

## IDENTIFICAÇÃO DAS PROPRIEDADES DINÂMICAS EM ESTRUTURAS RETICULADAS POR MEIO DE ANÁLISE NUMÉRICA E EXPERIMENTAL

### DYNAMIC PROPERTIES IDENTIFICATION IN RETICULATED STRUCTURES BY NUMERICAL AND EXPERIMENTAL ANALYSIS

**Maria D. D. Silva, Hennan H. Falcão, Andrea Brasiliano e Hidelbrando J. F. Diógenes**

*Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Centro de Tecnologia, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, Cidade Universitária, 58051-085, Paraíba, Brasil, maria\_dicia@hotmail.com*

**Palavras-chave:** Análise dinâmica, parâmetros modais, método da detecção de picos, identificação estocástica de subespaços.

**Resumo.** Para garantir a estabilidade estrutural e o conforto dos usuários, a identificação das propriedades dinâmicas é fundamental, pois elas influenciam no dimensionamento das estruturas e no seu funcionamento ao longo dos anos. Os parâmetros modais, que são as frequências naturais, os modos de vibração e a taxa de amortecimento, podem ser estimados através da análise numérica de modelos computacionais, ou experimentalmente, aplicando métodos de identificação. Neste sentido, buscou-se avaliar o desempenho de métodos baseados apenas nas respostas da estrutura por meio de uma análise numérica e experimental. Os modelos físico e numérico considerados correspondem a uma viga de aço com condições de contorno livre-livre, sendo os métodos adotados para a identificação dos parâmetros modais o Método da Detecção de Picos, no domínio da frequência, e o Método de Identificação Estocástica Baseado na Covariância das Respostas de Referência (SSI-COV/ref), no domínio do tempo. Devido às imprecisões inerentes ao processo de aquisição de dados, os resultados foram comparados e o desempenho dos métodos foi verificado. Como conclusão, observou-se que as análises numérica e experimental foram coerentes, e que a qualidade dos resultados depende da escolha adequada dos métodos aplicados.

**Keywords:** Operational Modal Analysis, modal parameters, Peak Picking Method, Stochastic Subspace Identification.

**Abstract.** The identification of modal parameters is very important to guarantee the structural stability because of their influences on structures dimensions and on structures operation over the years. These dynamic properties, such as frequencies, mode shapes and damping ratios can be found using computational programs or identification methods for experimental models. Therefore, the present study considered a steel beam with zero degrees of freedom and used both computational and experimental model analyzes. The output-only methods applied were the Peak Picking Method, in frequency domain, and the Reference-Based Covariance-Driven Stochastic Realization (SSI-COV/ref), in time domain. Due to inaccuracies on data acquisition process, the results were compared and the methods performances verified. In conclusion, the computational model and experimental model analyzes were consistent and the identification methods performances depends on structure studied.

## 1 INTRODUÇÃO

Com o desenvolvimento computacional, avanço tecnológico e de modelos numéricos, é possível identificar os parâmetros dinâmicos de uma estrutura, que influenciam no seu dimensionamento e comportamento ao longo dos anos. Tais parâmetros são as frequências naturais, os modos de vibração e as taxas de amortecimento. A área da análise dinâmica destinada à obtenção dessas características é chamada de análise modal.

Para a identificação das propriedades dinâmicas, são aplicados métodos que se diferenciam quanto aos dados de aquisição, em que pode ser necessária a medição da ação (entrada/input) e da resposta dinâmica (saída/output), ou apenas da resposta. Eles também podem ser desenvolvidos em dois domínios, o do tempo e o da frequência, cuja adoção depende do contexto em que a estrutura está inserida. Alguns exemplos são o Método da Detecção de Picos (Peak Picking Method) (Felber, 1993) e a Identificação Estocástica de Subespaços (Stochastic Subspace Identification) (Peeters e De Roeck, 1999).

Assim, este trabalho busca identificar os parâmetros modais de uma estrutura, a partir de modelos numérico e experimental, considerando apenas a resposta dinâmica. Neste intuito, serão realizados ensaios para a obtenção de resultados e a posterior comparação dos métodos de identificação adotados permitirá analisar suas aplicações e eficiência.

