

## APROXIMACIÓN NUMÉRICA DE SOLUCIONES PARA PROBLEMAS DE VALORES INICIALES CON DERIVADAS COMBINADAS

### APPROXIMATE SOLUTIONS TO INITIAL VALUE PROBLEMS WITH COMBINED DERIVATIVES

María I. Troparevsky<sup>a</sup> y Marcela A. Fabio<sup>b</sup>

<sup>a</sup>*Departamento de Matemática, Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires, Argentina,  
mariainestro@gmail.com*

<sup>b</sup>*Centro de Matemática Aplicada, Universidad Nacional de San Martín, Argentina,  
celafabio@gmail.com*

**Palabras clave:** Wavelets, Operadores Fraccionarios, Problema de Valores Iniciales.

**Resumen.** En desarrollos recientes, se demostró la importancia y la utilidad de las ecuaciones diferenciales fraccionarias, que incluyen derivadas de Riemann-Liouville, Caputo y Caputo-Fabrizio, para modelar procesos físicos y biológicos entre otros. En trabajos anteriores (Troparevsky M. I. et al., AMCA, XXXIV: 3383- 3394, (2016); Troparevsky M. I. y Fabio M., AMCA, XXXV: 2547-2557, (2017); Fabio M. y Troparevsky M. I., Nat. Sc. Pub. Cor., Prog. in Frac. Diff. and App. 4:15-26, (2018)), combinando técnicas de transformada wavelet, para una base con especiales propiedades, resolvimos ecuaciones diferenciales que contenían derivadas fraccionarias. En particular aquellas en las que interviene la derivada de Caputo o la nueva derivada de Caputo-Fabrizio. En esta presentación construimos una solución aproximada de un problema de valores iniciales en el cual se combinan derivadas de orden fraccionario y de orden natural. Generalizamos la metodología anterior para resolver el caso de ecuaciones que contienen derivadas ordinarias y derivadas fraccionarias de Caputo-Fabrizio de la función incógnita. El esquema de aproximación resulta simple y eficiente gracias a la regularidad del operador involucrado y las propiedades de la base de wavelets elegida.

**Keywords:** Wavelets, Fractional Operators, Initial Value Problem.

**Abstract.** In recent developments, the importance and usefulness of fractional differential equations, that include derivatives of Riemann-Liouville, Caputo and Caputo-Fabrizio, to model physical and biological processes were shown. In previous works (Troparevsky M. I. et al., AMCA, XXXIV: 3383- 3394, (2016); Troparevsky M. I. y Fabio M., AMCA, XXXV: 2547-2557, (2017); Fabio M. y Troparevsky M. I., Nat. Sc. Pub. Cor., Prog. in Frac. Diff. and App. 4:15-26, (2018)), combining wavelet transform techniques, for a base with special properties, we solved differential equations containing fractional derivatives. In particular, those in which the Caputo derivative or the new Caputo-Fabrizio derivative are involved. In this presentation we construct an approximate solution to an initial value problem in which fractional and natural order derivatives are combined. We generalize the previous methodology to solve the case of equations that contain ordinary derivatives and Caputo-Fabrizio fractional derivatives of the unknown function. The approximation scheme is simple and efficient because of the regularity of the associated integral operators and the properties of the chosen wavelet basis.

## 1. INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas, el cálculo fraccionario ha sido intensamente desarrollado y ha ganado notable importancia y popularidad debido a sus aplicaciones en diversos campos de la ciencia y la ingeniería. Contribuciones recientes muestran la importancia y la utilidad de las ecuaciones diferenciales fraccionarias que incluyen derivadas de Riemann-Liouville, Caputo y Caputo-Fabrizio, ver [Podlubny \(1991\)](#); [Al-Salti et al. \(2016\)](#); [Atangana y Alqahtani \(2016\)](#); [Ceretani y Tarzia \(2017\)](#). Entre los modelos que han sido descritos mediante este tipo de derivadas podemos mencionar: problemas de difusión, teoría de condensadores, divisores de voltaje generalizados, sistemas de orden fraccionario de Chua-Hartley, modelos de interfaz electrodo-electrolito, conductancia eléctrica de sistemas biológicos, modelos neuronales de orden fraccional, viscoelasticidad y nanotecnología entre otros ([Crank, 1979](#); [Agrawal, 2004](#); [Odzijewicz et al., 2012](#); [Herrmann, 2013](#); [Atangana y Alqahtani, 2016](#)).

La derivada de orden fraccionario de una función no tiene carácter local como la derivada natural, por el contrario, tiene memoria y refleja el comportamiento global de la función implicada ([Caputo, 2000](#); [Cesarone et al., 2005](#); [Caputo y Fabrizio, 2015a](#)). Su definición involucra operadores integrales, algunos de ellos con núcleos con diferentes grado de regularidad, y su cálculo puede no ser sencillo. En la literatura existen distintos enfoques para calcular de manera efectiva la solución de ecuaciones diferenciales que utilizan estas derivadas. Por ejemplo en [Oldham y Spanier \(2006\)](#) se proponen aproximaciones de operadores particulares, en [Lin y Lu \(2013\)](#) se desarrolla una estrategia basada en diferencias finitas y en [Atangana y Alqahtani \(2016\)](#) se utiliza la transformada de Laplace para hallar soluciones explícitas. Las características de estas derivadas se pueden consultar en [Miller y Ross \(1993\)](#); [Oldham y Spanier \(2006\)](#); [Almeida y Torres \(2010\)](#); [Caputo y Fabrizio \(2015b\)](#); [Losada y Nieto \(2015\)](#); [Baleanu et al. \(2017\)](#).

