

REFINAMIENTO ADAPTATIVO EN PROBLEMAS NO ESTACIONARIOS

Gustavo A. Ríos Rodríguez, Norberto Nigro, Mario Storti

*Centro Internacional de Métodos Computacionales en Ingeniería CIMEC
Universidad Nacional del Litoral, CONICET
Güemes 3450, 3000, Santa Fe, Argentina
e-mail: gusadrr@yahoo.com.ar, web page: www.cimec.org.ar*

Palabras clave: Refinamiento adaptativo, criterios de refinamiento, indicadores de error

Resumen. Se presenta una estrategia que permite extender una técnica de refinamiento adaptativo tipo- h a problemas no estacionarios. En este trabajo, la misma se aplica a un problema de prueba de flujo compresible. La técnica de refinamiento propiamente dicha ya se ha presentado en un trabajo anterior, y se ha aplicado a problemas estacionarios bidimensionales y tridimensionales. La elección de la forma en que se realiza el refinamiento se sustenta en el hecho de que la misma mantiene acotada la degradación de la calidad de los elementos. El refinamiento particiona a los elementos en elementos del mismo tipo y admite la existencia de a lo sumo un único nodo irregular entre elementos vecinos, en cuyo caso la solución queda restringida en estos nodos. Se describen algunos criterios para capturar y seguir a las estructuras sobre las cuales se desea aplicar el refinamiento, así como también la forma en que se acopla el programa que resuelve las ecuaciones del problema fluido-dinámico (PETSc-FEM) con aquél que realiza el refinamiento propiamente dicho. Se muestran resultados obtenidos al aplicar esta estrategia en un problema de prueba.

1. INTRODUCCIÓN

Este trabajo presenta una estrategia que permite extender el refinamiento adaptativo tipo-h a problemas no estacionarios, ya sea sobre mallas estructuradas o no estructuradas, bidimensionales o tridimensionales. La forma de realizar el refinamiento de los elementos ya ha sido presentada en mayor detalle en un trabajo anterior de los mismos autores (Ríos Rodríguez et al., 2005). Por lo tanto, sólo se recordarán los aspectos más importantes de la misma. La operación de refinamiento de los elementos es el núcleo alrededor del cual se desarrolla la estrategia de extensión a problemas no estacionarios. Dado que la operación de refinamiento de los elementos ya ha sido probada en problemas bidimensionales y tridimensionales, y por el carácter de núcleo que se le da a la misma en la presente estrategia, es que la extensión del refinamiento adaptativo a problemas no estacionarios bi- y tridimensionales resulta inmediata. También se describe al resto de las operaciones que completan la estrategia para problemas no estacionarios. Estas operaciones son: la selección de los elementos a refinar (para lo cual es necesario definir criterios de selección), la generación de las listas de los elementos que se deben refinar en cada uno de los niveles de refinamiento, el refinamiento propiamente dicho, la actualización de las listas de los elementos a refinar cuando se aplica más de un nivel de refinamiento, el cálculo de la información necesaria para poder realizar las corridas y la ejecución del programa que resuelve las ecuaciones del problema (en éste caso se considera un problema fluido dinámico). La estrategia se aplica en un problema de prueba bien conocido como lo es el problema de Riemman. Dada la etapa de desarrollo conceptual de la estrategia, el objetivo de las corridas es probar que la misma es capaz de capturar discontinuidades que se mueven en el dominio del problema. Se comenta el criterio de selección de los elementos a refinar para éste problema en particular.

2. REFINAMIENTO DE LOS ELEMENTOS

La estrategia de refinamiento consiste en particionar a los elementos en otros más pequeños (refinamiento tipo-h), del mismo tipo que los elementos de partida. El refinamiento adaptativo que se realiza tiene como criterio principal el permitir la presencia de nodos irregulares en la malla. A lo sumo se admite un nodo irregular entre elementos “vecinos”, entendiéndose por elementos “vecinos” a aquellos que tienen al menos una arista o una cara en común. Se entiende por nodos irregulares a aquellos nodos que, a causa del refinamiento de un elemento, nacen en la mitad de una arista o en el centro de una cara, tales que no todos los elementos que son vecinos por medio de esa arista o de esa cara son o están refinados (también se los conoce como *hanging nodes* ó *green nodes*). El hecho de no permitir más de un nodo irregular entre elementos vecinos obliga a que no pueda existir una diferencia de más de un nivel de refinamiento entre ellos. Esto condiciona a la forma en que se realiza el refinamiento. Además, la solución debe restringirse en estos nodos irregulares al valor promedio de la solución en los nodos que definen a la cara o arista sobre la cual surgieron los mismos.

Se ha visto que esta estrategia para refinar la malla no degrada la calidad de los elementos y que en el caso particular del refinamiento de tetraedros, si se considera la secuencia de refinamiento ilustrada en la figura 1, la cual considera la diagonal más corta para refinar al octaedro central, el comportamiento de la calidad del peor de los elementos obtenidos es tal que puede disminuir de manera acotada la primera vez que se aplica el refinamiento, pero si se vuelve a refinar a los elementos que se obtuvieron del primer refinamiento, entonces la calidad del elemento de peor calidad no disminuye con respecto a la peor calidad antes obtenida. Este comportamiento sigue siendo válido para todos los niveles de refinamiento a partir del segundo

