

## IMPLEMENTACIÓN DEL MODELO DE TURBULENCIA DE SPALART-ALLMARAS EN UN ESQUEMA EXPLÍCITO DE TAYLOR-GALERKIN PARA FLUJOS COMPRESIBLES

### IMPLEMENTATION OF THE TURBULENCE MODEL OF SPALART-ALLMARAS IN AN EXPLICIT TAYLOR-GALERKIN SCHEME FOR COMPRESSIBLE FLOWS

Horacio P. Burbridge<sup>a</sup>, Ana E. Scarabino<sup>b</sup> and Armando M. Awruch<sup>c</sup>

<sup>a</sup>*Centro de Estudios Informáticos CEDI, Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Haedo, París 532 Haedo (1706) Buenos Aires – Argentina. [hpbridge@yahoo.com.ar](mailto:hpbridge@yahoo.com.ar), [http://www.frhutn.org/cms/index.php?seccion\\_generica\\_id=756](http://www.frhutn.org/cms/index.php?seccion_generica_id=756)*

<sup>b</sup>*Grupo Fluidodinámica Computacional – GFC, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Plata, Argentina, [scarabino@ing.unlp.edu.ar](mailto:scarabino@ing.unlp.edu.ar) <http://www.gfc.ing.unlp.edu.ar/>*

<sup>c</sup>*PPGEC/UFRGS, Av. Osvaldo Aranha, 99, 3o Andar, 90035-190, Porto Alegre, RS, BRASIL, [amawruch@ufrgs.br](mailto:amawruch@ufrgs.br), <http://www.ufrgs.br/engcivil/ppgec/>*

**Palabras clave:** Flujo Compresible Turbulento, Spalart-Allmaras, MEF, Taylor-Galerkin.

**Resumen.** Trabajos previos de diferentes autores han demostrado que, en el contexto del método de elementos finitos (MEF), el esquema de Taylor-Galerkin (T-G) resulta particularmente adecuado para la solución de flujos compresibles en régimen supersónico o transónico que involucran ondas de choque. En particular los autores de este artículo han aplicado este esquema utilizando elementos finitos hexaédricos con evaluación analítica de las matrices de elemento, en conjunto con una técnica de captura de choque para la solución de flujos aerodinámicos compresibles, viscosos y no viscosos. Sin embargo, no son abundantes las referencias de la utilización de este método para simular flujos compresibles turbulentos utilizando el método de elementos finitos. El objetivo de este trabajo es mostrar la implementación del modelo de turbulencia de Spalart-Allmaras (S-A) en el algoritmo de Taylor-Galerkin y explorar el desempeño del mismo.

**Keywords:** Turbulent Compressible Flow, Spalart-Allmaras, FEM, Taylor-Galerkin.

**Abstract.** Previous works by different authors has shown that, in the context of finite element method (FEM), the Taylor-Galerkin (T-G) scheme is particularly suitable for the solution of compressible flows in supersonic or transonic regime involving shock waves. The authors of this article have applied this scheme using hexahedral finite elements with analytical evaluation of the element matrices, together with a shock capture technique for the solution of compressible, viscous and non-viscous aerodynamic flows. However, references to the use of this method to simulate turbulent compressible flows using the finite element method are not abundant. The objective of this paper is to show the implementation of the Spalart-Allmaras (S-A) turbulence model in the Taylor-Galerkin algorithm and to explore its performance.

## 1 INTRODUCCIÓN

Diferentes autores (por ejemplo, Donea, 1984) demostraron que, en el contexto del MEF, el esquema T-G resulta particularmente adecuado para la solución de flujos compresibles que involucran ondas de choque en régimen supersónico a altos números de Mach. En particular, Burbridge y Awruch (2000) aplican este esquema utilizando elementos finitos hexaédricos con evaluación analítica de las matrices elementales en conjunto con una técnica de captura de choque para la solución de flujos aerodinámicos laminares compresibles viscosos y no viscosos.