## 2 METODOLOGIA

### 2.1 Análise numérica

Analicamente, quanto ao comportamento dinâmico de uma viga, Blevins (2001) apresenta a Eq. (1) para determinação das frequências naturais correspondentes aos modos de vibração, em Hertz.

$$f_i = \frac{\lambda_i^2}{2\pi L^2} \left(\frac{EI}{m}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (1)$$

onde:

$\lambda_i$ : parâmetro adimensional em função das condições de contorno da viga;

L: comprimento da viga;

m: massa por unidade de comprimento;

E: módulo de elasticidade longitudinal do material;

I: momento de inércia da viga;

i: modo de vibração.

Os resultados encontrados analiticamente servem como referência para a identificação das propriedades dinâmicas a partir do modelo numérico. O programa utilizado para a análise numérica foi proposto por Brasiliano (2001) e apresenta como resultados as frequências naturais e os correspondentes modos de vibração da estrutura.

### 2.2 Método da detecção de picos

O Método Básico no Domínio da Frequência ou Método da Detecção de Picos (Peak Picking Method – PPM) é a técnica clássica e mais simples para estimar os parâmetros modais de uma estrutura sujeita à excitação ambiente, porém tem melhor resultado em estruturas que tenham frequências naturais bem separadas e condições de baixo amortecimento (Peeters e De Roeck, 2001). A técnica foi sistematizada por Felber (1993) e tem grande aplicação na engenharia civil, devido à sua simplicidade e rápido processamento.

Brasiliano (2005) explica que a técnica “[...] consiste em transformar a resposta no tempo para o domínio da frequência aplicando-se a transformada discreta de Fourier e com isso obtendo-se o espectro da resposta”. Esse espectro encontrado é a função densidade espectral de potência da resposta (f.d.e.p. ou Power Spectral Density – PSD), cujos picos dos autoespectros estimam as frequências naturais da estrutura.

A direção identificada para as formas modais será aquela em que foram dispostos os sensores utilizados nos testes. A magnitude da amplitude modal, por sua vez, está associada à magnitude do pico correspondente no autoespectro, e será dada pela relação entre a magnitude do pico relativa ao sensor móvel e aquela relativa ao sensor fixo. Assim, na Eq. (2) a amplitude modal para cada modo  $i$  de cada ponto  $j$  é dada por:

$$A_{ij} = \sqrt{\frac{PSD_{ij}}{PSD_{iref}}} \quad (2)$$

onde  $PSD_{ij}$  representa o pico do espectro correspondente ao modo  $i$  no ponto  $j$  e  $PSD_{iref}$  representa o pico do espectro correspondente ao modo  $i$  no ponto de referência.

Quanto ao sentido de cada valor da amplitude modal, este é calculado pelo espectro cruzado entre cada resposta e a resposta de referência. Segundo Palazzo (2001), o sentido positivo ou negativo é dado pela fase do espectro cruzado de acordo com o seguinte intervalo: se  $-70^\circ < \varphi < 70^\circ$  a amplitude será positiva, e se  $-250^\circ < \varphi < -110^\circ$  ou  $110^\circ < \varphi < 250^\circ$  a amplitude será negativa.

Para obter as taxas de amortecimento, é utilizada a equação da meia potência (Eq. 3) na qual são adotadas uma frequência anterior  $f_1$  e uma posterior  $f_2$ , com o valor da ordenada sendo  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  do valor da ordenada do pico de ressonância (Clough e Penzien, 1993).

$$\xi = \frac{f_2 - f_1}{f_2 + f_1} \quad (3)$$

### 2.3 Método da identificação estocástica baseado na covariância das respostas de referência

O método de identificação estocástica baseado na covariância das respostas de referência (Reference-Based Covariance-Driven Stochastic Realization – SSI-COV/ref) é uma reformulação do método clássico de Identificação Estocástica de Subespaços pela Covariância (Covariance-Driven Stochastic Subspace Identification - SSI-COV), ambos propostos por Peeters e De Roeck (1999). A versão modificada necessita apenas das covariâncias entre as saídas e um conjunto limitado de saídas de referência ao invés da covariância entre todas as saídas.

A partir das respostas dinâmicas obtidas experimentalmente, a Eq. (4) calcula as matrizes de covariância entre todas as saídas e as saídas de referência.

$$R_i^{ref} \equiv E \left[ y_{k+i} y_k^{refT} \right] \in R^{l \times r} \quad (4)$$

onde  $l$  é o número de sinais de resposta da estrutura e  $r$  o número de sensores de referência.