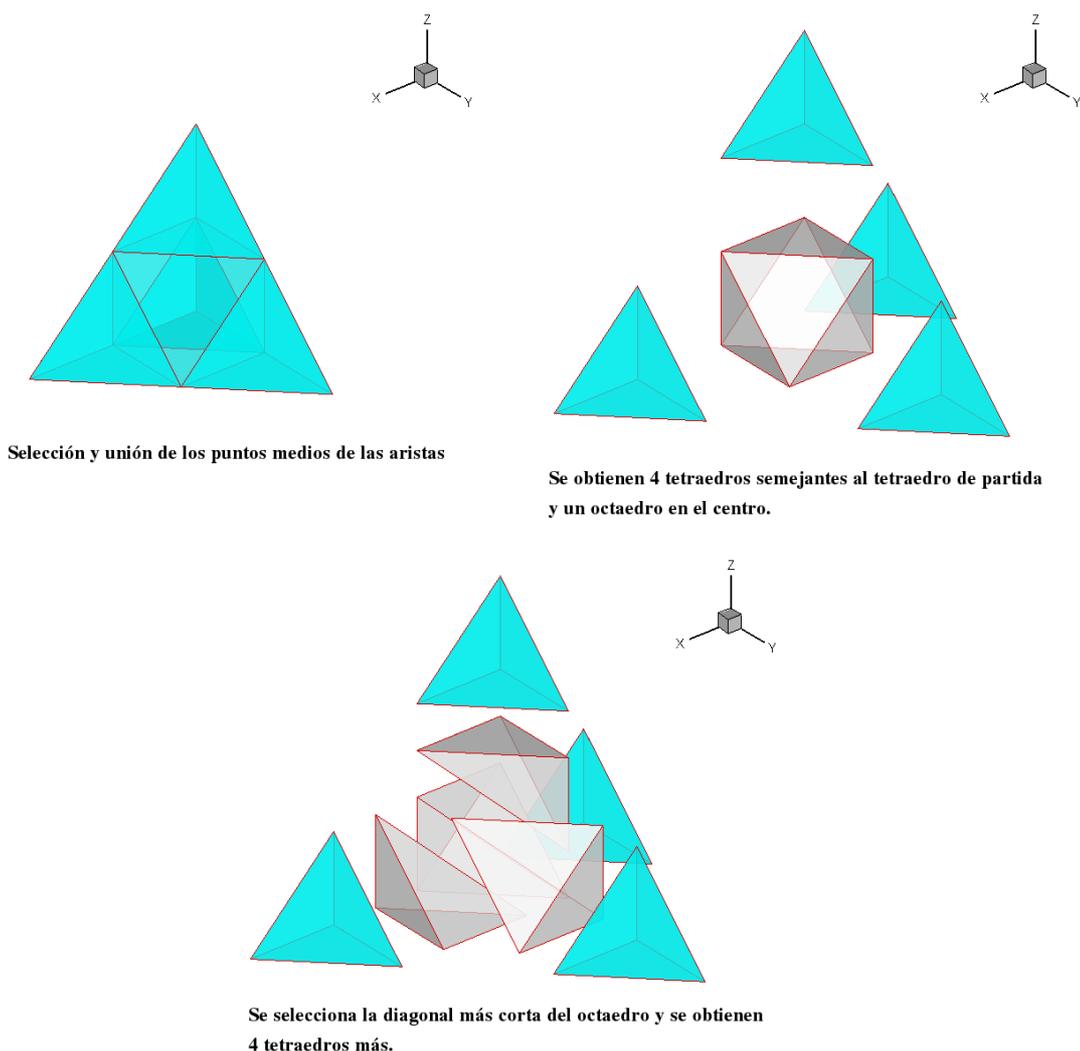


Figura 1: Secuencia óptima (en cuanto a calidad) de refinamiento para tetraedros.

nivel. En la figura 2 se muestran ejemplos de esto y de lo que sucede si no se elige a la diagonal más corta para refinar al octaedro central. Las métricas de calidad con las que se midió este comportamiento son los ángulos diedros máximos y mínimos, y la relación $Q = 36\sqrt{2}V / \sum_{i=1}^6 l_i^3$, donde V es el volumen del tetraedro y la sumatoria se extiende sobre las longitudes al cubo de cada una de las aristas, afectado por la constante $36\sqrt{2}$ tal que $Q = 1$ para el tetraedro regular. En el primer refinamiento, se ha observado que la disminución de la calidad del elemento de peor calidad exhibe un comportamiento no lineal si tomamos como parámetro al índice Q del elemento inicialmente refinado, y puede presentarse aún el caso en el cual la calidad del peor elemento no disminuya.

La posibilidad de admitir nodos irregulares en la malla evita el costo adicional de tener que gestionar “plantillas” para eliminarlos. Además, el refinamiento de los elementos en otros del mismo tipo permite conservar el tipo de elemento utilizado en la malla, lo que puede resultar ventajoso en cuanto a costo en algunos casos.

En el caso de cuadrángulos y triángulos, el refinamiento de los elementos se realiza uniendo con nuevas aristas los puntos medios de las aristas del elemento refinado. De esta forma, por