En este trabajo, proponemos una solución aproximada al problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} \mathcal{D}_0^\alpha f(t) + \lambda_1 f'(t) + \lambda_0 f(t) & = g(t) \\ f(0) & = 0 \end{cases} \quad (1)$$

donde  $\mathcal{D}_0^\alpha f$  es la derivada fraccionaria de Caputo-Fabrizio de orden  $\alpha \in (0, 1)$  en el intervalo  $[0, b]$ ,  $\lambda_0, \lambda_1$  son parámetros reales,  $f \in C^1[0, b]$  es la función incógnita y  $g$  es la función dato que, sin pérdida de generalidad, satisface  $g(0) = 0$ . Adaptamos el esquema de aproximación desarrollado en [Troparevsky et al. \(2016\)](#) para las ecuaciones asociadas a los operadores integrales que actúan sobre la transformada de Fourier. Esta técnica fue implementada con éxito para el cálculo de primitivas respecto de la derivada de Caputo clásica ([Serrano et al. \(2017\)](#)) y de Caputo-Fabrizio ([Troparevsky y Fabio \(2017\)](#); [Fabio y Troparevsky \(2018a,b\)](#)). A partir de las propiedades de localización de la base wavelet empleada y dado que el operador fraccionario asociado a la derivada de Caputo-Fabrizio es regular, el esquema de aproximación propuesto resulta simple y eficiente. Finalmente, ilustramos la eficiencia del método propuesto con una aplicación numérica.

## 2. DEFINICIONES Y PROPIEDADES

### 2.1. Derivada fraccionaria de Caputo-Fabrizio

Denotamos  $H^1(a, b)$ , al espacio de Sobolev  $W^{1,2}(a, b)$  de funciones  $u : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ , con derivada débil  $u' = D^1 u \in L^2(a, b)$ .

En [Caputo y Fabrizio \(2015b\)](#) los autores definen la nueva derivada fraccionaria de orden

$\alpha \in (0, 1)$  de Caputo-Fabrizio (CFFD) de una función  $f \in H^1(a, b)$ ,

$$\mathcal{D}_a^\alpha f(t) := \frac{M(\alpha)}{1 - \alpha} \int_a^t f'(\tau) e^{-\frac{\alpha(t-\tau)}{1-\alpha}} d\tau, \tag{2}$$

donde  $-\infty \leq a < b$  y  $M(\alpha)$  es un factor de normalización (Caputo y Fabrizio, 2015b; Baleanu et al., 2017).

En el mencionado trabajo los autores demuestran algunas propiedades de esta nueva derivada:

- la CFFD de orden  $\alpha$  de una función constante es nula
- $\lim_{\alpha \rightarrow 1} \mathcal{D}_a^\alpha f(t) = f'(t)$ ,  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathcal{D}_a^\alpha f(t) = f(t) - f(a)$ .

Notemos que la CFFD se expresa mediante un operador integral cuyo núcleo causal  $k = e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}t}$ ,  $t > 0$  es suave (no singular),  $k \in L^1(-\infty, b) \cap L^2(-\infty, b)$ .

Considerando  $a = -\infty$  y mediante un cambio de variables en la Ec. (2), la CFFD se puede expresar como un operador de convolución:

$$\mathcal{D}_{-\infty}^\alpha f(t) = \frac{M(\alpha)}{1 - \alpha} \int_0^\infty f'(t - \tau) e^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}\tau} d\tau = \frac{M(\alpha)}{1 - \alpha} f' * k(t).$$

Entonces  $\mathcal{D}_{-\infty}^\alpha f \in L^2(-\infty, b)$  y  $\widehat{k}(\omega) = \frac{1-\alpha}{\alpha+i\omega(1-\alpha)}$ .

A partir de estas últimas consideraciones podemos reescribir la CFFD de orden  $\alpha \in (0, 1)$  mediante la expresión

$$\mathcal{D}_{-\infty}^\alpha f(t) = \frac{M(\alpha)}{2\pi(1 - \alpha)} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}'(\omega) \widehat{k}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

o

$$\mathcal{D}_{-\infty}^\alpha f(t) = \frac{M(\alpha)}{1 - \alpha} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}'(\omega) h(\omega) e^{i\omega t} d\omega \tag{3}$$

con núcleo  $h(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{i\omega(1-\alpha)}{\alpha+i\omega(1-\alpha)}$  independiente de la variable  $t$ . Como ya se hizo en Serrano et al. (2017); Troparevsky y Fabio (2017); Fabio y Troparevsky (2018a,b), aprovechamos esta expresión de la derivada fraccionaria en función de la transformada de Fourier, para construir la solución del PVI (1). Es importante notar que en la Ec. (3) estamos considerando  $\mathcal{D}_{-\infty}^\alpha f$  mientras que (1) contiene  $\mathcal{D}_0^\alpha f$ .

## 2.2. La base wavelet

Elegimos una wavelet madre  $\psi \in \mathcal{S}$  (clase de Schwartz), infinitamente oscilante, de decaimiento rápido, bien localizada en tiempo y en frecuencia (Meyer (1990)). Su soporte en frecuencia lo denotamos  $\Omega_j = \text{supp}|\widehat{\psi}(2^{-j}\omega)| = \{\omega : 2^j(\pi - \beta) \leq |\omega| \leq 2^{j+1}(\pi + \beta)\}$  con  $0 < \beta \leq \pi/3$ . En las aplicaciones numéricas consideramos  $\beta = \pi/7$ .

La familia  $\{\psi_{jk} = 2^{j/2} \psi(2^j x - k), j, k \in \mathbb{Z}\}$ , resulta una base ortonormal (BON) de  $L^2(\mathbb{R})$ , asociada a un análisis de Multirresolución (MRA): una sucesión de subespacios  $V_j$ , (Walnut (2002), Mallat (2009)) de manera que  $L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j = \bigoplus_{j \geq n} W_j + V_n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Existe también  $\phi \in V_0$  tal que  $\{\phi(x - k), k \in \mathbb{Z}\}$  es una BON de  $V_0$ .