Sin embargo, en regímenes subsónicos compresibles para bajos números de Mach ( $M < 0.9$ ) o en flujos casi incompresibles, las metodologías basadas en densidad sufren deficiencias, tanto en términos de eficiencia como en precisión de la solución. Los resultados obtenidos utilizando el esquema explícito T-G de un paso para flujos subsónicos sobre perfiles alares con números de Mach entre 0.5 y 0.85 muestran convergencia lenta y resultados de presión y densidad oscilatorios (ver Burbridge, 1999). Para abordar este problema se desarrollaron varias técnicas de estabilización. En particular, el algoritmo CBS (Characteristic Based Split) fue desarrollado por algunos investigadores, tales como Zienkiewicz y Codina (1995), con la intención de obtener un único algoritmo que presentara adecuado comportamiento, tanto en regímenes subsónicos como supersónicos.

Durante las dos últimas décadas y media este algoritmo se estableció como una herramienta reconocidamente útil para el cómputo de un amplio espectro de flujos incompresibles o compresibles a diferentes números de Mach (ver Massarotti et. al., 2006; Boonmarlert et. al., 2004). En particular, en el trabajo presentado por Zienkiewicz et. al. (1995) se muestra la forma explícita del algoritmo y su desempeño para flujos subsónicos, transónicos y supersónicos.

Existen pocas referencias sobre la utilización del esquema T-G para simulación de flujos turbulentos. Es por ello que en el presente trabajo se implementó el modelo de turbulencia de Spalart-Allmaras (SA) con la intención de probar el funcionamiento de este esquema, en el contexto particular del Método de Elementos Finitos utilizando integración explícita de las matrices elementales.

Es importante mencionar que en este trabajo se adoptó la forma conservativa de la ecuación de transporte de S-A tal cual la propusieron los autores originales del modelo en el trabajo que presentaron en 2012 (ver Allmaras, et. al., 2012)

## 2 ECUACIONES DE GOBIERNO CON MODELO DE TURBULENCIA (SA).

En una descripción Euleriana, el sistema de ecuaciones en derivadas parciales que gobierna la dinámica de los fluidos conocidas como FANS (Favre Averaged Navier Stokes) e incluyendo el modelo de Spalart-Allmaras, puede escribirse, en su forma conservativa, como sigue:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathbf{G}_i}{\partial x_i} + \mathbf{R} = \mathbf{0} \quad (1)$$

Siendo:

$$\mathbf{U} = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ \rho v_3 \\ \rho e \\ \rho \tilde{v} \end{Bmatrix}; \mathbf{F}_i = \begin{Bmatrix} \rho v_1 \\ \rho v_1 v_i + p \delta_{i1} \\ \rho v_2 v_i + p \delta_{i2} \\ \rho v_3 v_i + p \delta_{i3} \\ v_i (\rho e + p) \\ \rho \tilde{v} v_i \end{Bmatrix}; \mathbf{G}_i = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\tau_{i1} \\ -\tau_{i2} \\ -\tau_{i3} \\ -\tau_{ij} v_j - q_i - \psi_i \\ \varphi_i \end{Bmatrix}; \mathbf{R} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ P + D + D_T \end{Bmatrix} \quad (2)$$

En las expresiones anteriores se tiene:

- ✓  $v_i$  son las componentes de velocidad.
- ✓  $\rho$  es la masa específica.
- ✓  $p$  es la presión termodinámica.
- ✓  $\tau_{ij}$  son las componentes viscosas del tensor de tensiones.
- ✓  $e$  es la energía total específica.
- ✓  $\tilde{v}$  es la variable de la ecuación de transporte del modelo de Spalart-Allmaras.
- ✓  $q_i$  son las componentes del vector flujo de calor por conducción.
- ✓  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker.
- ✓  $\varphi_i$  es el término difusivo de la ecuación de transporte de Spalart-Allmaras.
- ✓  $\psi_i$  es el término difusivo asociado a la energía cinética turbulenta ( $k$ ) en la ecuación de energía.
- ✓  $P$  es el término de producción y  $D$  el de destrucción de la ecuación de transporte de Spalart-Allmaras.
- ✓  $D_T$  contiene términos adicionales de la ecuación de transporte de Spalart-Allmaras.
- ✓  $x_i$  y  $t$  son las coordenadas espaciales y temporal, respectivamente.
- ✓  $i, j = 1, 2, 3$ .