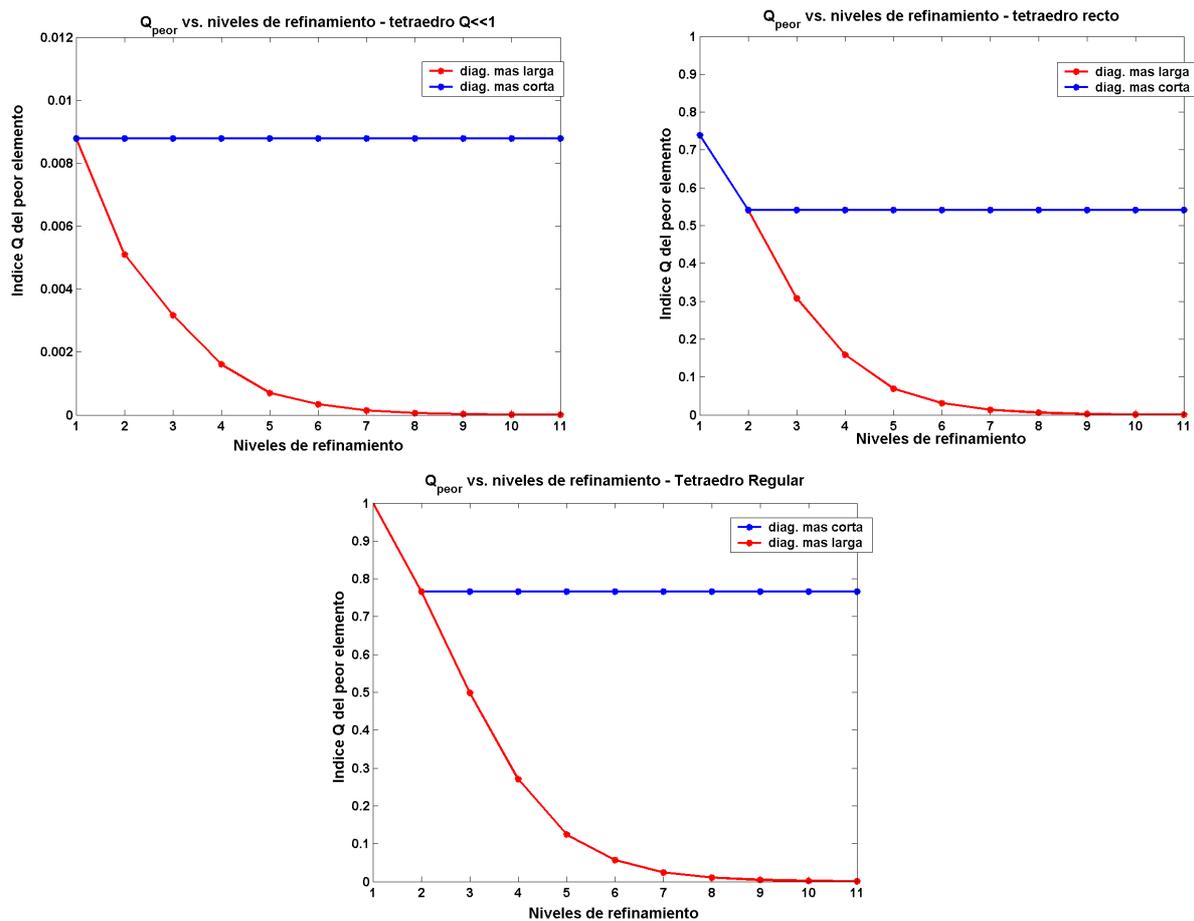


Figura 2: Comportamiento del índice de calidad Q según la calidad del tetraedro de partida y la diagonal seleccionada para el refinamiento.

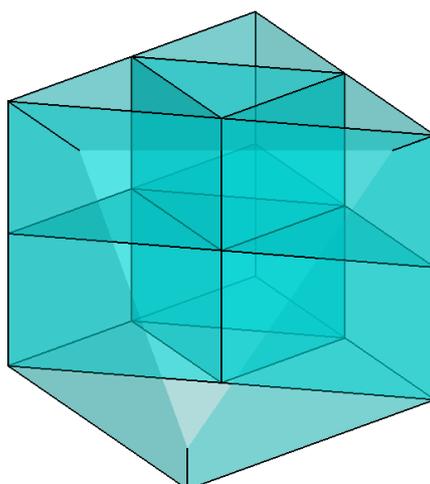


Figura 3: Refinamiento de prismas triangulares

cada triángulo o cuadrángulo refinado se obtienen 4 elementos nuevos del tipo correspondiente. En el caso de hexaedros, la partición del elemento se lleva a cabo de la siguiente manera: cada cara del hexaedro se refina de la misma forma que un elemento cuadrilátero. Luego se genera un nuevo nodo en el centro geométrico del hexaedro y se une al mismo, con nuevas aristas, a cada uno de los puntos que surgieron en el centro de las caras refinadas. Así, por cada hexaedro que se refina se obtienen 8 hexaedros nuevos. Para tetraedros, se sigue el procedimiento descrito en la figura 1, por lo que también se obtienen 8 tetraedros por cada tetraedro que se refina. El refinador también soporta el refinamiento de prismas triangulares, en los cuales el refinamiento de las caras triangulares se realiza como en el caso de los elementos triangulares y el de las caras cuadrangulares como si se tratase de elementos cuadrangulares. De esta forma, también se obtienen 8 elementos por cada uno que se refina. La posibilidad de refinar elementos prismáticos triangulares resulta de interés dada la aplicación de estos elementos en la “piel” de objetos. La figura 3 presenta la forma en que se refinan.

3. ESTRATEGIA PARA REFINAMIENTO EN PROBLEMAS NO ESTACIONARIOS

La estrategia para extender la herramienta de refinamiento adaptativo a problemas no estacionarios, se basa en el concepto de utilizar siempre una misma malla como malla de partida para actualizar la malla refinada que se utiliza para realizar las corridas. La actualización de la malla se produce con una frecuencia determinada, estipulada por el usuario. Esto significa que una nueva corrida se inicia con la misma frecuencia que la de actualización de la malla. Esta frecuencia se indica como **nstep** medida en pasos de tiempo. El procedimiento de actualización de la malla se repite al finalizar cada corrida. De esta manera, las mallas generadas por el refinamiento pueden ser vistas como una estructura de árbol, donde la raíz del árbol es la malla de partida y todas las mallas generadas por el refinamiento con la frecuencia de actualización prefijada son las hojas del árbol. Todas las mallas generadas por el procedimiento de refinamiento en un mismo instante constituyen una rama del árbol, y el máximo nivel de refinamiento para la malla que se utilizará en las corridas indica cual es la altura del árbol. La figura 4 representa la presente idea.

Teniendo en cuenta lo anterior, las etapas de la estrategia pueden describirse en los siguientes pasos,

