Asociación Argentina
de Mecánica Computacional

Mecánica Computacional Vol XXXVI, págs. 1099-1108 (artículo completo)
José G. Etse, Bibiana M. Luccioni, Martín A. Pucheta, Mario A. Storti (Eds.)
San Miguel de Tucumán, 6-9 Noviembre 2018

INTERPOLACIÓN POR SPLINES CUADRÁTICOS: OBTENCIÓN DE UNA FÓRMULA EXPLÍCITA

QUADRATIC SPLINES INTERPOLATION: OBTAINING AN EXPLICIT FORMULA

Alberto J. Ferrari[a,b], **Luis P. Lara**[b] **y Eduardo A. Santillan Marcus**[b]

[a]*CONICET, Avda. Pellegrini 250, 2000 Rosario, Argentina, aferrari@fceia.unr.edu.ar*

[b]*Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (Universidad Nacional de Rosario), Avda. Pellegrini 250, 2000 Rosario, Argentina https://web.fceia.unr.edu.ar*

Palabras clave: Splines, spline cuadrático, análisis numérico, ecuaciones integrales.

Resumen. Existen numerosos métodos para la determinación de splines cuadráticos, los cuales requieren de la resolución de sistemas algebraicos o la evaluación de ecuaciones recursivas. A través del cálculo variacional, en este trabajo se determina un spline cuadrático S que minimiza las fluctuaciones del polinomio interpolante, y cuyos coeficientes se obtienen en forma explícita a través de simples expresiones algebraicas. También se demuestra que S conserva la paridad de la función interpolada. Se determina el error local resultando de orden del cuadrado del tamaño del paso. Además, se presenta el spline de forma matricial construido a partir de matrices universales. En general, la norma 2 de Lebesgue de una función continua respecto a su polinomio de interpolación no converge a cero, sin embargo mediante el control de las fluctuaciones esta desventaja es suprimida. Por último se implementan los resultados para resolver de manera aproximada ecuaciones integrales lineales de Fredholm de primera y segunda especie, homogénea y no homogénea; reduciéndose el problema a un sistema algebraico lineal.

Keywords: splines, quadratic spline, numerical analysis, integral equations.

Abstract. There are several methods for determining quadratic splines, which require the resolution of algebraic systems or the evaluation of recursive equations. Through variational calculus, in this work a quadratic spline S that minimizes the oscillations of the interpolating polynomial is developed, and whose coefficients are determined explicitly through simple algebraic expressions. Also it is proved that S maintains the parity of the interpolated function. The local error is determined resulting in order of the square of the step size. Also, the spline is presented in a matricial form, built from universal matrices. In general, the Lebesgue 2-norm of a continuous function with respect to its interpolation polynomial does not converge to zero, however by the control of oscillations this disadvantage is suppressed. By last the results are implemented to solve linear integral equations of Fredholm of first and second species, homogeneous and non-homogeneous; reducing the problem to a linear algebraic system.

1. INTRODUCCIÓN

En Matemática, Física e Ingeniería, entre otras disciplinas, se presenta con gran frecuencia la necesidad de ajustar un conjunto discreto de datos o aproximar funciones. En general se desea conocer los valores en puntos intermedios, lo que puede ser resuelto a través de polinomios de interpolación. En la práctica, polinomios de orden alto pueden introducir errores significativos debido a diversos factores. Estos polinomios en general presentan fluctuaciones que no están presentes en la función a interpolar. Por esta razón, se trabajará con la interpolación segmentaria, la cual es particularmente útil cuando los datos a ajustar poseen un comportamiento suave alternado con fuertes cambios. Se hará foco en la interpolación segmentaria cuadrática S de funciones reales continuas. En Kincaid y Cheney (1991), Henrici (1964), Press et al. (1986) se presentan métodos y algoritmos que dependen de un determinado criterio en la determinación de uno de los coeficientes de S. En general estos métodos requieren de la resolución de sistemas algebraicos o ecuaciones recursivas. En nuestro caso se presenta una alternativa variacional que minimiza las fluctuaciones del polinomio interpolador S. Sus coeficientes se determinan en forma explícita a través de funciones elementales. Este trabajo está organizado del siguiente modo: en la sección 2 se presenta al interpolador; en la sección 3 se desmuestra que S conserva la paridad de la función a interpolar; en la sección 4 se estudia el error local; en la sección 5 se reescriben los resultados en forma matricial; en la sección 6 se aplican los resultados para la ecuación integral lineal de Fredholm; en la sección 7 se muestran los resultados numéricos; y finalmente en la sección 8 se presentan las conclusiones.