Denotamos  $W_j = \text{span}\{\psi_{jk}, k \in \mathbb{Z}\}$  al subespacio wavelet y  $V_J = \bigoplus_{j < J} W_j$  al subespacio de escala. La familia  $\{\phi_{Jn} = 2^{J/2} \phi(2^J x - n), n \in \mathbb{Z}\}$  resulta una BON de  $V_J$ .

Esta descomposición del espacio nos permite expresar cada función  $s \in L^2(\mathbb{R})$  como

$$s(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{Q}_j s(t) = \mathcal{P}_J s(t) + \sum_{j \geq J} \mathcal{Q}_j s(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle s, \phi_{Jn} \rangle \phi_{Jn}(t) + \sum_{j \geq J} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{jk} \rangle \psi_{jk}(t) \tag{4}$$

para cualquier  $J$ , donde  $\mathcal{Q}_j s$  y  $\mathcal{P}_j s$  son las proyecciones ortogonales de la señal  $s$  en  $W_j$  y  $V_j$ , respectivamente. El soporte de  $\widehat{\mathcal{Q}}_j s(\omega)$  está contenido en  $\Omega_j$  y el de  $\widehat{\mathcal{P}}_j s(\omega)$  en  $\cup_{j \leq J} \Omega_j$ . Las propiedades de la wavelet madre  $\psi$  garantizan convergencia absoluta de las proyecciones  $\mathcal{Q}_j s$  en cada  $W_j$ , (Fabio y Serrano, 2015).

### 3. HACIA LA SOLUCIÓN DEL PVI

#### 3.1. La función dato

A partir de la descomposición dada en la Ec. (4), si  $g \in L^2(\mathbb{R})$ , mediante un algoritmo de complejidad equivalente al de la transformada rápida de Fourier, podemos seleccionar niveles  $J_{min} \leq j \leq J_{max}$ , donde la energía de  $g$  sea significativa:

$$g(t) = \sum_{j=J_{min}}^{J_{max}} g_j(t) + r, \quad \text{con } \|r\|_2 < \epsilon \|g\|_2 \cong 0$$

con  $g_j = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{jk} \psi_{jk} \in W_j$  la proyección de  $g$  en el subespacio wavelet  $W_j$  y  $c_{jk} = \langle g, \psi_{jk} \rangle$  los respectivos coeficientes. Denotamos  $\tilde{g}_j$  a la proyección truncada,

$$\tilde{g}_j(t) = \sum_{k \in \mathbb{K}_j} c_{jk} \psi_{jk}(t) \quad (5)$$

donde  $\mathbb{K}_j \subset \mathbb{Z}$ ,  $|\mathbb{K}_j| = \eta_j < \infty$  se elige de manera que

$$\sum_{k \notin \mathbb{K}_j} |\langle g, \psi_{jk} \rangle|^2 < \epsilon \|g_j\|^2, \quad \epsilon \cong 0.$$

Esta aproximación de la proyección del dato  $g$  en  $W_j$  puede mejorarse considerando más términos en (5), es decir, ampliando el subconjunto  $\mathbb{K}_j$ . Sin embargo, cuando el valor de los coeficientes es poco significativo el aporte de los mismos resulta despreciable.

#### 3.2. Una ecuación diferencial auxiliar

Dada la función causal  $g \in L^2(-\infty, b]$ ,  $b > 0$ ,  $g(0) = 0$ , construimos  $f \in C^1(-\infty, b]$  solución de la ecuación diferencial auxiliar

$$\mathcal{D}_{-\infty}^\alpha f(t) + \lambda_1 f'(t) + \lambda_0 f(t) = g(t), \quad \lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

Observamos que en este caso

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{-\infty}^\alpha f(t) + \lambda_1 f'(t) + \lambda_0 f(t) &= \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega) h(\omega) e^{i\omega t} d\omega + \frac{\lambda_1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} i\omega \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ &+ \frac{\lambda_0}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega) \left( \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} h(\omega) + \frac{i\omega \lambda_1}{2\pi} + \frac{\lambda_0}{2\pi} \right) e^{i\omega t} d\omega \\ &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega) H(\omega) e^{i\omega t} d\omega = g(t), \end{aligned} \quad (7)$$

con

$$H(\omega) = \frac{-\lambda_1(1 - \alpha)\omega^2 + i(M(\alpha) + \alpha\lambda_1 + (1 - \alpha)\lambda_0)\omega + \alpha\lambda_0}{2\pi(\alpha + i\omega(1 - \alpha))}.$$

Sean  $u_{jk}$  a las imágenes de los elementos de la base wavelet  $\psi_{jk}$  por el operador diferencial  $\mathcal{A}$  que define la ecuación,  $\mathcal{A}f = \mathcal{D}_{-\infty}^\alpha f + \lambda_1 f' + \lambda_0 f$ , entonces

$$u_{jk}(t) = \mathcal{A}\psi_{jk}(t) = \mathcal{D}_{-\infty}^\alpha \psi_{jk}(t) + \lambda_1 \psi'_{jk}(t) + \lambda_0 \psi_{jk}(t) = \int_{\Omega_j} \widehat{\psi}_{jk}(\omega) H(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (8)$$

En la Fig. 1 mostramos el gráfico de algunas de estas imágenes para observar su similitud con las wavelets. Como veremos más adelante, su cálculo efectivo no será necesario para resolver la Ec. (6) ya que en el esquema de aproximación sólo utilizaremos los productos  $\langle u_{jk}, \psi_{jm} \rangle$ .