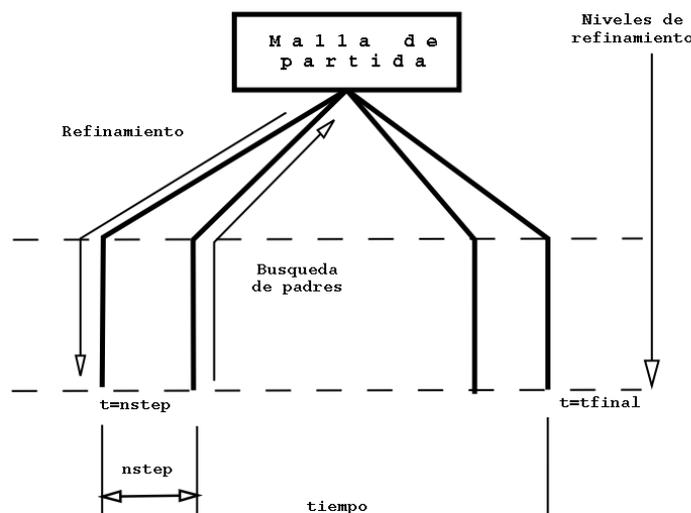


Figura 4: Representación de la estrategia en forma de árbol

1. Inicialmente, el usuario determina parámetros generales del problema a resolver, entre los más importantes se encuentran el tiempo final e inicial, el número máximo de niveles de refinamiento que tendrán las mallas que se utilizarán en las corridas y la frecuencia de actualización de la malla.
2. Luego se ejecuta el programa que resuelve las ecuaciones del problema, con lo que se obtiene una solución sobre la malla de partida.
3. Sobre esta solución se selecciona, utilizando un determinado criterio, un conjunto de elementos a refinar. Como que es la primera vez que se refina a la malla de partida, entonces esta lista de elementos seleccionados es la lista definitiva de elementos a refinar. Se refina a estos elementos y si se ha estipulado más de un nivel de refinamiento, se repite el procedimiento de selección y refinamiento pero sobre la malla que se obtuvo con el refinador, las veces que sea necesario hasta que se alcanza el número máximo de refinamientos definido por el usuario. De cada uno de estos refinamientos se obtiene una estructura de datos, parte de la cual relaciona a los elementos padres e hijos en cada refinamiento que se ha hecho.
4. En función de las características de la malla refinada, se calculan los parámetros adecuados para ejecutar una nueva corrida. La implementación permite guardar en disco la historia del refinamiento y de los estados obtenidos.
5. Se ejecuta el programa que resuelve las ecuaciones del problema sobre la malla refinada, utilizando como estado inicial para la corrida a aquél obtenido por interpolación del último estado obtenido en la corrida anterior.
6. Finalizada la corrida, se seleccionan los elementos a refinar sobre la última malla con el fin de actualizarla. La selección de los elementos sobre la última malla refinada presenta como ventaja el hecho de que no requiere “proyectar” el estado obtenido con la malla refinada sobre la malla de partida. De esta manera, no se sacrifica la calidad de la solución obtenida con la malla refinada. De esta etapa se obtiene una lista de elementos para refinar.

7. Dado que se ha fijado el número máximo de niveles de refinamiento, se debe aplicar un procedimiento para que las mallas que se obtengan no posean más niveles de refinamiento que el deseado. Este procedimiento consiste en determinar, sobre la lista de elementos seleccionados para refinar, cuáles de ellos poseen “padres” y cuáles no. Por elemento “padre” se hace referencia al elemento que se refino para obtener los elementos que tengo en la malla actual. De esta forma, si se eligieron para refinar elementos que ya pertenecen al máximo nivel de refinamiento, y que por ende tienen padres en la malla con un nivel de refinamiento inmediatamente menor, entonces se debe reemplazar a los hijos por sus padres en la lista de elementos a refinar para generar la malla con el refinamiento deseado. Para poder determinar si los elementos seleccionados poseen padres, se utiliza una función que recorre el árbol en búsqueda de esta propiedad. Si se determina que los elementos seleccionados para refinar no tienen padres, entonces los mismos pasan a la lista definitiva de elementos a refinar. De esta manera, se van generando las lista de elementos que es necesario refinar. Las figuras 5 ilustran lo anteriormente comentado.
8. Se refina, aplicando para cada nivel, la lista correspondiente generada en la etapa anterior. Si se realiza más de un nivel de refinamiento, entonces se deben actualizar las listas de elementos a refinar después de hacer el primer refinamiento. Esta actualización tiene que ver con el cambio de numeración de los elementos que se habían seleccionado para refinar cuando se hizo la búsqueda de padres con respecto a la numeración que tienen una vez que se ha aplicado el nivel de refinamiento precedente. La actualización de la lista implica el mapeo, o hallar la correspondencia, de la numeración de los elementos que se encuentran en dichas listas. Para poder hacerlo, se implementa una función que analiza y compara a las estructuras padres-hijos en el árbol de mallas y que genera el mapeo correspondiente. Una vez actualizada la lista de elementos a refinar para un determinado nivel, se aplica la etapa de refinamiento. Esta actualización de la numeración las listas de los elementos a refinar se repite para cada nivel de refinamiento a partir del segundo, y sólo después de que se ha generado el refinamiento correspondiente con la numeración actualizada o mapeada.
9. Se repite el procedimiento a partir del ítem 4), las veces que sea necesario para llegar al tiempo final o al número de pasos de tiempo requeridos.

La estrategia completa se presenta resumida en el diagrama de flujo de la figura 6. Tal como se observa en él, la gestión es llevada a cabo por un módulo o *driver*. El *driver* se encarga de lanzar la ejecución del solver PETSc-FEM (Storti et al., 1999-2006), y de llamar a la etapa de actualización de la malla (*update*). Dentro de la etapa de actualización se encuentra la selección de los elementos a refinar. Como se mencionara, el usuario debe determinar cual es el criterio de selección que desea utilizar. Lo más sencillo es utilizar como criterio al valor del gradiente por elemento de alguno de los campos escalares que constituyen al vector solución, o al valor de la solución en los nodos de los elementos. Además, se debe definir si se va a acotar el número máximo de elementos que se seleccionan para refinar o no, en cuyo caso se refinan aquellos elementos tales que su gradiente por elemento posean un valor acotado entre ciertos límites. Esta forma de seleccionar los elementos a refinar es bastante intuitiva, y es probable que una estimación del error de la solución sea una forma más precisa y formalmente correcta de realizar la selección. La búsqueda de padres y la confección de las listas definitivas de los elementos a refinar en cada nivel también se encuentra dentro de la etapa de actualización. La operación de refinamiento propiamente dicha es llevada a cabo por un módulo personalizado por el usuario