2. EL SPLINE CUADRÁTICO

Consideremos un intervalo $[a, b]$ en el cual seleccionamos $n + 1$ nodos equidistantes $x_0 = a < x_1 < ... < x_n = b$, donde $x_k - x_{k-1} = h$, $k = 1, ..., n$. Sea una función continua $y : [a, b] \to \mathbb{C}$, y consideremos $y_k = y(x_k)$, $k = 0, ..., n$. Sea $I_k := [x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, ..., n$. Deseamos determinar el interpolador segmentario cuadrático $S(x)$ tal que interpole a $y(x)$ en x_k, $k = 0, ..., n$ y que $S'(x)$ sea continuo en los nodos x_k, $k = 1, ..., n - 1$.

Sea $S(x)$ la función segmentaria cuadrática en $[x_0, x_n]$ definida a través de los polinomios $P_k(x)$ de manera que:

$$S\,(x) = P_k(x),\ x\,\epsilon\, I_k,\ k = 1, ..., n. \tag{1}$$

Por ser S interpolante, $P_k(x)$ debe verificar:

$$\begin{gathered} P_k(x_{k-1}) = y_{k-1},\ k = 1, ..., n \\ P_k(x_k) = y_k,\ k = 1, ..., n. \end{gathered} \tag{2}$$

La continuidad de $S'(x)$ impone que:

$$P_k^{'}(x_k) = P_{k+1}^{'}(x_k),\ k = 1, ..., n - 1. \tag{3}$$

Construimos el polinomio de Lagrange $p_k(x)$ sobre I_k como:

$$p_k(x) = \frac{x - x_{k-1}}{h}\, y_k - \frac{x - x_k}{h}\, y_{k-1}\,, \tag{4}$$

que satisface $p_k(x_{k-1}) = y_{k-1}$, $p_k(x_k) = y_k$, $k = 1, ..., n$. Entonces:

$$P_k(x)\ =\ p_k(x)\ + a_k\,(x - x_{k-1})\,(x - x_k)\,,\ k = 1, ..., n\,. \tag{5}$$

En Foucher y Sablonnière (2009), Rana (1989) se obtienen los coeficientes a_k mediante sistemas algebraicos lineales. Aquí se hallará una fórmula explícita. De Ec. (3) y a través de simples operaciones algebraicas se obtiene:

$$a_{k+1} = \Delta_k - a_k\,,\ k = 1, ..., n-1, \tag{6}$$

$$\Delta_k = \frac{y_{k-1} - 2y_k + y_{k+1}}{h^2}\,, \tag{7}$$

de donde $a_k = a_k(a_1)$, lineal en a_1. Es interesante destacar que $y''(x_k) = \Delta_k + O(h)$, con lo que resulta $a_{k+1} = y_k^{''} - a_k + O(h)\,,\ k = 1, ..., n$. El coeficiente a_1 se determina a partir una condición adicional.