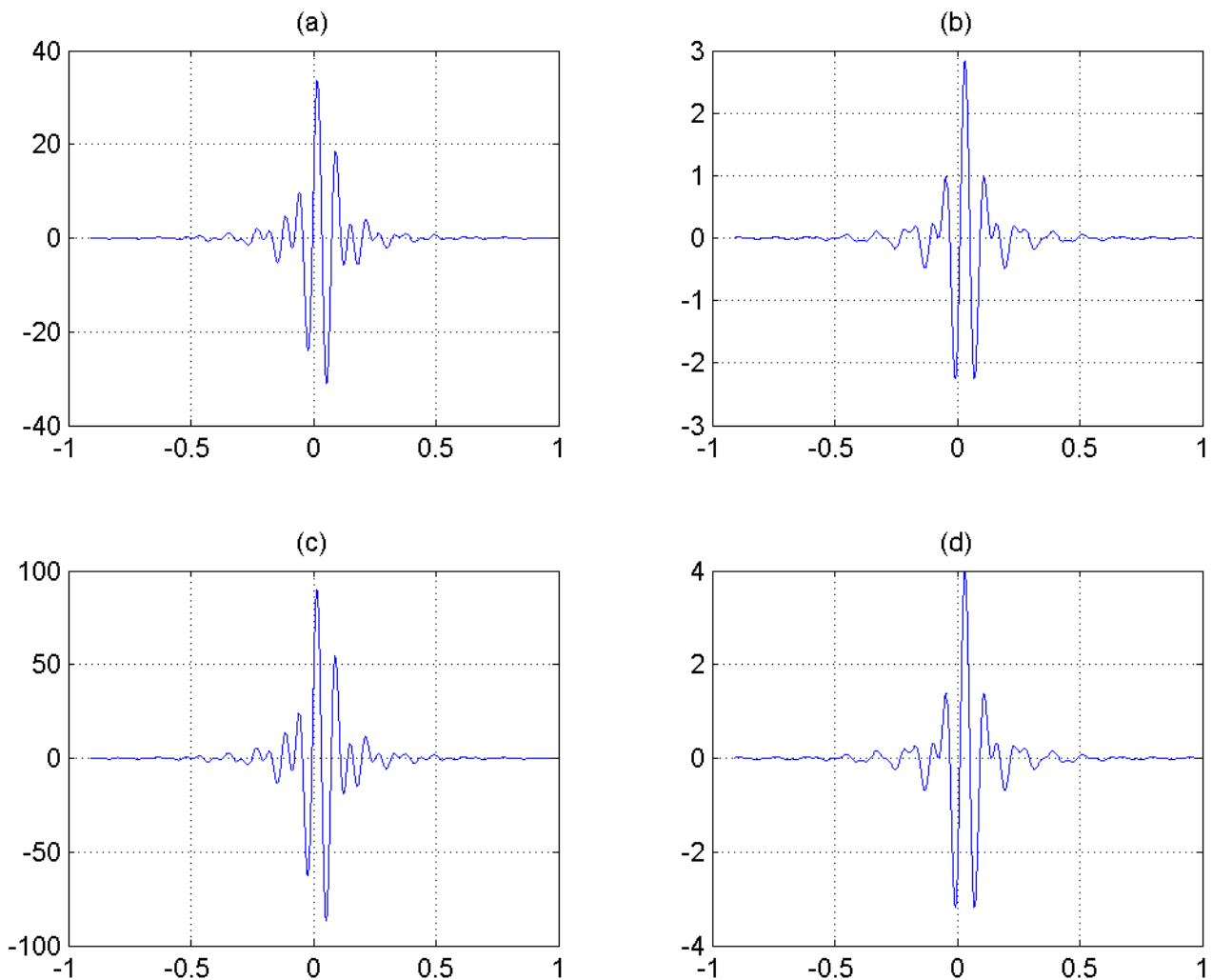


Figura 1: Algunas wavelets y sus respectivas imágenes según el operador definido con  $\alpha = 0.5$ ,  $\lambda_1 = 0.3$  y  $\lambda_0 = 1$ : (a)  $u_{30}(t)$ , (b)  $\psi_{30}(t)$ , (c)  $u_{40}(t)$ , (d)  $\psi_{40}(t)$ .

A partir de la Ec. (8), observamos que el soporte de la transformada de Fourier de  $u_{jk}$  satisface  $\text{supp}(\hat{u}_{jk}) \subseteq \Omega_j$  y, basados en las propiedades de la base descritas en la subsección (2.2), podemos asumir que  $u_{jk} \in W_j$  y trabajar en cada uno de los niveles  $J_{min} \leq j \leq J_{max}$ .

Sea  $f = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} b_{jk} \psi_{jk}$  una solución de la Ec. (6). Para hallar los coeficientes wavelets de  $f$  en cada nivel  $j$  nos restringiremos al subconjunto  $\mathbb{K}_j$ , obteniendo la siguiente ecuación

$$\mathcal{A}f_j(t) = \mathcal{D}_{-\infty}^{\alpha} f_j(t) + \lambda_1 f'_j(t) + \lambda_0 f_j(t) \cong \sum_{k \in \mathbb{K}_j} b_{jk} u_{jk}(t) \cong \tilde{g}_j(t). \quad (9)$$

Para calcular los coeficientes  $b_{jk}$  trabajamos con las ecuaciones normales

$$\sum_{k \in \mathbb{K}_j} b_{jk} \langle u_{jk}, \psi_{jm} \rangle = \sum_{k' \in \mathbb{K}_j} c_{jk'} \langle \psi_{jk'}, \psi_{jm} \rangle$$

o equivalentemente en forma matricial

$$\mathcal{M}^j \mathbf{b}^j = \mathbf{c}^j, \quad \mathbf{b}^j, \mathbf{c}^j \in \mathbb{R}^{\eta_j},$$

donde los elementos de la matriz son  $\mathcal{M}_{jm}^j = \langle u_{jk}, \psi_{jm} \rangle$ .