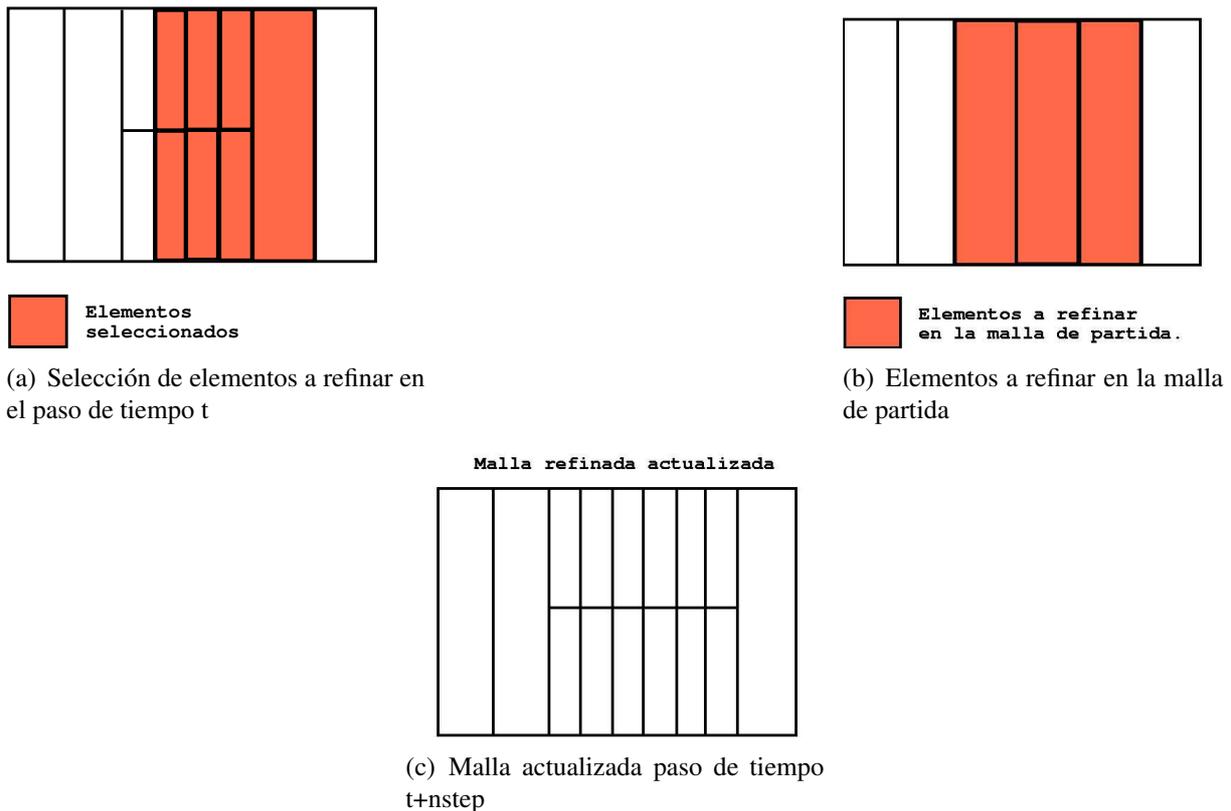


Figura 5: Secuencia de selección, búsqueda de padres y refinamiento.

según el problema que se resuelve. El mismo se considera conceptual y operativamente constituido por 3 etapas: pre-refinamiento, refinamiento y pos-refinamiento. Cada una de las tareas que se realizan en estas etapas están resumidas en las figuras 7. La actualización de las listas de los elementos a refinar, si se emplea más de un nivel de refinamiento, también es llevada a cabo por una función que forma parte de la etapa de actualización de la malla.

4. PROBLEMA DE PRUEBA

El problema de prueba que se escogió para comprobar el correcto funcionamiento de la estrategia de refinamiento en problemas no estacionarios es un problema 1-D, típico de la mecánica de fluidos computacional, conocido como el primer problema de Sod (Hirsh, 1990), que es un caso particular del problema de Riemman con las siguientes condiciones iniciales

$$U_L = \begin{bmatrix} \rho_L \\ u_L \\ p_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \text{ kg/m}^3 \\ 0 \text{ m/s} \\ 100000 \text{ N/m}^2 \end{bmatrix}$$

$$U_R = \begin{bmatrix} \rho_R \\ u_R \\ p_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,125 \text{ kg/m}^3 \\ 0 \text{ m/s} \\ 10000 \text{ N/m}^2 \end{bmatrix}$$

Se desea destacar que si bien el problema que se resuelve es 1-D, de ninguna manera es este el tipo de problemas objetivo para aplicar el refinamiento adaptativo, como sí lo son problemas bidimensionales y más aún tridimensionales. El motivo por el cual se lo elige es que al ser un