Estimadas as matrizes de covariância  $R_i^{ref}$ , estas podem ser agrupadas em uma matriz Toeplitz, calculada a partir da matriz Hankel. Cada diagonal da matriz Toeplitz consiste na repetição do mesmo elemento (Eq. 5).

$$T_{1|i}^{ref} = \begin{bmatrix} R_i^{ref} & R_{i-1}^{ref} & \cdots & R_1^{ref} \\ R_{i+1}^{ref} & R_i^{ref} & \cdots & R_2^{ref} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{2i-1}^{ref} & R_{2i-2}^{ref} & \cdots & R_i^{ref} \end{bmatrix} \in R^{li \times ri} \quad (5)$$

Então, é aplicada a decomposição em valores singulares (SVD) (Eq. 6) obtendo uma estimativa da ordem do sistema  $n$  (rank).

$$T_{1|i}^{ref} = USV^T = [U_1 \quad U_2] \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1^T \\ V_2^T \end{bmatrix} = U_1 S_1 V_1^T \quad (6)$$

onde  $U \in R^{li \times li}$  e  $V \in R^{ri \times ri}$  são matrizes ortonormais e  $S \in R^{li \times ri}$  é uma matriz diagonal contendo os valores singulares em ordem decrescente. A ordem de uma matriz é estimada como sendo o número de valores singulares diferentes de zero. A decomposição de valores singulares é, então, dividida em duas partes, obtendo as matrizes de observabilidade e controlabilidade (Eq. 7), que resolvem o problema de identificação.

$$\begin{aligned} O_i &= U_1 S_1^{\frac{1}{2}} \\ C_i^{ref} &= S_1^{1/2} V_1^T \end{aligned} \quad (7)$$

A partir destas, é possível encontrar a matriz de estado  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{G}^{ref}$  (next-state output covariance matrix) e a matriz de observação  $\mathbf{C}$ , sendo  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{C}$  suficientes para o cálculo dos parâmetros modais. Rahman (2012) e Schanke (2015) explicam que os autovalores discretos de  $\mathbf{A}$  são convertidos para o tempo contínuo, conforme a Eq. (8). Considerando os autovalores contínuos, as frequências naturais correspondem à parte imaginária destes, enquanto a taxa de amortecimento será dada pela razão entre a parte real e o valor absoluto (Eq. 9 e Eq. 10). Os modos de vibração serão determinados pelo produto entre os autovetores de  $\mathbf{A}$  e a matriz  $\mathbf{C}$ .

$$\lambda = \frac{\ln(\mu)}{\Delta t} \quad (8)$$

$$f = \frac{\text{Im}(\lambda)}{2\pi} \quad (9)$$

$$\xi = -\frac{\text{Re}(\lambda)}{|\lambda|} \quad (10)$$

onde:

$\lambda$ : autovalores de  $\mathbf{A}$  contínuos no tempo;

$\mu$ : autovalores de  $\mathbf{A}$  discretos no tempo;

$\Delta t$ : intervalo de tempo;

$f$ : frequência natural, em Hertz;

$\xi$ : taxa de amortecimento.

### 3 PROGRAMA EXPERIMENTAL

O objeto de estudo deste trabalho foi uma viga de aço SAE 1020, com condições de apoio livre-livre. A estrutura apresenta perfil U e sua seção é constante ao longo de toda a barra. As propriedades físicas e geométricas da estrutura estão apresentadas na Tabela 1.

Propriedades	Unidade de medida	Valores
Área da seção transversal – A	m <sup>2</sup>	$2,33 \times 10^{-4}$
Momento de inércia da viga deitada – I	m <sup>4</sup>	$1,38207 \times 10^{-8}$
Massa por unidade de comprimento	kg/m	1,66
Massa específica real – $\rho$	kg/m <sup>3</sup>	7124,46
Módulo de elasticidade longitudinal – E	N/m <sup>2</sup>	$2,05 \times 10^{11}$
Comprimento da viga – L	m	1,48
Coefficiente de Poisson – $\nu$	-	0,29

Fonte: Adaptado de [Correia de Brito \(2017\)](#).