Para un fluido Newtoniano las componentes de tensión vienen dadas por:

$$\tau_{ij} = (\mu + \mu_t) \left[ \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right] - \frac{2}{3} (\mu + \mu_t) \frac{\partial v_m}{\partial x_m} \delta_{ij} - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \quad (3)$$

donde  $\mu$  y  $\mu_t$  son la viscosidad y la viscosidad turbulenta respectivamente,  $k$  es la energía cinética turbulenta y el subíndice  $m$  corre de 1 a 3.

Las componentes del vector de flujo de calor por conducción son:

$$q_i = (K + K_t) \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad (4)$$

donde  $K$  y  $K_t$  son la conductividad térmica y la conductividad térmica turbulenta respectivamente y  $u$  es la energía interna específica.

Los términos  $\psi_i$  en la ecuación de energía vienen dados por la siguiente expresión:

$$\psi_i = \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_i} \quad (5)$$

donde  $\sigma_k$  es una constante que depende del modelo de turbulencia empleado que, en este caso, no se utiliza ya que el modelo de turbulencia de Spalart-Allmaras no contempla el cálculo de la energía cinética turbulenta por lo cual todos los términos que la contienen se desprecian, incluyendo  $\psi_i$  en (2) y el tercer término en (3).

Los términos  $\varphi_i$  en la ecuación de transporte de Spalart-Allmaras vienen dados por la siguiente expresión:

$$\varphi_i = \frac{1}{\sigma} (\mu + \rho \tilde{v}) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_i} \quad (6)$$

donde  $\sigma$  y  $cb_2$  son constantes del modelo de turbulencia de Spalart-Allmaras. La ecuación de transporte viene acompañada por los términos adicionales  $D_T$  que se expresan a continuación:

$$D_T = -\frac{1}{\sigma} \rho cb_2 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_i} + \frac{1}{\sigma} (\nu + \tilde{\nu}) \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_i} \quad (7)$$

Finalmente, los términos de producción y destrucción en la ecuación de transporte de Spalart-Allmaras se expresan de la siguiente forma:

$$P = -cb_1 S \rho \tilde{v}; \quad D = cw_1 f_w \rho \left(\frac{\tilde{v}}{d}\right)^2 \quad (8)$$

donde el primer término representa la producción y el segundo la destrucción,  $cb_1$ ,  $S$ ,  $cw_1$  y  $f_w$  son constantes y variables del modelo de turbulencia de Spalart-Allmaras y  $d$  es la menor distancia del punto (o nodo) considerado al contorno sólido más cercano. La ecuación de transporte utilizada aquí está expresada en su forma conservativa, tal como puede encontrársela en el trabajo de Allmaras, Johnson y Spalart (2012) pero sin considerar los términos de supresión laminar y “trip terms” incluidos en las expresiones originales del modelo.

Para cerrar el sistema de ecuaciones aún es necesario definir todos los parámetros asociados al modelo de turbulencia de Spalart-Allmaras, los cuales se muestran a continuación:

$$\sigma = \frac{2}{3}; \quad cb_1 = 0.1355; \quad cb_2 = 0.622$$

$$S = \Omega + f_{v2} \frac{\tilde{v}}{K^2 d^2}; \quad K = 0.41$$

donde  $\Omega$  es el módulo del vector velocidad angular dado por:

$$\Omega = \frac{1}{2} \text{rot}V; \quad \Omega = \sqrt{\Omega \cdot \Omega}$$

$$f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}}; \quad \chi = \frac{\rho \tilde{v}}{\mu}; \quad f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + c_{v1}^3}; \quad c_{v1} = 7.1$$

$$f_w = g \left( \frac{1 + c_{w3}^6}{g^6 + c_{w3}^6} \right)^{\frac{1}{6}}; \quad c_{w3} = 2.0; \quad g = r + c_{w2}(r^6 - r); \quad c_{w2} = 0.3$$

$$r = \frac{\tilde{v}}{S K^2 d^2}; \quad c_{w1} = \frac{cb_1}{K^2} + \frac{1 + cb_2}{\sigma}$$

La viscosidad turbulenta y la conductividad térmica turbulenta quedan definidas de la siguiente manera:

$$\mu_t = \rho \tilde{v} f_{v1}; \quad K_t = \mu_t \frac{\gamma}{Pr_t}; \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} = 1.4$$

donde  $Pr_t$  es el número de Prandtl turbulento el cual se adopta  $Pr_t = 0.9$  y  $c_v$  y  $c_p$  son los coeficientes de calor específico a volumen constante y a presión constante respectivamente.