A partir de las propiedades de la base wavelet sabemos que estos productos internos resultan nulos para  $m > N$  por lo que la matriz  $\mathcal{M}^j$  asociada al sistema es una matriz banda no singular y consecuentemente el cálculo de los coeficientes resulta eficiente.

Observemos que si  $g$  es causal,  $g(0) = 0$ , sus coeficientes wavelets  $c_{jk}$ , correspondientes al rango  $t \leq 0$ , son casi todos nulos, salvo los asociados a las wavelets cuyo soporte contiene un entorno del origen y, por lo tanto, el vector  $\mathbf{b}^j \cong 0$ .

Finalmente, considerando para cada  $J_{min} \leq j \leq J_{max}$  las proyecciones truncadas de la incógnita  $\tilde{f}_j = \sum_{k \in \mathbb{K}_j} b_{jk} \psi_{jk}$ , construimos la solución aproximada de (6), como combinación finita de wavelets,

$$\tilde{f}(t) = \sum_{J_{min}}^{J_{max}} \tilde{f}_j(t) \quad (10)$$

que satisface  $f(0) \cong 0$ ,  $f'(0) \cong 0$ .

### 3.3. La solución del PVI

Consideramos para  $g(t) = 0$ ,  $t \leq 0$  el PVI (1)

$$\begin{cases} \mathcal{D}_0^{\alpha} f(t) + \lambda_1 f'(t) + \lambda_0 f(t) & = g(t), \quad t > 0 \\ f(0) & = 0. \end{cases}$$

Sea  $f \in C^1[0, b]$  la solución aproximada de (6), i. e.,

$$\mathcal{A}f(t) = \mathcal{D}_{-\infty}^{\alpha} f(t) + \lambda_1 f'(t) + \lambda_0 f(t) = g(t)$$

construida según el desarrollo detallado en la subsección (3.2). Definimos  $\bar{f} = f \cdot \chi_{[0,b]}$ .  $\bar{f}$  satisface:

- $\bar{f}(0) = 0$
- $\bar{f} \in C^1[0, b]$

- $\mathcal{A}f(t) = \mathcal{D}_0^\alpha \bar{f}(t) + \lambda_1 \bar{f}'(t) + \lambda_0 \bar{f}(t), \quad t > 0.$

Efectivamente, para  $t < 0$  vale  $\bar{f}'(t) = 0$  y  $\bar{f}(t) = 0$ , y para  $t > 0$ ,  $\bar{f}'(t) = f'(t)$ . Además

$$\begin{aligned} \mathcal{A}f(t) &= e^{-\frac{\alpha t}{1-\alpha}} \mathcal{D}_{-\infty}^\alpha f(0) + \mathcal{D}_0^\alpha f(t) + \lambda_1 f'(t) + \lambda_0 f(t) \\ &= e^{-\frac{\alpha t}{1-\alpha}} (g(0) - \lambda_1 f'(0) - \lambda_0 f(0)) + \mathcal{D}_0^\alpha \bar{f}(t) + \lambda_1 \bar{f}'(t) + \lambda_0 \bar{f}(t) \\ &= \mathcal{D}_0^\alpha \bar{f}(t) + \lambda_1 \bar{f}'(t) + \lambda_0 \bar{f}(t). \end{aligned}$$

Por lo tanto, hemos construido una solución aproximada  $\bar{f}$  como combinación de elementos de la base wavelet elegida.

**Proposición 3. 1.** Existe una única función  $f \in C^1[0, b]$  solución del PVI (1).

*Demostración:* Sean dos soluciones del PVI (1),  $f_1$  y  $f_2$  y su diferencia  $f = f_1 - f_2 \in C^1[0, b]$ . Entonces  $f(0) = 0$ . Veamos que  $f$  es nula.

A partir de la ecuación original e integrando por partes obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_0^\alpha f(t) + \lambda_1 f'(t) + \lambda_0 f(t) &= \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} e^{-\frac{\alpha t}{1-\alpha}} \int_0^t f'(\tau) e^{\frac{\alpha \tau}{1-\alpha}} d\tau + \lambda_1 f'(t) + \lambda_0 f(t) \\ &= \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} e^{-\frac{\alpha t}{1-\alpha}} \left( f(t) e^{\frac{\alpha t}{1-\alpha}} - \int_0^t f(\tau) e^{\frac{\alpha \tau}{1-\alpha}} \frac{\alpha}{1-\alpha} d\tau \right) \\ &+ \lambda_1 f'(t) + \lambda_0 f(t) = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Sea  $m(t) = \int_0^t f(\tau) e^{\frac{\alpha \tau}{1-\alpha}} d\tau$ , que satisface

- $m \in C^2[0, b]$
- $m(0) = 0$
- $m'(0) = 0$  ya que  $m'(t) = f(t) e^{\frac{\alpha t}{1-\alpha}}$
- $m''(t) = f'(t) e^{\frac{\alpha t}{1-\alpha}} + m'(t) \frac{\alpha}{1-\alpha}.$

Entonces, reemplazando  $f(t) = m'(t) e^{-\frac{\alpha t}{1-\alpha}}$  en la Ec. (11) resulta que  $m$  satisface la siguiente ecuación lineal homogénea a coeficientes constantes,

$$\begin{cases} \lambda_1 m''(t) + \left( \frac{M(\alpha) - \alpha \lambda_1 + (1-\alpha) \lambda_0}{1-\alpha} \right) m'(t) - \left( \frac{M(\alpha) \alpha}{(1-\alpha)^2} \right) m(t) = 0 \\ m(0) = 0 \\ m'(0) = 0, \end{cases}$$

cuya única solución es  $m \equiv 0$ .