Tabela 1: Propriedades físicas e geométricas da viga

A viga estudada neste trabalho possui 1,48 metros de comprimento e foi discretizada em 30 elementos, cada um com 0,0493 m, como representa a [Figura 1](#). O modelo numérico em questão contém 31 nós e é formado por um único trecho.

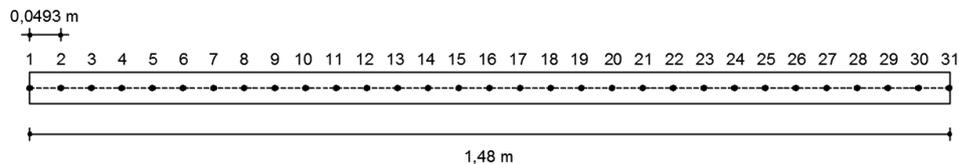


Figura 1: Discretização do modelo numérico da viga

Para a realização do ensaio de vibração, a viga foi marcada em 31 pontos, conforme a discretização, e foi pendurada a um suporte utilizando fios de náilon para simular as condições de contorno livre-livre, como mostra a [Figura 2](#). A excitação foi causada por batidas de um pequeno martelo, aplicadas em um mesmo ponto durante todo o ensaio. Não foi necessário medir a excitação de entrada da estrutura porque os métodos de identificação a serem utilizados neste trabalho dependem apenas da resposta dinâmica, ou seja, dos dados de saída (output only).



Figura 2: Viga pendurada ao suporte para simular as condições de contorno livre-livre

Para a aquisição da resposta dinâmica, foram utilizados dois acelerômetros piezoelétricos, cujas massas foram desprezadas no modelo numérico. Estes foram posicionados de forma a medir as acelerações na direção vertical, e assim identificar os modos de vibração vertical da

viga. Como a amplitude dos sinais de resposta varia em cada ensaio, devido às diferentes excitações, é necessário adotar um ponto fixo para servir como referência na aplicação dos métodos de identificação. Assim, o acelerômetro ligado ao canal 1 permaneceu no nó 4, enquanto o acelerômetro do canal 2 variou de posição, percorrendo os outros 30 nós da estrutura. O ensaio foi realizado para vários pontos para que as coordenadas dos nós em cada modo de vibração fossem obtidas. A Figura 3 mostra o ponto de referência e o ponto de impacto de todos os ensaios e é possível ver os acelerômetros dispostos na viga em um dos testes na Figura 4.

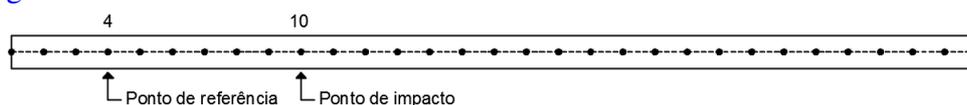


Figura 3: Vista da viga mostrando os pontos de referência e de impacto dos ensaios

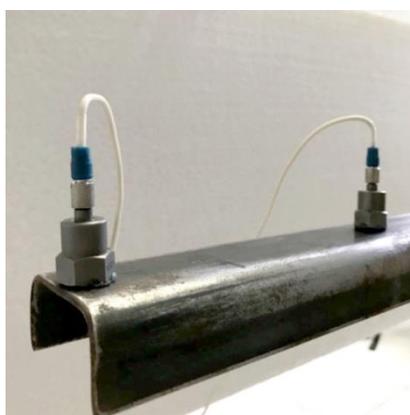


Figura 4: Acelerômetro móvel no nó 1 e acelerômetro fixo no nó 4

## 4 RESULTADOS

### 4.1 Método da Detecção de Picos

A obtenção dos resultados a partir do Método da Detecção de Picos foi feita utilizando um programa computacional, que calcula a função densidade espectral de potência através do periodograma de Welch (Welch, 1967). A Figura 5 abaixo, apresenta o autoespectro encontrado no nó 4 da viga, posição em que estava o acelerômetro de referência. De acordo com o método, os picos do autoespectro da função densidade espectral de potência indicam as frequências naturais da estrutura.