Por último, deben considerarse la ecuación de estado, la relación entre las energías específicas involucradas y una ley de variación de la viscosidad y el coeficiente de conductividad térmica con la temperatura.

La ecuación de estado de los gases perfectos (aire) es la siguiente:

$$p = (\gamma - 1)\rho u; \quad (9)$$

La energía interna  $u$  y la temperatura se relacionan con las variables de campo independientes por la siguiente expresión:

$$u = c_v T = e - \frac{1}{2} v_i v_i - k \quad (10)$$

donde  $T$  es la temperatura y, nuevamente,  $k$  se desprecia en el modelo de Spalart-Allmaras.

La ley de Sutherland se utiliza en este trabajo para establecer la dependencia de la viscosidad y el coeficiente de la conductividad térmica con respecto a la temperatura. Esta ley puede

expresarse de la forma siguiente:

$$\mu = \mu_{ref} \frac{S + u_{ref}}{S + u} \left( \frac{u}{u_{ref}} \right)^{\frac{3}{2}}; \quad K = K_{ref} \frac{S_k + u_{ref}}{S_k + u} \left( \frac{u}{u_{ref}} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (11)$$

Los valores de  $S$  y  $S_k$  pueden encontrarse en White (1974) para la ley de Sutherland basada en temperatura, y deben ser multiplicados por  $c_v$  para obtener los que se usan aquí. Es importante indicar que este sistema de ecuaciones ha sido adimensionalizado utilizando una longitud de referencia, la densidad no perturbada y la velocidad del sonido no perturbada.

Deben aplicarse condiciones iniciales y de contorno a las ecuaciones (1) para tener el modelo matemático correctamente definido. Las condiciones forzadas de contorno (o condiciones de contorno de Dirichlet) vienen dadas por:

$$\begin{aligned} v_i &= \bar{v}_i & \text{en } \Gamma_v \\ \rho &= \bar{\rho} & \text{en } \Gamma_\rho \\ u &= \bar{u} & \text{en } \Gamma_u \\ \tilde{v} &= \bar{\tilde{v}} & \text{en } \Gamma_{\tilde{v}} \end{aligned} \quad (12)$$

donde  $\bar{v}_i$ ,  $\bar{\rho}$ ,  $\bar{u}$  y  $\bar{\tilde{v}}$  son los valores prescriptos de las componentes de velocidad, la densidad (masa específica), la energía interna específica y la variable  $\tilde{v}$ , en las regiones de la superficie de contorno  $\Gamma_v$ ,  $\Gamma_\rho$  y  $\Gamma_u$  respectivamente.

Las condiciones naturales de contorno (o condiciones de contorno de Neumann) vienen definidas, a su vez, por las siguientes expresiones:

$$\sigma_{ij} n_j = \hat{t}_i \quad \text{en } \Gamma_\sigma \quad (13)$$

$$q_i n_i = \hat{q} \quad \text{en } \Gamma_q \quad (14)$$

En las expresiones (13) y (14) se tiene:

- ✓  $n_i$  son los cosenos de los ángulos formados por el vector normal a la superficie  $\Gamma_\sigma$  o  $\Gamma_q$  y los ejes de referencia globales  $x_i$ .
- ✓  $\hat{t}_i$  son las tracciones actuando sobre  $\Gamma_\sigma$ .
- ✓  $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij}$  son las componentes del tensor de tensiones de Cauchy.
- ✓  $\hat{q}$  es el flujo de calor normal actuando en  $\Gamma_q$
- ✓ Los efectos de la radiación y la convección en las superficies de contorno no han sido considerados.

Para flujos no viscosos la ecuación de transporte de la variable  $\tilde{v}$  y los términos difusivos  $G_i$  en la ecuación (1) deben omitirse. En este caso, sólo se prescribe la componente de velocidad normal al contorno sólido (nula) y sólo se tienen en cuenta las componentes normales de las cargas superficiales en el contorno del dominio.