Entonces  $f(t) = 0, \forall t > 0$ . □

**Observación 3. 1.** El método propuesto se puede extender a la resolución de ecuaciones más generales:

$$\tilde{\mathcal{A}}f(t) = \mathcal{D}_{-\infty}^\alpha f(t) + \sum_{n=0}^N \lambda_n f^{(n)}(t) = g(t),$$

con parámetros  $\{\lambda_n\}_{n=0}^N \in \mathbb{R}$  fijos. En este caso resulta

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{A}}f(t) &= \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) h(\omega) e^{i\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^N a_n \int_{\mathbb{R}} (i\omega)^n \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ &= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) \left( \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} h(\omega) + \sum_{n=0}^N \lambda_n \frac{(i\omega)^n}{2\pi} \right) e^{i\omega t} d\omega \\ &= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) \tilde{H}(\omega) e^{i\omega t} d\omega = g(t),\end{aligned}$$

con

$$\tilde{H}(\omega) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} h(\omega) + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^N \lambda_n (i\omega)^n.$$

#### 4. APLICACIÓN NUMÉRICA

Como mencionamos anteriormente existen numerosas aplicaciones de la derivada de orden fraccionario que describen diferentes modelos reales (Atangana y Alqahtani, 2016; Caputo, 2000; Cesarone et al., 2005; Caputo y Fabrizio, 2015a, 2016; Lin y Lu, 2013).

Para ilustrar la técnica propuesta en este trabajo presentamos la solución aproximada de un PVI sencillo. Sea

$$\begin{cases} \mathcal{D}_0^{0.5} f(t) + 0.3f'(t) + f(t) &= g(t) \\ f(0) &= 0. \end{cases} \quad (12)$$

donde  $g$  es causal,  $g = \mathcal{A}f$  siendo  $f = v(t)(\sin(16\pi t) - 0.5 \sin(2.5\pi t))$ , y  $v$  una ventana suave en el rango  $[0, 4]$ .

En la Fig. 2 mostramos los gráficos de  $g$  y la solución *exacta* del PVI (12). La Tabla 1 contiene el análisis wavelet de energías por niveles de las funciones  $g$  y  $f$ . Los niveles significativos  $j = 3, 4$  contienen el 97 % de la misma. En la Fig. 3 graficamos la suma de las reconstrucciones de las

| nivel $j$ | energía de $g$ (%) | energía de $f$ (%) | frecuencia angular ( $\omega$ ) |
|-----------|--------------------|--------------------|---------------------------------|
| 5         | 0.0057             | 0.0006             | [100.5, 201.2]                  |
| 4         | 0.1205             | 0.7313             | [50.2, 100.5]                   |
| 3         | 0.8517             | 0.0641             | [25.1, 50.2]                    |
| 2         | 0.0024             | 0.0109             | [12.5, 25.1]                    |
| 1         | 0.0164             | 0.1587             | [6.28, 12.5]                    |
| 0         | 0.0031             | 0.0306             | [3.14, 6.28]                    |

Tabla 1: Distribución de energías de la función dato  $g$  y de la solución  $f$ .

componentes  $\sum_{j=1}^4 \tilde{f}_j$ , la solución aproximada según la Ec. (10). Los números de condición de las matrices que intervienen en la reconstrucción son:  $\text{cond}(\mathcal{M}^1) \cong 1.2$ ,  $\text{cond}(\mathcal{M}^2) \cong 1.5$ ,  $\text{cond}(\mathcal{M}^3) \cong 1.8$  y  $\text{cond}(\mathcal{M}^4) \cong 1.9$ . El error cuadrático de aproximación en este caso resulta del orden de  $10^{-5}$ .

#### 5. CONCLUSIONES

En este trabajo hemos propuesto una solución aproximada para un problema de valores iniciales cuya ecuación contiene derivadas de orden natural y de orden fraccionario. Considerando la derivada fraccionaria de Caputo-Fabrizio recientemente presentada en Caputo y Fabrizio