De Ec. (6):

$$a_k = (-1)^{\,k+1}\, a_1 + r_k\,,\ k \geq 2\,, \tag{8}$$

$$r_k = (-1)^{\,k+1} \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{\,j}\, \Delta_j\,,\ k \geq 2\,, \tag{9}$$

Así:

$$a_k = (-1)^{\,k+1}(a_1 + \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{\,j}\, \Delta_j)\,,\ k \geq 1\,. \tag{10}$$

De esta forma se dispone de una expresión explicita, en términos de funciones elementales, para calcular los coeficientes del polinomio S. Además es simple demostrar que:

$$\begin{aligned} r_{k+1} &= \Delta_k - r_k\,,\ k = 1, ..., n-1, \\ r_1 &= 0. \end{aligned} \tag{11}$$

A continuación se determina a_1 de modo que la suma de los errores cuadráticos entre $P_k(x)$ y $p_k(x)$ en cada I_k sea mínima. Sea E definido como $E = \sum_{k=1}^{n} E_k$, donde:

$$E_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} [\,P_k(x) - p_k(x)\,]^2\, dx\,. \tag{12}$$

Teniendo en cuenta las definiciones de P_k, p_k y Ecs. (4, 5), se tiene:

$$E = E(a_1) = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \int_{x_{k-1}}^{x_k} (\,x - x_k\,)^2 (\,x - x_{k-1}\,)^2\, dx\,, \tag{13}$$

de donde:

$$E(a_1) = \frac{h^5}{30} \sum_{k=1}^{n} a_k^2. \tag{14}$$

Así, teniendo en cuenta que $\frac{\partial^2 E(a_1)}{\partial\, a_1^2} = \frac{1}{15} n h^5 > 0$, la solución a_1 que minimiza E es tal que $\frac{\partial E(a_1)}{\partial\, a_1} = 0$, y considerando Ec. (8), resulta $\frac{\partial}{\partial\, a_1} a_k = (-1)^{\,k+1}$. Esto y Ec. (14) conducen a:

$$a_1 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (-1)^k\, r_k, \tag{15}$$

De Ec. (9) surge:

$$a_1 = -\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)\,(-1)^{\,j}\,\Delta_j\,, \tag{16}$$

De Ec. (8) se tiene:

$$a_k = r_k + \frac{1}{n}\sum_{j=2}^{n}(-1)^{\,k+j}\;\; r_j\;,\;\; k \geq 2, \tag{17}$$

Finalmente combinando Ecs. (10) y (16):

$$a_k = (-1)^{\,k+1}\sum_{j=1}^{n-1}(\frac{j}{n}\;+s_j-1)\,(-1)^{\,j}\,\Delta_j\;,\;k\geq 1\;, \tag{18}$$

donde $s_j = 1$ si $j \leq k-1$, $s_j = 0$ para $j > k-1$.

Teniendo en cuenta la definición de Δ_j tenemos que:

$$a_k = \sum_{j=0}^{n} c_{k\,j}\; y_j\;, \tag{19}$$

donde $c_{k,j}$ está dado por:

$$c_{k,j} = \begin{cases} \frac{(-1)^k}{h^2}\beta_1 & \text{si } j=0 \\ \frac{(-1)^{k+1}}{h^2}(2\beta_1+\beta_2) & \text{si } j=1 \\ \frac{(-1)^{k+j}}{h^2}(\beta_{j-1}+2\beta_j+\beta_{j+1}) & \text{si } 1<j<n-1 \\ \frac{(-1)^{k+n-1}}{h^2}(2\beta_{n-2}+\beta_{n-1}) & \text{si } j=n-1 \\ \frac{(-1)^{k+n}}{h^2}\beta_{n-1} & \text{si } j=n \end{cases} \tag{20}$$

donde:

$$\beta_j = \begin{cases} \frac{j}{n} & \text{si } j\leq k-1 \\ \frac{j}{n}-1 & \text{si } j>k-1 \end{cases} \tag{21}$$