### 3 FORMULACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS: EL ESQUEMA DE TAYLOR-GALERKIN

#### 3.1 Avance en el tiempo: serie de Taylor.

Luego de expandir al vector  $U$  según una serie de Taylor, se obtiene:

$$\begin{aligned} \Delta U^{n+1} = \Delta t & \left[ -\frac{\partial F_i^n}{\partial x_i} - \frac{\partial G_i^n}{\partial x_i} - R^n + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x_m} \left( v_m^n \frac{\partial F_i^n}{\partial x_i} + R^n \right) \right] + \\ & + \frac{\Delta t}{2} \left[ \frac{\partial \Delta F_i^{n+1}}{\partial x_i} - \frac{\partial \Delta G_i^{n+1}}{\partial x_i} - \Delta R^{n+1} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial}{\partial x_m} \left( v_m^n \frac{\partial \Delta F_i^{n+1}}{\partial x_i} \right) \right] \end{aligned} \quad (15)$$

donde  $\Delta t$  es el paso de tiempo,  $n$  corresponde al tiempo  $t$ ,  $n+1$  corresponde al tiempo  $t+\Delta t$ , y

$$\Delta F_i^{n+1} = F_i^{n+1} - F_i^n; \Delta G_i^{n+1} = G_i^{n+1} - G_i^n; \Delta R^{n+1} = R^{n+1} - R^n$$

En la expresión (15) se han omitido los términos de orden superior (Yoon et. al., 1998). Como en dicha expresión las variables en el tiempo  $n+1$  aparecen en ambos miembros de la ecuación, se hace necesaria la utilización de un esquema iterativo para resolver los términos en el segundo corchete (ver Donea, 1984 por detalles de este esquema).

### 3.2 Discretización en el espacio: MEF Galerkin.

Aplicando el método clásico de Bubnov-Galerkin a la expresión (15) en el contexto del método de los elementos finitos, y aplicando el teorema de Gauss Green a los términos con derivadas segundas, se obtienen las siguientes ecuaciones matriciales (ver Burbridge y Awruch, 2000) en donde se han omitido algunos términos de contorno que son despreciables y donde se utiliza el subíndice “ $I$ ” para indicar iteración anterior e “ $I+1$ ” iteración actual.

Ecuación de continuidad

$$\{\Delta \rho\}_{I+1}^{n+1} = \Delta t [M_D]^{-1} (-[BC_i] \{F_i^\rho\}^n) + \frac{\Delta t}{2} [M_D]^{-1} (-[BC_i] \{\Delta F_i^\rho\}_I^{n+1}) \quad (16)$$

Ecuaciones de conservación de cantidad de movimiento

$$\begin{aligned} \{\Delta \rho v_j\}_{I+1}^{n+1} = \Delta t [M_D]^{-1} & \left( -[BC_i] \{F_{ij}^{\rho v}\}^n - [D_{ij}] \{v_i\}^n + \{f_j\}^n \right) + \\ & + \frac{\Delta t}{2} [M_D]^{-1} \left( -[BC_i] \{\Delta F_{ij}^{\rho v}\}_I^{n+1} - [D_{ij}] \{\Delta v_i\}_I^{n+1} \right) \end{aligned} \quad (17)$$

Ecuación de conservación de energía

$$\begin{aligned} \{\Delta \rho e\}_{I+1}^{n+1} = \Delta t [M_D]^{-1} & \left( -[BC_i] \{F_i^{\rho e}\}^n - [E_i] \{v_i\}^n - [K] \{u\}^n + \{q\}^n \right) + \\ & + \frac{\Delta t}{2} [M_D]^{-1} \left( -[BC_i] \{\Delta F_i^{\rho e}\}_I^{n+1} - [E_i] \{\Delta v_i\}_I^{n+1} - [K] \{\Delta u\}_I^{n+1} \right) \end{aligned} \quad (18)$$

Ecuación de transporte de  $\tilde{v}$  (SA)

$$\begin{aligned} \{\Delta \rho \tilde{v}\}_{I+1}^{n+1} = \Delta t [M_D]^{-1} & \left( -[BC_i] \{F_i^{\rho \tilde{v}}\}^n - [M] \{R\}^n - [A_i] \{R v_i\}^n - [D_v] \{\tilde{v}\}^n \right) + \\ & + \frac{\Delta t}{2} [M_D]^{-1} \left( -[BC_i] \{\Delta F_i^{\rho \tilde{v}}\}_I^{n+1} - [M] \{\Delta R\}_I^{n+1} - [D_v] \{\tilde{v}\}_I^{n+1} \right) \end{aligned} \quad (19)$$