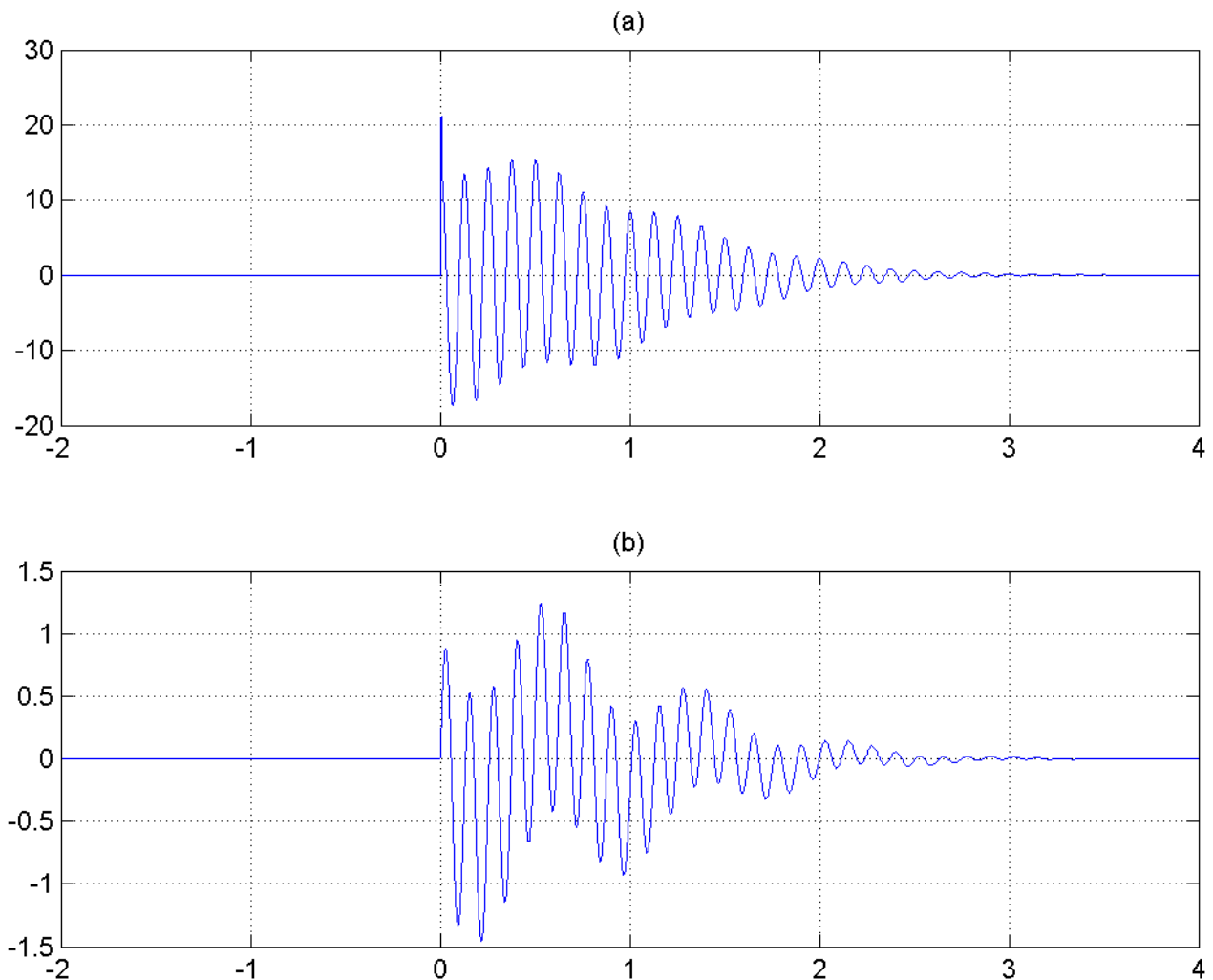


Figura 2: (a) La función de prueba  $g(t)$ , (b) La solución *exacta*  $f(t)$  del PVI (12).

(2015b). Adaptamos el esquema de aproximación desarrollado en Troparevsky et al. (2016) para las ecuaciones asociadas a los operadores integrales que actúan sobre la transformada de Fourier. Esta técnica fue implementada con éxito para el cálculo de primitivas respecto de la derivada de Caputo clásica (Serrano et al. (2017)), de Caputo-Fabrizio (Troparevsky y Fabio (2017); Fabio y Troparevsky (2018a)) y algunos PVI (Fabio y Troparevsky (2018b)). El esquema de aproximación resulta simple, eficiente y numéricamente estable gracias a la regularidad del operador integral involucrado y las propiedades de la base de wavelets elegida. Ilustramos la eficacia del método propuesto con un ejemplo clásico de prueba.

## REFERENCIAS

- Agrawal O.P. A general formulation and solution scheme for fractional optimal control problems. *Nonlinear Dynam.*, 38:323–337, 2004.
- Al-Salti N., Karimov E., y Sadarangani K. On a differential equation with Caputo-Fabrizio fractional derivative of order  $1 < \beta \leq 2$  and application to mass-spring-damper system.