3. FORMA MATRICIAL DEL SPLINE

La Ec. (19) puede ser reescrita en forma matricial como:

$$A = C\cdot Y\;,$$

siendo las matrices $Y_{n+1,1}{=}\{y_j\}_{j=0,n}$ y $C_{n,n+1} = \{c_{k\,j}\}_{k=1,n}^{j=0,n}$. Observemos que ésta última sólo depende de x_0, h y n, siendo entonces una matriz universal. Mediante las Ecs. (4) y (5) definimos las matrices $p_{n,1}(x){=}\{p_k(x)\}_{k=1,n}$, $P_{n,1}(x){=}\{P_k(x)\}_{k=1,n}$. Entonces el spline S puede ser escrito en forma matricial como:

$$P(x) = p(x) + X(x)\;\cdot A\;, \tag{22}$$

donde $X(x) = X^0(x)\cdot X^1(x)$, siendo $X^0_{n,n}(x)$ matriz matriz diagonal cuyos elementos son $x-x_k$, $k=0,...,n-1$; $X^1_{n,n}(x)$ también es diagonal, sus elementos son $x-x_k$, $k=1,...,n$. A través de de las matrices $Y^0_{n,1}{=}\{y_j\}_{j=0,n-1}$ y $Y^n_{n,1} = \{y_j\}_{j=1,n}$, la Ec. (22) se reescribe como:

$$P(x) = \frac{1}{h}\,(X^0(x)\cdot Y^n - X^1(x)\cdot Y^0) + X^0(x)\cdot X^1(x)\;\cdot C\cdot Y\;, \tag{23}$$

La importancia de la Ec. (23) radica en que establecidos x_0, h y n, la matriz C se computa una única vez, con lo cual para cada colección de datos Y el único cómputo nuevo es el producto escalar $C \cdot Y$.

4. CONSERVACIÓN DE LA PARIDAD DEL POLINOMIO INTERPOLADOR

Teorema: Los coeficientes a_k del spline S que interpola a $y = y(x)$, $-a < x < a$, en $n+1$ nodos, verifican:

1) Si y es par, entonces $a_k = a_{n-k+1}$, $k = 1, 2, ..., n$.

2) Si y es impar, entonces $a_k = -a_{n-k+1}$, $k = 1, 2, ..., n$.

Demostración:

Haremos la demostración para y par.

Puesto que y es par, resulta $y_j = y_{n-j}$, $j = 1, ..., n-1$ con lo que es inmediato que $\Delta_j = \Delta_{n-j}$, $j = 1, ..., n-1$.

Caso 1: n impar.

Probaremos por inducción sobre k que $a_k = a_{n-k+1}$, $k = 1, ..., \frac{n-1}{2}$.

1) Veamos que $a_1 = a_n$

$$a_n = (-1)^{n+1}(a_1 + \sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j\Delta_j) = a_1 + \sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^j\Delta_j + \sum_{j=\frac{n+1}{2}}^{n-1}(-1)^j\Delta_j =$$

$$= a_1 + \sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^j\Delta_j + \sum_{j=\frac{n+1}{2}}^{n-1}(-1)^j\Delta_{n-j} = a_1 + \sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^j\Delta_j + \sum_{j=1}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^{n-j}\Delta_j = a_1$$

2) Supongamos que $a_k = a_{n-k+1}$, para algún $k = 1, ..., \frac{n-3}{2}$.

Veamos que $a_{k+1} = a_{n-k}$. En efecto:

$a_{k+1} = \Delta_k - a_k = \Delta_{n-k} - a_{n-k+1} = a_{n-k}$.

Por lo tanto $a_k = a_{n-k+1}$, $k = 1, ..., \frac{n-1}{2}$ si n impar.

Caso 2: n par.

Probaremos por inducción sobre k que $a_k = a_{n-k+1}$, $k = 1, ..., \frac{n}{2}$.