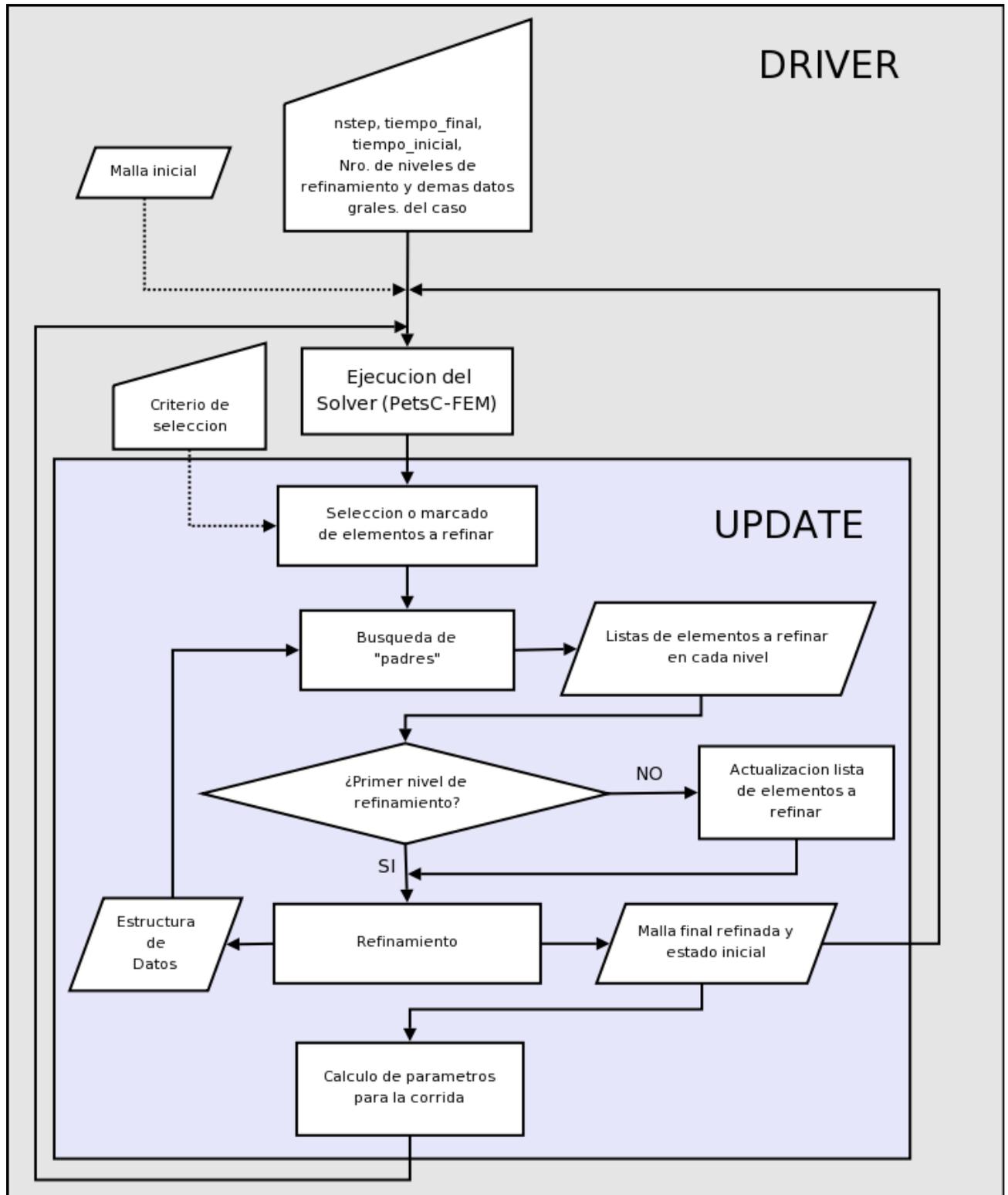


Figura 6: Estrategia de refinamiento en problemas no estacionarios

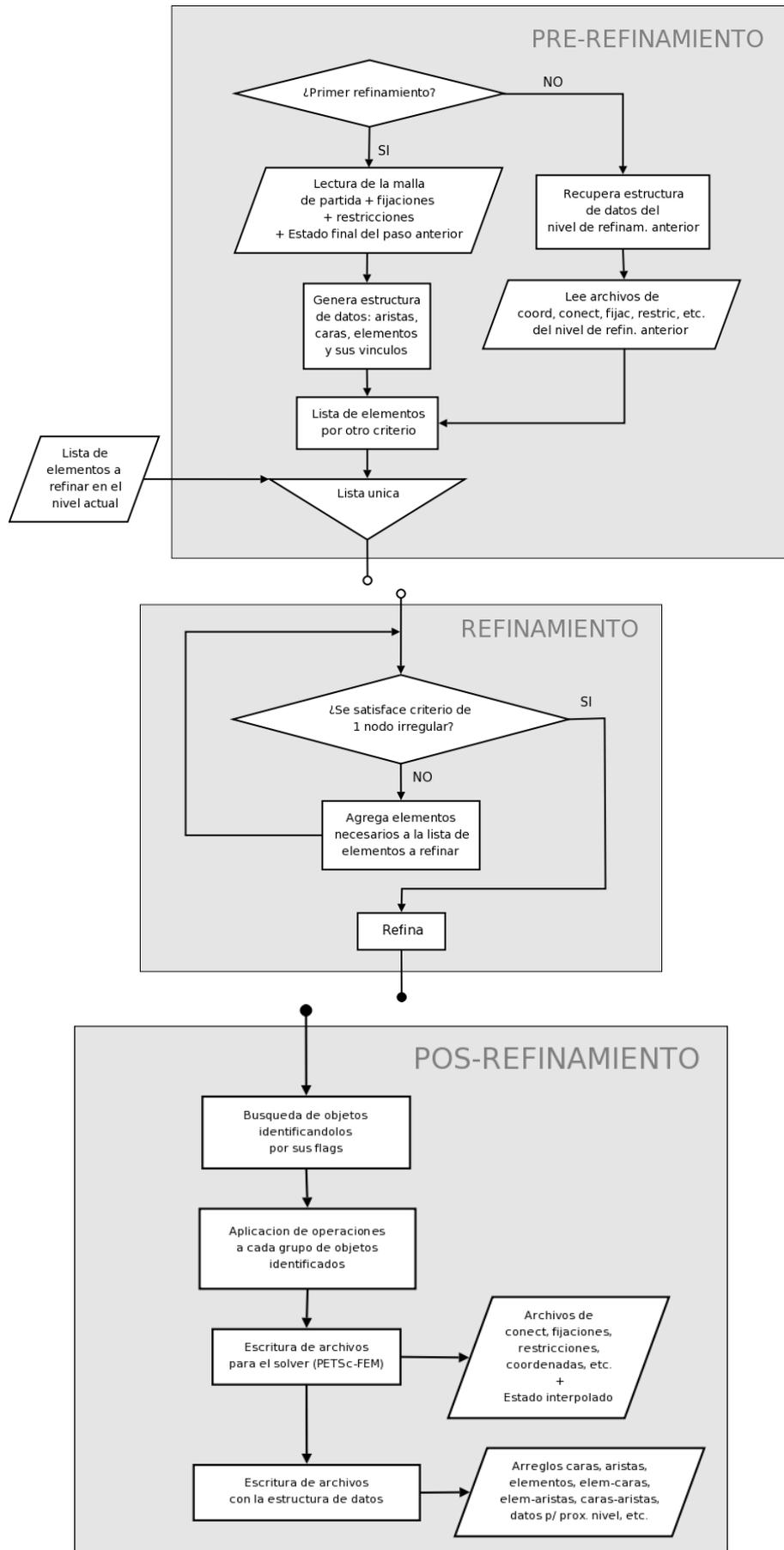


Figura 7: Etapas del refinamiento

problema pequeño y bien conocido, sirve en el sentido de que permite analizar y verificar el correcto funcionamiento de la estrategia, además de explorar el comportamiento de las soluciones que se obtienen con la misma.

El problema se resuelve utilizando mallas de 200 y 400 elementos, distribuidos uniformemente en la dirección principal del flujo, y dos procedimientos adaptativos. Los procedimientos adaptativos utilizan ambos como malla de partida a la malla de 200 elementos. En uno de ellos se aplica un sólo nivel de refinamiento y en el otro dos. La forma en que se seleccionan los elementos a refinar consiste en estimar el gradiente por elemento de la densidad del fluido. El motivo por el cual se escoge al gradiente de densidad es para poder capturar con el refinamiento tanto a las ondas de presión como a la discontinuidad de contacto que se sabe que se generarán. También se ha estipulado que se seleccionen para refinar sólo los 80 (en el caso de un nivel de refinamiento) elementos con el valor más grande de dicho gradiente. En el caso en que se aplican 2 niveles de refinamiento, se seleccionan los 100 elementos con el gradiente más grande, siempre haciendo referencia a elementos sobre las mallas con dos niveles de refinamiento.

El tiempo final en el cual se comparan las soluciones es $t_{final} = 0,01s$. El paso de tiempo se modifica de manera que el número de Courant se mantiene constante, igual que aquél definido por el usuario al inicio de la corrida, en este caso $Courant = 10$. El resto de los parámetros se mantuvieron iguales entre todas las corridas, de manera que las soluciones sean comparables.