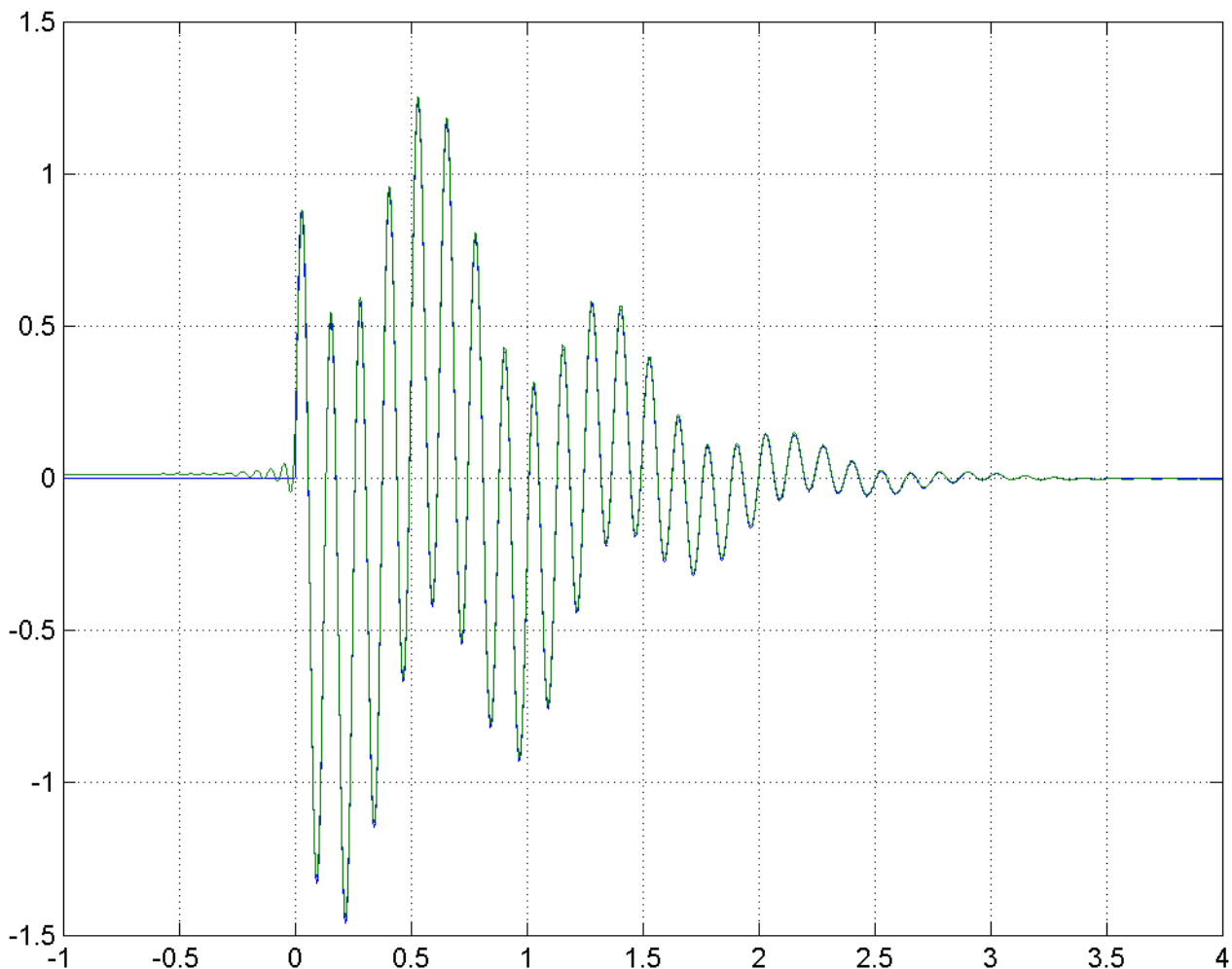


Figura 3: Solución exacta del PVI (12) (azul) y su aproximación (verde).

132:54, 2016.

Almeida R. y Torres F.M. Necessary and sufficient conditions for the fractional calculus of variations with Caputo derivatives. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2010.

Atangana A. y Alqahtani R. Numerical approximation of the space-time caputo fabrizio fractional derivative and application to ground water pollution equation. *Advances in Difference Equations*, 156, 2016.

Baleanu D., Diethelm K., y et. al. *Fractional Calculus: Models and Numerical Methods*, volumen 5. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Series on Complexity, Nonlinearity and Chaos, Second Ed., 2017.

Caputo M. Models of flux in porous media with memory. *Water Resources Research*, 36:693–705, 2000.

Caputo M. y Fabrizio M. Damage and fatigue described by a fractional derivative model. *Journal of Computational Physics*, 2015a.

- Caputo M. y Fabrizio M. A new definition of fractional derivative without singular kernel. *Natural Sciences Publishing Cor., Progress in Fractional Differentiation and Applications*, 1:73–85, 2015b.
- Caputo M. y Fabrizio M. Applications of new time and spatial fractional derivatives with exponential kernels. *Natural Sciences Publishing Cor., Progress in Fractional Differentiation and Applications*, 2, 2016.
- Ceretani A. y Tarzia D.A. Determination of two unknown thermal coefficients through an inverse one-phase fractional Stefan problem. 20, 2017.
- Cesarone F., Caputo M., y Cametti C. Memory formalism in the passive diffusion across highly heterogeneous systems. *Journal of Membrane Science*, 2005.
- Crank J. The mathematics of diffusion. *Calderon Press, Oxford*, 1979.
- Fabio M. y Troparevsky M.I. An inverse problem for the Caputo fractional derivative by means of the wavelet transform. *Natural Sciences Publishing Cor., Progress in Fractional Differentiation and Applications*, 4:15–26, 2018a.
- Fabio M. y Troparevsky M.I. Numerical solution to initial value problems for fractional differential equations. *Proceedings of the First International Conference on Applied Mathematics in Engineering (ICAME-18)*, 1:42, 2018b.
- Fabio M.A. y Serrano E.P. Infinitely oscillating wavelets and an efficient implementation algorithm based on the FFT. *Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones*, 2:61–69, 2015.
- Herrmann R. Folded potentials in cluster physics: a comparison of Yukawa and Coulomb potentials with Riesz fractional integrals. *J. Phys. A.*, 40, 2013.
- Lin D. y Lu C.H. Laplace transform for solving some families of fractional differential equations and its applications. 16, 2013.
- Losada J. y Nieto J. Properties of a new fractional derivative without singular kernel. *Progress in Fractional Differentiation and Applications. An International Journal*, 2:73–85, 2015.
- Mallat S. *A Wavelet Tour of Signal Processing*. S. Mallat, 2009.
- Meyer Y. Ondelettes et operateurs 2: Operateurs de Calderon Zygmund. *Hermann et Cie*, 1990.
- Miller K. y Ross B. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. *John Wiley & Sons Inc., New York*, 2:247–256, 1993.
- Odzijewicz T., Malinowska A.B., y Torres D.F.M. Fractional calculus of variations in terms of a generalized fractional integral with applications to physics. *Abstr. Appl. Anal. Art. ID 871912*, 24, 2012.
- Oldham K. y Spanier J. The fractional calculus: Theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order. *New York: Academic Press*, 2006.
- Podlubny I. *Fractional differential equations*. Academic Press, 1991.
- Serrano E., Troparevsky M., y Fabio M. Aproximaciones numéricas de operadores fraccionarios por medio de la transformada wavelet. *Matemática Aplicada, Computacional e Industrial*, 6:284–287, 2017.
- Troparevsky M., Serrano E., y Fabio M. Approximate solutions to integral equations by wavelet decomposition methods. *Asociación Argentina de Mecánica Computacional*, páginas 3383–3394, 2016.
- Troparevsky M.I. y Fabio M. La nueva derivada de Caputo: Cálculo aproximado de primitivas utilizando una familia de wavelets de banda limitada. *Asociación Argentina de Mecánica Computacional*, XXXV:2547–2557, 2017.
- Walnut D.F. *An Introduction to Wavelet Analysis. Applied and Numerical Harmonic Analysis*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Series on Complexity, Nonlinearity and Chaos, Second Ed. Birkhauser, 2002.