1) $a_1 = a_n$

$$a_n = (-1)^{n+1}(a_1 + \sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j\Delta_j) = -a_1 - \sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j\Delta_j$$

Luego bastará probar que $a_1 = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j\Delta_j$.

$$a_1 = -\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)(-1)^j\Delta_j = -\frac{1}{2}\{\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j\Delta_j + \sum_{j=1}^{n-1}[\frac{2(n-j)}{n} - 1](-1)^j\Delta_j\} =$$

$$= -\frac{1}{2}\{\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j\Delta_j + \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1}(1 - \frac{2j}{n})(-1)^j\Delta_j + \sum_{j=\frac{n}{2}+1}^{n-1}(1 - \frac{2j}{n})(-1)^j\Delta_{n-j}\} =$$

$$= -\frac{1}{2}\{\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j\Delta_j + \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1}(1-\frac{2j}{n})(-1)^{j}\Delta_j + \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1}(-1+\frac{2j}{n})(-1)^{n-j}\Delta_j\} = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^j\Delta_j.$$

2) Supongamos que $a_k = a_{n-k+1}$, para algún $k = 1, ..., \frac{n}{2} - 1$.
Veamos que $a_{k+1} = a_{n-k}$. En fecto:
$a_{k+1} = \Delta_k - a_k = \Delta_{n-k} - a_{n-k+1} = a_{n-k}$.
Por lo tanto $a_k = a_{n-k+1}$, $k = 1, ..., \frac{n}{2}$ si n par.
La prueba para y impar y n par es análoga al caso 1 y la prueba para y impar y n impar es análoga al caso 2. □

Observación: En dos de los casos (y par, n impar e y impar, n par) la propiedad es verificada independientemente de la elección tomada para a_1, en tanto que en los otros dos casos (y par, n par e y impar, n impar) es fundamental la elección de a_1. Se puede verificar que para estos úlitmos casos, la propiedad no se verifica en general para cualquier a_1.

Corolario: El polinomio interpolador $P_k(x)$ del spline S que interpola a $y = y(x)$, $-a < x < a$, con $n + 1$ nodos, verifica:
1) Si y es par, entonces $P_k(x) = P_{n-k+1}(-x)$, $k = 1, 2, ..., n$.
2) Si y es impar, entonces $P_k(x) = -P_{n-k+1}(-x)$, $k = 1, 2, ..., n$.

Demostración:
Nuevamente haremos la demostración para el caso y par.
Recordemos que $P_k(x) = p_k(x) + a_k (x - x_{k-1}) (x - x_k)$, $k = 1, ..., n$
Es fácil verificar que $p_k(x) = p_{n-k+1}(-x)$, $k = 1, 2, ..., n$.
Luego, teniendo en cuenta que $a_k = a_{n-k+1}$, $k = 1, 2, ..., n$ y que $x_k = -x_{n-k}$, $k = 0, ..., n$, se obtiene lo deseado.
La demostración para el caso y impar es análoga. □

5. ESTUDIO DEL ERROR LOCAL

Teniendo en cuenta la Ec. (5) y definiendo $\delta_k = x - x_k$ resulta:

$$P_k(x) = p_k(x) + a_k\delta_k\delta_{k-1}. \quad (24)$$

Por Lagrange sabemos que:

$$y(x) = p_k(x) + \frac{1}{2}y''(\xi_k)\delta_k\delta_{k-1},\ x_{k-1} \le \xi_k \le x_k. \quad (25)$$

Teniendo en cuenta la Ec. (24) resulta:

$$|P_k - y| = |\delta_k\delta_{k-1}||a_k - \frac{1}{2}y''(\xi_k)|, \quad (26)$$

Si se supone derivada segunda de y acotada, entonces $\frac{1}{2}|y''(\xi_k)| < M\ \forall k = 1, \ldots, n$ y por lo tanto:

$$|P_k - y| < h^2|a_k| + h^2 M. \quad (27)$$

Por otro lado, se ha determinado a_1 de manera tal que $D(a_1)$ sea mínimo, siendo:

$$D(a_1) = \sum_{k=1}^{n}(P_k(x) - p_k(x))^2, \quad (28)$$

lo cual tiene solución.