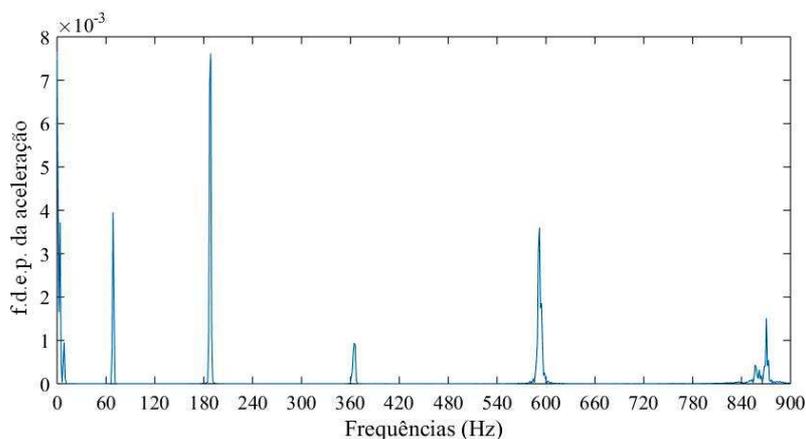


Figura 5: Autoespectro obtido pelo Método Detecção de Picos para o nó 4 da viga

Devido às condições de contorno livre-livre da viga, esta apresenta vibrações como corpo rígido, cuja frequência é zero. Tal comportamento não é significativo para o estudo das propriedades dinâmicas deste trabalho.

Através do Método da Detecção de Picos, os três primeiros modos de vibração foram bem definidos. O mesmo não ocorreu para o 4º e o 5º modo, que apresentaram uma maior dispersão de resultados devido à incerteza em seus picos. Tal questão não interferiu na identificação das frequências naturais, porém influenciou na determinação das formas modais correspondentes (Figura 6).

De acordo com o proposto por Clough e Penzien (1993), a taxa de amortecimento da viga foi determinada em 0,8%. Para magnitudes que sejam  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  da magnitude do pico da primeira frequência, encontraram-se as frequências de 68,23 Hz e 69,33 Hz e estas foram relacionadas como mostra a Eq. (11).