La figura 8 permite comparar las soluciones en la discontinuidad de contacto y en la onda de choque, mientras que las figuras 9 permiten observar las mallas adaptativas de 1 y 2 niveles de refinamiento, en la misma zona y para el instante final. Dado que el problema se resolvió como bidimensional, el refinamiento de los elementos implica que se agregan elementos en la dirección transversal al flujo, por lo que en este problema en particular (1-D) se están agregando elementos que no contribuyen a mejorar la solución. Esto es así por la forma en la que se mencionó que se realiza la partición de los elementos cuadriláteros. Si bien esto constituye una desventaja en cuanto a la eficiencia de la aplicación de la estrategia adaptativa, dado el carácter conceptual de la etapa actual de desarrollo, no es lo que más interesa por ahora.

Al observar las cuatro soluciones, se concluye que aquella obtenida con la malla adaptativa utilizando 1 nivel de refinamiento es de una calidad intermedia a las soluciones obtenidas con las mallas uniformes de 200 y de 400 elementos, mientras que la solución obtenida con el procedimiento adaptativo pero empleando 2 niveles de refinamientos es la de mayor precisión. Además, se observa que la definición del choque se beneficia del refinamiento adaptativo en mayor medida que la discontinuidad de contacto. Esto puede deberse a que durante la corrida la discontinuidad de contacto debe “competir” con la onda de expansión en el sentido de cual de ellas es la que se refina en mayor medida, por lo que en los instantes iniciales la discontinuidad de contacto no es refinada. A su vez esto, sucede porque se ha limitado la cantidad de elementos que se seleccionan para refinar. Por lo tanto, la calidad de la solución final depende en alguna medida de la historia del refinamiento. Observar que al estar más definido el choque, la intensidad del mismo aumenta. Un comportamiento similar se observa en la discontinuidad de contacto aunque en menor medida por lo ya expresado. Es importante destacar que la solución mejora mucho al introducir dos niveles de refinamiento en vez de uno solo.

Por otra parte, la figura 10 presenta el comportamiento de la cantidad de elementos con el tiempo para ambas corridas adaptativas. En ella se observa que la cantidad de elementos se mantiene prácticamente constante en toda la corrida para un nivel de refinamiento. Para dos niveles de refinamiento, la cantidad de elementos es más variable que en el caso de un nivel, pero también existe una tendencia a mantenerse constante e incluso a disminuir hacia el final de la corrida. Si bien la cantidad de elementos que se seleccionan en las mallas refinadas es siempre

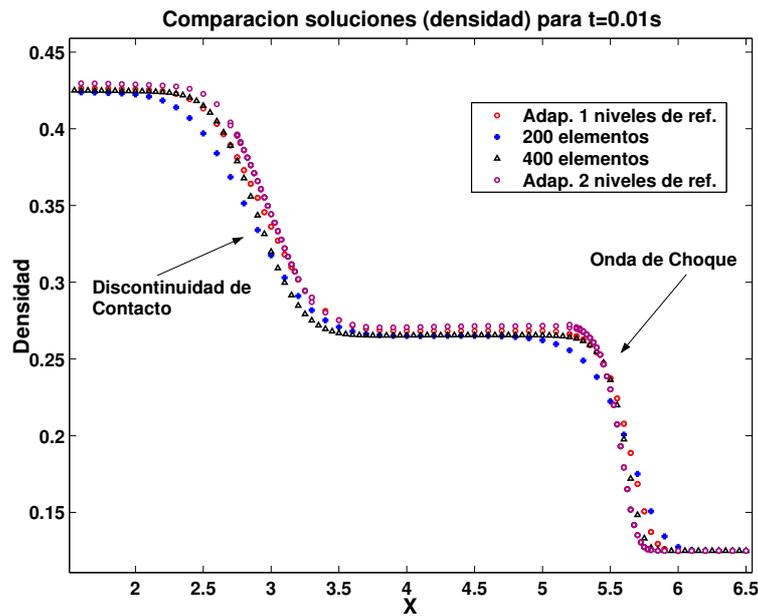


Figura 8: Soluciones obtenidas para el instante de tiempo $t=0.01s$

la misma (fijada por el usuario), se observa que hay una variación en la cantidad de elementos que poseen las mallas con las que se realizan las corridas. Este comportamiento se atribuye a las siguientes causas: en primer lugar, las listas de los elementos a refinar son confeccionadas en función de la búsqueda de los padres de los elementos seleccionados para refinar (no siempre se selecciona la misma cantidad de hijos de cada elemento padre), en segundo lugar estas listas son modificadas por la actualización en la numeración de los elementos a refinar y finalmente el refinador agrega elementos para satisfacer el criterio de a lo sumo 1 nodo irregular entre elementos vecinos. Por todo esto es que la cantidad de elementos que finalmente se refinan no es constante en ninguno de los dos casos adaptativos.

Luego de haber resuelto el problema con los procedimientos adaptativos, se concluye que la elección de la frecuencia de actualización de las mallas fue conservativa en ambos casos. Al observar el proceso de actualización de las mallas en el tiempo, se concluye que se las podría haber actualizado con una frecuencia menor (cada más pasos de tiempo) sin deteriorar la calidad de la solución final, ya que la mayoría de los elementos seleccionados para refinar cada vez que se actualizaba la malla eran elementos que ya pertenecían al máximo nivel de refinamiento. Es decir que las zonas de refinamiento fueron lo suficientemente extensas como para que las discontinuidades que se deseaban capturar permanecieran adentro de las zonas refinadas por más pasos de tiempo que los $nstep$ estipulados para cada corrida. El aprovechamiento ideal de la estrategia implica que la malla debe actualizarse justo en el instante en el que las estructuras que se desean capturar con el refinamiento están a punto de abandonar las zonas refinadas, es decir, una vez que la malla sobre la que se hace la corrida no es la mejor opción en cuanto a la distribución de sus elementos. Una forma rudimentaria de atenuar este problema consiste en estimar el número de pasos de tiempo durante los cuales las estructuras de interés permanecerán en el interior de las zonas refinadas. Por el momento, y al no existir una comunicación desde el solver hacia el programa que gestiona la estrategia, no se tiene la posibilidad de detener la corrida justo en el momento indicado para actualizar la malla. A futuro, una estrategia mejor debe incluir la posibilidad de controlar la calidad de la solución durante la misma corrida e interrumpirla cuando la solución sea de una calidad menor que la determinada por el usuario.