Siendo:

$$[BC_i] = [B_i] + [C_i];$$

$$[B_i] = \int_{\Omega_E} [\phi]^T \frac{\partial [\phi]}{\partial x_i} d\Omega; \quad [C_i] = \frac{\Delta t}{2} \int_{\Omega_E} ([\phi] \{v_k\}^n) \frac{\partial [\phi]^T}{\partial x_k} \frac{\partial [\phi]}{\partial x_i} d\Omega; \quad [A_i] = \frac{\Delta t}{2} [B_i]$$

con  $i, j, k=1, 2, 3$ , y:

$$[D_{ij}] = \begin{cases} \int_{\Omega_E} \eta \left( 2 + \frac{\lambda}{\eta} \right) \frac{\partial[\phi]^T}{\partial x_i} \frac{\partial[\phi]}{\partial x_{(i)}} d\Omega + \int_{\Omega_E} \eta \frac{\partial[\phi]^T}{\partial x_k} \frac{\partial[\phi]}{\partial x_k} d\Omega, & \text{si } i = j \text{ y: } \begin{cases} i = 1 \rightarrow k = 2,3 \\ i = 2 \rightarrow k = 1,3 \\ i = 3 \rightarrow k = 1,2 \end{cases} \\ \int_{\Omega_E} \eta \frac{\partial[\phi]^T}{\partial x_i} \frac{\partial[\phi]}{\partial x_j} d\Omega + \int_{\Omega_E} \lambda \frac{\partial[\phi]^T}{\partial x_j} \frac{\partial[\phi]}{\partial x_i} d\Omega, & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

$$\eta = \mu + \mu_t; \quad \lambda = -\frac{2}{3}\eta$$

$$[E_i] = \int_{\Omega_E} \left[ \eta([\phi]\{v_i\}^n) \frac{\partial[\phi]^T}{\partial x_k} \frac{\partial[\phi]}{\partial x_k} + \eta([\phi]\{v_k\}^n) \frac{\partial[\phi]^T}{\partial x_i} \frac{\partial[\phi]}{\partial x_k} \right] d\Omega +$$

$$+ \int_{\Omega_E} \lambda ([\phi]\{v_k\}^n) \frac{\partial[\phi]^T}{\partial x_k} \frac{\partial[\phi]}{\partial x_i} d\Omega$$

$$[K] = \int_{\Omega_E} (K + K_t) \frac{\partial[\phi]^T}{\partial x_i} \frac{\partial[\phi]}{\partial x_i} d\Omega$$

$$[M] = \int_{\Omega_E} [\phi]^T [\phi] d\Omega$$

$$[M_D] = \begin{cases} \frac{\Omega_E}{8} & \text{para los términos de la diagonal principal.} \\ 0 & \text{para todos los términos fuera de la diagonal principal.} \end{cases}$$

$$[D_v] = \int_{\Omega_E} \frac{1}{\sigma} [\mu + ([\phi]\{\rho v\}^n)] \frac{\partial[\phi]^T}{\partial x_i} \frac{\partial[\phi]}{\partial x_i} d\Omega$$

$$\{R\}^n = -cb_1 S_E^n \{\rho \tilde{v}\}^n + cw_1 f_{wE}^n \left\{ \rho \left( \frac{\tilde{v}}{d} \right)^2 \right\}^n - \frac{cb_2}{\sigma} \left( \rho_E \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_i} \Big|_E \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_i} \Big|_E \right)^n \{1\} + \frac{1}{\sigma} \left[ (v_E + \tilde{v}_E) \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \Big|_E \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_i} \Big|_E \right]^n \{1\}$$

$$\{Rv_i\}^n = -cb_1 S_E^n \{\rho \tilde{v} v_i\}^n + cw_1 f_{wE}^n \left\{ \rho \left( \frac{\tilde{v}}{d} \right)^2 v_i \right\}^n - \frac{cb_2}{\sigma} \left( \rho_E \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_i} \Big|_E \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_i} \Big|_E \right)^n \{v_i\}^n + \frac{1}{\sigma} \left[ (v_E + \tilde{v}_E) \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \Big|_E \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_i} \Big|_E \right]^n \{v_i\}^n$$