$$\xi = \frac{69,33 - 68,23}{69,33 + 68,23} = 0,00796 \cong 0,8\% \quad (11)$$

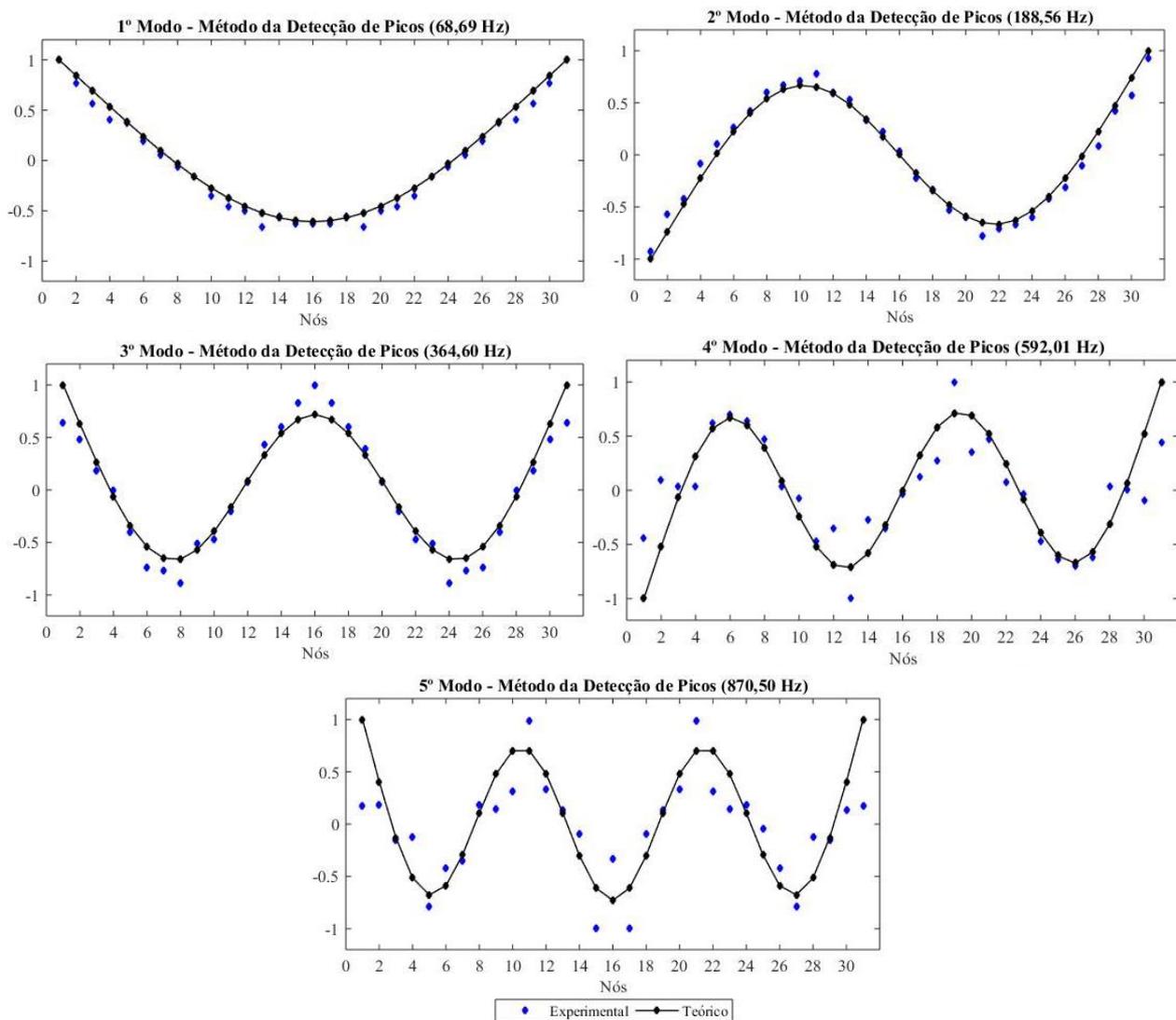


Figura 6: Modos de vibração da viga pelo Método da Detecção de Picos

## 4.2 Método de Identificação Estocástica Baseado na Covariância das Respostas de Referência

O método SSI-COV/ref foi aplicado em 30 etapas, em que cada uma correspondia ao ensaio realizado em um nó e contava com as respostas dinâmicas do nó de referência e do nó que se desejava medir. Os registros adquiridos em cada ensaio permitiam identificar partes dos modos de vibração. Ou seja, na etapa 1, foram obtidas as coordenadas dos modos no ponto 1 e no ponto de referência no nó 4. Na etapa 2, além do registro de referência, foram determinadas as coordenadas dos modos no ponto 2, e assim sucessivamente.

Dentre os resultados, foi observado que para o 1º modo de vibração, poucos nós da viga tiveram seus deslocamentos identificados pelo método. Possíveis razões podem ser a quantidade pequena de sensores utilizados, ou ainda as condições de ensaio. Nos demais modos, suas coordenadas foram bem definidas na maioria dos pontos.

A Figura 7 a seguir apresenta os cinco primeiros modos de vibração da viga obtidos pelo método. Assim como foi feito para o Método da Detecção de Picos, os resultados precisaram ser ajustados considerando a simetria da viga. Quanto à taxa de amortecimento, encontrou-se um valor de 0,3%, de acordo com o proposto por Rahman (2012) e Schanke (2015).