Por lo tanto, $(P_k(x) - p_k(x))^2$ está acotado para todo k y por consiguiente lo está $|P_k(x) - p_k(x)|$. Resulta entonces:

$$|P_k(x) - p_k(x)| = |a_k||\delta_k \delta_{k-1}| < h^2|a_k| < h^2 N_n, \tag{29}$$

siendo N_n finito.

De Ec. (26) resulta:

$$|P_k - y| < (N_n + M)h^2, \tag{30}$$

obteniendo de esta manera una cota local de $o(h^2)$.

6. ECUACIÓN INTEGRAL DE FREDHOLM

Existen numerosos trabajos para determinar la solución numérica de las ecuaciones integrales lineales de Fredholm de primera y segunda especie Maleknejad y Aghazadeh (2005), Maleknejad y Derili (2006), Maleknejad y Yousefi (2006),Wang et al. (2014), Panda et al. (2015). A continuación se aplican los resultados de las secciones anteriores para resolver numéricamente el problema lineal. Consideremos la siguiente ecuación:

$$y(x) - \lambda \int_a^b K(x,s) y(s) ds = f(x) \,, \tag{31}$$

donde $y(x)$ es a determinar. Cuando $f(x) \equiv 0$, la ecuación se convierte en homogénea y λ se transforma en autovalor. Consideremos además que x, $s \in \mathbb{R}$, que f es continua en $I = [a, b]$, y que el núcleo $K(x, s)$ es continuo en la región $\Omega = [a, b] \times [a, b]$ con $a, b < \infty$. Efectuamos una partición en I, mediante los nodos $x_j = a + jh$, $h = (b - a)/n$, $j = 0, 1, 2, ..., n$. Mediante el spline cuadrático S desarrollado en la sección 2, se interpola a $y(x)$ en $\{y_j\}_{j=0}^n$, cuyos valores deben ser determinados. Evaluando la Ec.(31) en los nodos x_j se obtiene:

$$y_j - \lambda \int_a^b K(x_j, s)\ S(s) ds = f_j,\ j = 0,1, ..., n, \tag{32}$$

donde $f_j = f(x_j)$. Considerando la Ec. (1):

$$\int_a^b K(x_j, s)\ S(s)\ ds = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} K(x_j, s)\ P_k(s)\ ds\,, \tag{33}$$

Por ser a_k lineal en y_j, $j = 0, \ldots, n$, esto nos conduce a un sistema lineal. Teniendo en cuenta Ecs. (5) y (19) surge:

$$y_j - \lambda \sum_{k=1}^{n} \{ \sum_{i=0}^{n} \delta_{i\,k}\, m_{j,\,k-1}\ - \delta_{i\,k-1}\ m_{j,\,k}\ + d_{ki})\ y_i\}\ = f_j,\ j = 0,1, ..., n, \tag{34}$$

donde δ_{ik} es la delta de Kronecker, $c_{k,i}$ es el de Ec. (19), $m_{j,\,k} = \frac{1}{h} \int_{x_{k-1}}^{x_k} K(x_j, s)\ (s - s_k) ds$ y $d_{k\,i} = c_{k\,i} \int_{x_{k-1}}^{x_k} K(x_j, s)\ (s - s_{k-1})(s - s_k)\, ds$.

De aquí:

$$\sum_{i=0}^{n} (\delta_{ji} - \lambda\alpha_{j\,i}\,)\; y_i \;=\; f_j,\;\; j = 0, 1, ..., n, \tag{35}$$

$$\text{donde } \alpha_{j\,i} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{i\,k}\, m_{j,\,k-1} \;-\delta_{i\,k-1}\; m_{j,\,k}\; + d_{ki}\;, \tag{36}$$

En el caso no homogéneo, las Ecs.(35) son un sistema algebraico lineal cuya solución determina $\{y_j\}_{j=0}^{n}$ y por consiguiente a $S(x)$.

Observación: cuando $f(x) \equiv 0$ en $[a, b]$, el sistema es homogéneo y se resuelve de manera usual el problema de autovalores y autofunciones.