$$\{F_i^\rho\} = \{\rho v_i\}; \quad \{F_{ij}^{\rho v}\} = \{\rho v_i v_j + p \delta_{ij}\}; \quad \{F_i^{\rho e}\} = \{\rho e v_i + p v_i\}; \quad \{F_i^{\rho \tilde{v}}\} = \{\rho v_i \tilde{v}\}$$

$$\{f_j\}^n = \int_{\Gamma_E} [\Phi^*]^T \left[ \eta \left( \frac{\partial[\phi]}{\partial x_i} \{v_j\}^n + \frac{\partial[\phi]}{\partial x_j} \{v_i\}^n \right) + \lambda \left( \frac{\partial[\phi]}{\partial x_k} \{v_k\}^n \right) \delta_{ij} \right] n_i d\Gamma$$

$$\{q\}^n = \int_{\Gamma_E} [\Phi^*]^T ([\Phi]\{v_j\}^n) \left[ \eta \left( \frac{\partial[\phi]}{\partial x_i} \{v_j\}^n + \frac{\partial[\phi]}{\partial x_j} \{v_i\}^n \right) + \lambda \left( \frac{\partial[\phi]}{\partial x_k} \{v_k\}^n \right) \delta_{ij} \right] n_i d\Gamma +$$

$$+ \int_{\Gamma_E} [\Phi^*]^T (K + K_t) \left( \frac{\partial[\phi]}{\partial x_i} \{u\}^n \right) n_i d\Gamma$$

En estas expresiones  $\Omega_E$  y  $\Gamma_E$  son el volumen del elemento y su superficie de contorno respectivamente, las expresiones con subíndice  $E$  son promedios de elemento,  $[\Phi] = [\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_8]$  es la matriz fila que contiene a las funciones de interpolación para cada nodo local,  $[\Phi^*]$  es la matriz fila que contiene las funciones de interpolación evaluadas en el contorno de la superficie,  $[M]$  es la matriz de masa consistente  $[M_D]$  es la matriz de masa concentrada y  $\{1\}$  es un vector con unos para los ocho nodos de elemento. Los términos que involucran la energía cinética turbulenta han sido despreciados. También se despreciaron los términos de contorno que aparecen en la ecuación de transporte de Spalart-Allmaras y en los términos iterativos de todas las ecuaciones.

Debe notarse que las expresiones (16), (17), (18) y (19) constituyen un esquema explícito que resulta condicionalmente estable (ver Huebner et. al., 1995). Utilizando la inversa de la matriz de masa diagonalizada (masa concentrada) no se requiere la inversión de la matriz de masa consistente.

Una vez ensambladas estas ecuaciones para todos los elementos de la malla y aplicadas las correspondientes condiciones de contorno, los valores nodales de  $\rho$ ,  $\rho v_j$ ,  $\rho e$  y  $\rho \tilde{v}$  se pueden calcular a cada paso de tiempo usando un esquema iterativo. Luego los valores nodales de las componentes de velocidad, energía total específica y de la variable  $\tilde{v}$  pueden obtenerse inmediatamente. Luego se calculan los valores nodales de la energía interna específica y, utilizando la ecuación de estado, los valores nodales de presión. Para casos no viscosos, donde los términos viscosos no son tenidos en cuenta, se omiten los términos que contienen a las matrices  $[D_{ij}]$ ,  $[E_i]$  y  $[K]$ , los vectores  $\{f_j\}^n$  y  $\{q\}^n$  y la ecuación de transporte para el modelo de turbulencia de SA completa.

Considerando que este algoritmo es explícito, el mismo resulta condicionalmente estable. La condición de estabilidad de Courant–Friedrichs–Lewy (CFL) para cada elemento, en forma adimensional, viene dada por:

$$\Delta t_E = \beta \frac{\frac{L_E}{L_{ref}}}{M + \frac{c}{c_{ref}}} \quad (20)$$

donde  $L_E$  es la dimensión característica del elemento,  $c$  es la velocidad del sonido promedio de elemento  $L_{ref}$  y  $c_{ref}$  son la longitud y la velocidad de sonido de referencia del problema respectivamente,  $M$  es el Mach local en el elemento y  $\beta$  es un coeficiente de seguridad que adopta valores tales que  $0.2 \leq \beta \leq 0.7$ .