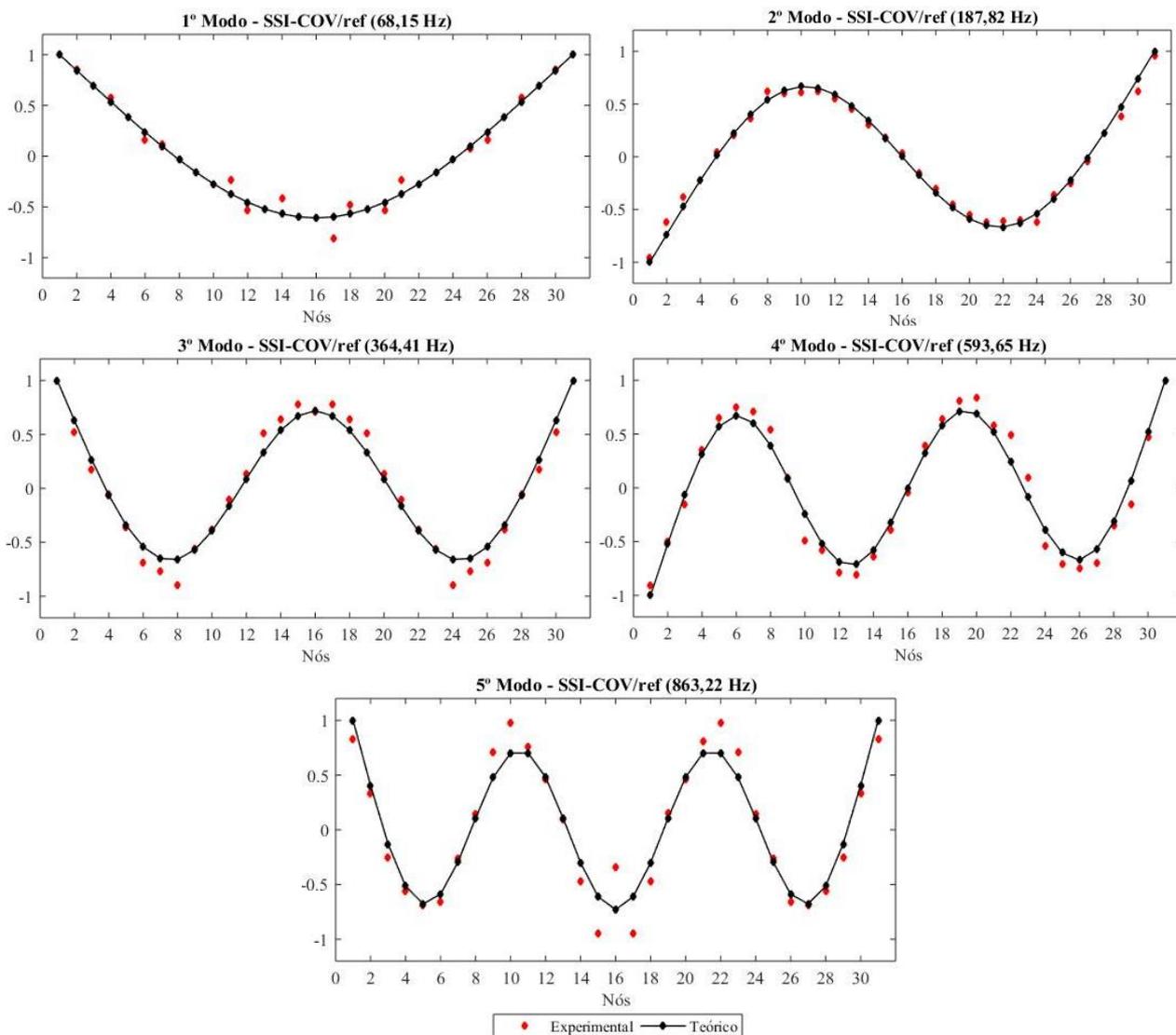


Figura 7: Modos de vibração da viga identificados pelo método SSI-COV/ref

A **Tabela 2** reúne as frequências naturais, considerando a análise numérica e experimental para os cinco primeiros modos de vibração. Na análise experimental, os dois métodos empregados encontraram frequências que podem ser consideradas coerentes com o que foi previsto no modelo numérico.

Modos de Vibração	Frequências Naturais (Hz)			
	Analítico (Blevins, 2001)	Modelo numérico	PPM	SSI-COV/ref
1° Modo	67,16	67,02	68,69	68,15
2° Modo	185,13	184,31	188,56	187,82
3° Modo	362,93	360,49	364,60	364,41
4° Modo	599,94	594,53	592,01	593,65
5° Modo	896,21	886,06	870,50	863,22

Tabela 2: Frequências naturais da viga obtidas numericamente e experimentalmente

Para a identificação das formas modais, os resultados obtidos pelo método SSI-COV/ref foram considerados mais satisfatórios, visto que foi possível identificar os cinco primeiros modos de vibração da viga de maneira mais clara.

A taxa de amortecimento, por sua vez, foi determinada em 0,8% pelo Método da Detecção de Picos e em 0,3% pelo SSI-COV/ref. Autores como [Peeters \(2000\)](#) e [Rahman \(2012\)](#) também apontam em seus estudos valores distintos para as taxas de amortecimento obtidas em cada método. Segundo [Peeters \(2000\)](#), a equação da meia potência utilizada no Método da Detecção de Picos não obtém resultados confiáveis, pois as considerações feitas na aplicação do método podem provocar alterações no valor da taxa.