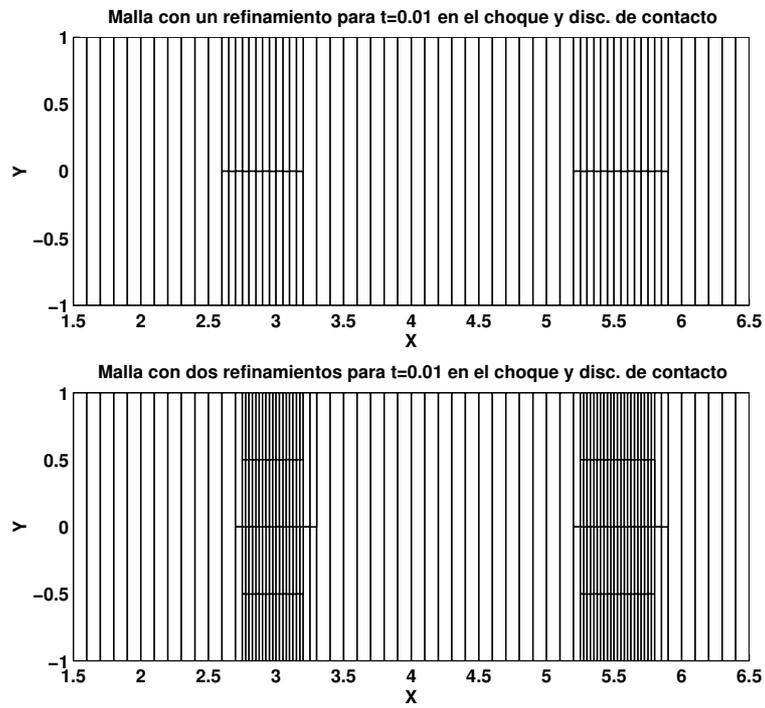


Figura 9: Mallas para 1 y 2 niveles de refinamiento en la zona de la disc. de contacto y choque para $t = t_{final}$.

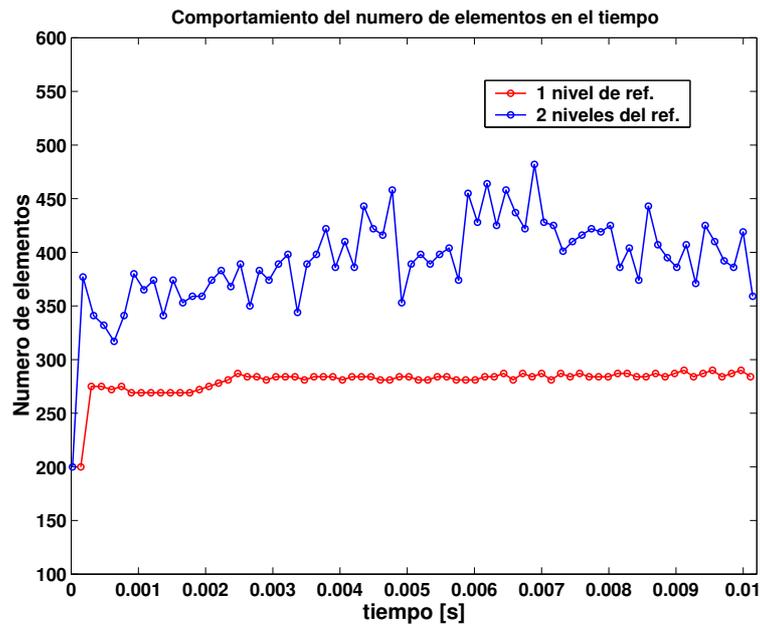


Figura 10: Comportamiento del número de elementos en la corrida para Courant=10

5. CONCLUSIONES

Se ha presentado una estrategia que permite extender el proceso de refinamiento adaptativo a problemas no estacionarios. La forma en que se realiza esta extensión ha sido pensada con el objeto de permitir la mayor flexibilidad posible en cuanto a la integración de los módulos que realizan cada una de las operaciones involucradas en todo el procedimiento. Por ello es que la etapa de refinamiento propiamente dicha se considera sólo como un módulo más del conjunto. Esto permite aplicar la estrategia desarrollada a otro tipo de problemas no estacionarios con sólo introducir el uso del módulo de refinamiento personalizado por el usuario para el problema en particular que quiere resolver.

El uso de la estrategia adaptativa permite mejorar la calidad de la solución introduciendo elementos en aquellas partes del dominio en las que realmente es necesario, deteriorando en la menor medida posible, y solamente en algunos casos para mallas de tetraedros, la calidad de la malla utilizada como malla de partida. La estrategia permite trabajar con más de un nivel de refinamiento y con distintos criterios de selección de los elementos a refinar. La posibilidad de limitar la cantidad máxima de elementos que se seleccionan para refinar así como el número máximo de niveles de refinamiento, permite acotar en cierta medida el tamaño del problema a resolver. Sin embargo, limitar la cantidad de elementos seleccionados para refinar puede generar una competencia entre las distintas estructuras que se desean refinar si el número límite de elementos es insuficiente.

Se ha logrado una integración con el módulo que resuelve las ecuaciones del problema (PETSc-FEM), aunque es necesario que el nivel de integración sea mayor para aumentar la eficiencia con la que se realiza la adaptatividad. De esta manera, se cree que es posible reducir el costo adicional que implica el uso de la adaptatividad.

6. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo a recibido ayuda financiera del *Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas* (CONICET, Argentina, PIP 5271/05), *Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica* (ANPCyT, Argentina, PICT LAMBDA 12-14573/2003, PME 209/2003) y *Universidad Nacional del Litoral* (UNL, Argentina, subvención CAI+D 2005-10-64). Se ha hecho uso de software libre tales como *GNU/Linux OS*, *PETSc*, *Octave* y *OpenDX*.

REFERENCIAS

- Ch. Hirsh. *Numerical Computation of internal and external Flows Volume*, volume 2 of *Computational Methods for Inviscid and Viscous Flows*. John Wiley and Sons, Chichester, 1990.
- G.A. Ríos Rodríguez, E.J. López, N.M Nigro, y M. Storti. Refinamiento adaptativo homogéneo de mallas aplicable a problemas bi- y tridimensionales, 2005.
- Mario Storti, Norberto Nigro, y Rodrigo Paz. *PETSc-FEM, A General Purpose, Parallel, Multi-Physics FEM Program*. CIMEC-CONICET-UNL, 1999-2006.