7. EJEMPLOS

7.1. Interpolación cuadrática segmentaria

Consideramos $f(x) = |x|\,,\, -1 \leq x \leq 1$, la cual interpolada mediante el polinomio de Lagrange $L_n(x)$ con nodos equidistantes, resulta como es bien sabido $\text{lím}_{n\to\infty} \|L_n(x) - f(x)\|_2 \neq 0$, ($\|\|$, norma 2 de Lebesgue). Sea:

$$e_n = \int_{x_0}^{x_n} (\,S_n(x) - f(x)\,)^2\, dx\,, \tag{37}$$

Se determina que para $n > 15$ la interpolación de Lagrange presenta fuertes fluctuaciones. En la Tabla 1 se computa el error.

n	10	15	20
e_n	$8{,}2 \cdot 10^{-2}$	$2{,}8 \cdot 10^{-2}$	$7{,}2 \cdot 10^{+2}$

Tabla 1: Errores para $f(x) = |x|$ con interpolación de Lagrange

En cambio usando nuestra propuesta las no deseadas fluctuaciones se reducen notablemente, como se observa en la Tabla 2.

n	10	20	50	100
e_n	$2{,}6 \cdot 10^{-3}$	$6{,}6 \cdot 10^{-4}$	$1.0\; 10^{-4}$	$2{,}6 \cdot 10^{-5}$

Tabla 2: Errores para $f(x) = |x|$ con el spline S

Como segundo ejemplo, consideramos $f(x) = \sin 2\pi x$, $-1 \leq x \leq 1$, efectuamos la interpolación mediante la rutina de Quadratic Spline End Condition del trabajo de Behforooz (1988), mediante el spline cúbico del software Mathematica 9.0.1.0 y mediante el spline S, obteniendo lo que se muestra en la Tabla 3.

n	10	50	100
Quad Spline End Condition	$2{,}0 \cdot 10^{-3}$	$9{,}8 \cdot 10^{-7}$	$1{,}9 \cdot 10^{-8}$
e Spline order 3	$1{,}0\ 10^{-3}$	$8{,}2\ 10^{-11}$	$1{,}8\ 10^{-13}$
e_n	$4{,}0 \cdot 10^{-4}$	$9{,}0 \cdot 10^{-9}$	$1{,}0 \cdot 10^{-10}$

Tabla 3: Errores para $f(x) = \sin 2\pi x$

Encontramos que el spline presentado en este trabajo es superior al spline de orden 2.

7.2. Ecuación de Fredholm

Consideramos dos ejemplos extraídos de Krasnov et al. (1982). El primero de ellos es (pág. 69, ej. 138):

$$y(x) + 2 \int_0^1 e^{x-t}\, y(t)\, dt = 2\, x e^{x}\,, \tag{38}$$

cuya solución es $y(x) = e^x\,(2x - \frac{2}{3})$. La solución obtenida mediante el uso del spline cuadrático arroja los resultados que se muestran en la Tabla 4.

n	5	10
e_n	$6{,}410^{-3}$	$5{,}110^{-4}$
E_T	$1{,}610^{-3}$	$1{,}910^{-5}$

Tabla 4: Errores para el primer ejemplo de Krasnov

donde el error e_n está definido en la Ec. (37) y $E_T = \text{máx}\,|y(x) - y_n(x)|$ en $x_0 \leq x \leq x_n$.
El segundo ejemplo corresponde a una ecuación de primera especie, (pág 98, ej. 203):

$$y(x) - \lambda \int_0^1 (\,2\,x\,t - 4\,x^2)\; y(t)\, dt = 0\,, \tag{39}$$

cuya solución es $y(x) = x(1 - 2x)$, siendo el autovalor $\lambda = -3$, de multiplicidad 2. Se obtiene lo expuesto en la Tabla 5.