## 5 CONCLUSÕES

Neste trabalho foi possível identificar os parâmetros modais de uma viga de aço livre-livre através de estudos numéricos e experimentais. A análise numérica mostrou resultados satisfatórios e o modelo numérico foi validado, servindo assim como ferramenta auxiliar na identificação experimental das propriedades. Tanto o Método da Detecção de Picos, como o SSI-COV/ref apresentaram resultados coerentes, sendo que este identificou com maior precisão os deslocamentos de todos os nós nos cinco primeiros modos de vibração, com exceção do 1° modo.

Na aplicação dos métodos, observou-se que o Método da Detecção de Picos é mais simples e permite que as características dinâmicas sejam identificadas de forma mais rápida, o que justifica ser um dos mais utilizados na engenharia civil. Contudo, em cada modo de vibração, é preciso encontrar os picos e suas magnitudes de todos os pontos quase que manualmente. O SSI-COV/ref, por sua vez, não tem a mesma simplicidade e como só estavam disponíveis dois acelerômetros para os ensaios, o processo de aplicação do método teve que se repetir em 30 etapas.

Dessa forma, para a escolha do método de identificação mais adequado deve-se levar em consideração o tipo de estrutura, o tempo de processamento e de análise manual das respostas e a precisão requerida, entre outros aspectos que possam estar inseridos no contexto. As condições de ensaio, como a quantidade de sensores utilizados, escolha do ponto de referência e de impacto e simulação das condições de contorno, também podem influenciar nos resultados.

## REFERÊNCIAS

- Blevins, R. D. *Formulas for Natural Frequency and Mode Shape*. Reprint Edition. Malabar Florida: Krieger Publishing Company, 2001.
- Brasiliano, A. *Caracterização de Danos em Estruturas Aperticadas*. 2001. 108 f. Dissertação (Mestrado em Estruturas e Construção Civil)–Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, Brasília, 2001.
- Brasiliano, A. *Identificação de Sistemas e Atualização de Modelos Numéricos com Vistas à Avaliação da Integridade Estrutural*. 2005. 222 f. Tese (Doutorado em Estruturas e Construção Civil)–Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, Brasília, 2005.
- Clough, R. W., Penzien, J. *Dynamics of Structures*. 2. ed. New York: McGraw-Hill, 1993.
- Correia de Brito, M. B. *Identificação das Frequências de Vibração de Modelos Estruturais Reticulados por Meio de Análise Experimental, Numérica e Analítica*. 2017. 52 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Civil)–Centro de Tecnologia, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2017.
- Felber, A. J. *Development of a Hybrid Bridge Evaluation System*. 1993. 227 p. PhD Thesis–Department of Civil Engineering, The University of British Columbia, Vancouver, Canada, 1993
- Palazzo, G. L. *Identificación del Daño Estructural a través del Cambio en las Propiedades Dinámicas*. 2001. Tesis de Magíster em Ingeniería Estructural–Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología, Universidad Nacional de Tucumán, 2001.
- Peeters, B. *System Identification and Damage Detection in Civil Engineering*. 2000. 238 p. PhD Thesis–Faculteit Toegepaste Wetenschappen, Katholieke Universiteit Leuven, Leuven, Belgium, 2000.
- Peeters, B., De Roeck, G. Reference-based Stochastic Subspace Identification for Output-only Modal Analysis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 1999.
- Peeters, B.; De Roeck, G. Stochastic System Identification for Operational Modal Analysis: A Review. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, v. 123, p. 659-667, 2001.
- Rahman, M. S. *Comparison of System Identification Techniques with Field Vibration Data for Structural Health Monitoring of Bridges*. 2012. 158 p. Master Thesis–Faculty of Graduate Studies and Postdoctoral, Carleton University, Ottawa, Canada, 2012.
- Schanke, A. S. *Operational Modal Analysis of Large Bridges*. 2015. 151 p. Masteroppgave–Fakultet for Ingeniørvitenskap og Teknologi, Norges Teknisk-Naturvitenskapelige Universitet, Trondheim, Norway, 2015.
- Welch, P. D. The Use of Fast Fourier Transform for the Estimation of Power Spectra: A Method Based of Time Averaging Over Short, Modified Periodograms. *IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics*, v. 15, n. 2, 1967.