloques y además cada bloque es una matriz banda, como se muestra en la Figura (5).

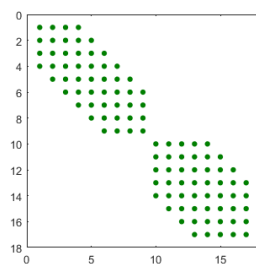
En la Tabla (1) se presentan los errores relativos $e_J = \frac{\|u_{J+1} - u\|}{\|u\|}$ y número de condición para cada escala J :

J	e_J	Cond (K_J)
4	4.971×10^{-2}	7.828
5	1.216×10^{-2}	7.828
6	2.732×10^{-3}	7.828

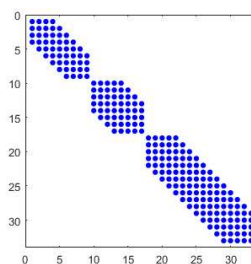
Tabla 1: Resultados numéricos del Ejemplo 1.

J	e_J
5	6.1402×10^{-1}
6	1.1700×10^{-2}
8	9.4883×10^{-3}

Tabla 2: Resultados numéricos del Ejemplo 2.



(a) K_4



(b) K_5

Figura 5: Forma de la matriz K_J del Ejemplo 1 y 2.

Ejemplo 2 Se considera el problema Ec. (25) con $f(x) = (70\pi)^2 \sin(70\pi x) - \pi^2 \cos\left(\pi x + \frac{\pi}{2}\right)$ cuya solución exacta

$$u(x) = \sin(70\pi x) - \cos\left(\pi x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Es importante destacar que en este segundo ejemplo, a pesar que la solución exacta es muy oscilatoria, se obtuvieron resultados similares a los del primer ejemplo. En la Tabla (2) y en la Figura (6) se muestra la convergencia de las aproximaciones para distintas escalas.

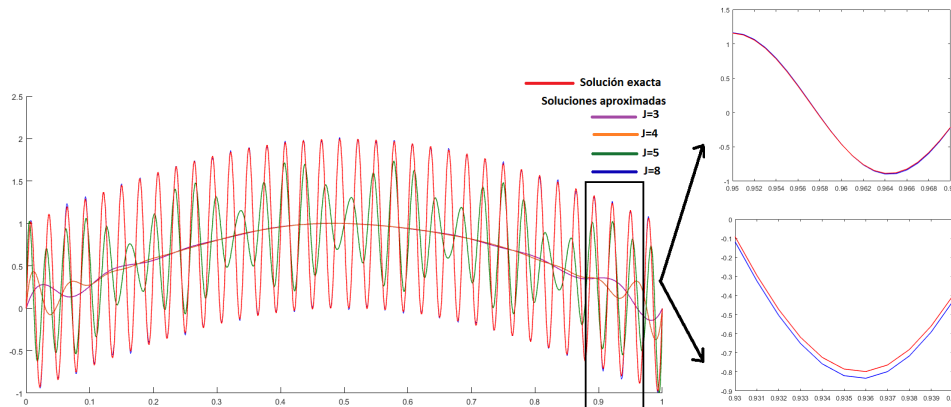


Figura 6: Solución exacta y soluciones aproximadas u_J para $J = 3, 4, 5, 8$ del Ejemplo 2.

5. CONCLUSIONES

La propuesta combina las ventajas numéricas y computacionales de las funciones spline con las capacidades de las wavelets, dentro de la estructura de un Análisis Multirresolución. Esto permite tener espacios sucesivamente refinables para aproximar la solución hasta alcanzar la precisión deseada. Exponemos en este trabajo una novedosa técnica que mejora notablemente la complejidad computacional, ya que la matriz involucrada en el sistema lineal a resolver es diagonal por bloques y se mantiene acotado su número de condición al aumentar la escala. En trabajos futuros interesa una comparación cuantitativa de la base wavelets construida con otro tipo de bases spline wavelets. Además se estudiará la aplicabilidad del método a otros tipos de problemas.

REFERENCIAS

- Chui C. *An introduction on wavelet Analysis*. Academic Press, 1992.
- Cěrná D. y Finěk V. Construction of optimally conditioned cubic spline wavelets on the interval. *Advances in Computational Mathematics*, 34:219–252, 2011.
- Cěrná D. y Finěk V. Wavelet basis of cubic splines on the interval on the hypercube satisfying homogeneous boundary conditions. *International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing*, 13, 2015.
- Han B. y Michelle M. Derivative-orthogonal Riesz wavelets in Sobolev spaces with applications to differential equations. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2017.
- Jia R. y Liu S. Wavelet bases of Hermite cubic splines on the interval. *Advances in Computational Mathematics*, 25:23–29, 2006.
- Vampa V., Martín M., y Serrano E. A new refinement Wavelet-Galerkin method in a spline local multiresolution analysis scheme for boundary value problems. *International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing*, 11:1, 2013.