n	5	9	11
λ	$-3{,}21785$	$-3{,}065060$	$-3{,}04336$
e_n	$2{,}5 \cdot 10^{-2}$	$7{,}0 \cdot 10^{-3}$	$4{,}6 \cdot 10^{-3}$
E_T	$6{,}0 \cdot 10^{-2}$	$1{,}6 \cdot 10^{-2}$	$8{,}6 \cdot 10^{-3}$

Tabla 5: Errores para el segundo ejemplo de Krasnov

Por último consideramos del trabajo de Wang et al. (2014):

$$\begin{aligned} y(x) &= f(x) + \int_0^1 (\;x +\; s)\; y(s)\, ds\,, \\ f(x) &= 1 + \cos(x) - (1 + x)\sin 1 - \cos 1, \end{aligned} \tag{40}$$

cuya solución es $y(x) = \cos x$. En el método por mínimos cuadrados de Wang et al. (2014), se aproxima y mediante $\{1, x, x^2\}$ obteniendo $e_n = 1{,}49 \cdot 10^{-3}$. Con nuestro método, se obtiene para $n = 5$ y $n = 10$, $e_5 = 1{,}17 \cdot 10^{-3}$ y $e_{10} = 1{,}79 \cdot 10^{-5}$ respectivamente.

8. CONCLUSIONES

A través del cálculo de variaciones se ha desarrollado un método de interpolación segmentaria cuadrática que minimiza las fluctuaciones del spline teniendo como gran característica que los coeficientes del spline se determinan en forma explícita a través de simples cálculos algebraicos sin la necesidad de recurrir a métodos recursivos o resolver sistemas algebraicos. La aproximación se comporta con un error local de $o(h^2)$ y cuando la función a interpolar posee una paridad definida ésta se conserva. Dada la simplicidad del método es factible usarlo de una manera simple para resolver ecuaciones integrales. En una segunda etapa extenderemos los resultados para la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias fraccionarias.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido parcialmente subsidiado por Universidad Nacional de Rosario a través del proyecto ING495 "Estudio de diversos problemas con ecuaciones diferenciales fraccionarias". El primer autor también es financiado por CONICET a través de una beca interna doctoral.

REFERENCIAS

Behforooz G. Quadratic spline. *Applied Mathematics Letters*, 1:177–180, 1988.

Foucher F. y Sablonnière P. Quadratic spline quasi-interpolants and collocation methods. *Mathematics and Computers in Simulation*, 79:3455–3465, 2009.

Henrici P. *Elements of Numerical Analysis*. John Wiley & Sons Inc., 1964.

Kincaid D. y Cheney W. *Numerical Analysis: Mathematics of Scientific Computing*. Brooks Cole Publishing Company, California, 1991.

Krasnov M., Kiseliov A., y Makarenko G. *Ecuaciones integrales*, volumen 3. Editorial Mir, 1982.

Maleknejad K. y Aghazadeh N. Numerical solution of volterra integral equations of the second kind with convolution kernel by using taylor-series expansion method. *Applied Mathematics and Computation*, 161:915–922, 2005.

Maleknejad K. y Derili H. Numerical solution of integral equations by using combination of spline-collocation method and lagrange interpolation. *Applied Mathematics and Computation*, 175:1235–1244, 2006.

Maleknejad K. y Yousefi M. Numerical solution of the integral equation of the second kind by using wavelet bases of hermite cubic splines. *Applied Mathematics and Computation*, 183:134–141, 2006.

Panda S., Martha S., y Chakrabarti A. A modified approach to numerical solution of fredholm integral equations of the second kind. *Applied Mathematics and Computation*, 271:102–112, 2015.

Press W., Teukolsky S., W. V., y Flannery B. *Numerical Recipes*. Cambridge University Press, New York, 1986.

Rana S. Quadratic spline interpolation. *Journal of Approximation Theory*, 57:300–305, 1989.

Wang Q., Wang K., y Chen S. Least squares approximation method for the solution of volterra-fredholm integral equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 272:141–147, 2014.