Con el objetivo de capturar las fuertes discontinuidades y eliminar oscilaciones de alta frecuencia cerca de las ondas de choque, se utiliza un conocido método que adiciona viscosidad artificial selectivamente sólo en las regiones del dominio con fuertes gradientes de presión (Argyris et. al., 1989). La solución suavizada se obtiene a partir de la solución no suavizada utilizando la siguiente expresión:

$$\{\mathbf{U}_s\}^{n+1} = \{\mathbf{U}\}^{n+1} + [M_D]^{-1} \{\mathbf{D}\}^n \quad (21)$$

donde el vector de amortiguamiento ficticio viene dado por

$$\{\mathbf{D}\}^n = \sum_{E=1}^{NEM} C_E C_{AD} S_E ([M] - [M_D])_E \{\mathbf{U}\}^n \quad (22)$$

En (22)  $NEM$  es la cantidad de elementos de la malla,  $C_E = \Delta t / \Delta t_E$  es el número de Courant local,  $C_{AD}$  es un coeficiente de viscosidad artificial dado por el usuario (en este trabajo se adoptaron valores  $C_{AD} = 2.0$  para flujos viscosos y  $0.2 \leq C_{AD} \leq 0.4$  para flujos no viscosos) y  $S_E$  es un sensor de presiones a nivel de elemento obtenido como un promedio de los valores nodales  $S_N$  del elemento. Los valores  $S_N$  son componentes del siguiente vector global:

$$\{S\}^n = \frac{\sum_E |([M] - [M_D])_E \{p\}_E^n|}{\sum_E |([M] - [M_D])_E \{p\}_E^n|} \quad (23)$$

donde las barras indican valor absoluto y  $[M]$  es la matriz de masa consistente del elemento:

$$[M] = \int_{\Omega_E} [\phi]^T [\phi] d\Omega \quad (24)$$

La convergencia del proceso iterativo es obtenida cuando los residuos de densidad, cantidad de movimiento y energía están por debajo de cierto valor de tolerancia. La tolerancia adoptada en este trabajo es  $To=1*10^{-3}$ , pero la misma puede ser fijada en valores diferentes.

El proceso de solución finaliza cuando la variable  $t$  (tiempo) alcanza un valor predeterminado, previamente establecido por el usuario, o cuando se llega al estado estacionario. Esta última condición se considera cumplida cuando la siguiente expresión

$$R^{n+1} = \left[ \sum_N |\rho^{n+1} - \rho^n|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq TOL_t \quad (25)$$

se satisface durante un cierto número de pasos de tiempo. En este trabajo se utilizaron valores de  $TOL_t = 10^{-8}$

En este trabajo se utilizaron elementos hexaédricos isoparamétricos de ocho nodos. Para dichos elementos se obtienen integrales que pueden resolverse por integración numérica del tipo Gauss-Legendre. Sin embargo, en este trabajo se evalúan el determinante Jacobiano y la inversa de la matriz Jacobiana en el punto central de elemento y, de esta forma, los integrandos se simplifican notablemente pudiendo obtener expresiones analíticas ya integradas que no requieren de integración numérica (ver Molina y Huot, 1992; Burbridge y Awruch, 2000). Esto trae aparejado una ventaja en la eficiencia de los códigos computacionales, pero debe prestarse especial atención a la distorsión de los elementos de la malla, así como también a la aplicación de una técnica de control de modos espurios de Hourglass.

#### 4 RESULTADOS: FLUJO COMPRESIBLE SOBRE PLACA PLANA (RE=15\*10<sup>6</sup> M=2)

El siguiente caso corresponde al flujo compresible turbulento sobre una placa plana en régimen supersónico:  $M=2$ ,  $Re = 15*10^6$ . Este problema se encuentra descrito en el repositorio web de la NASA para modelos de turbulencia (Turbulence Modeling Resource, Langley Research Center, NASA). Allí se muestran resultados para varios modelos de turbulencia y se lo compara con la resolución teórica semi-empírica.

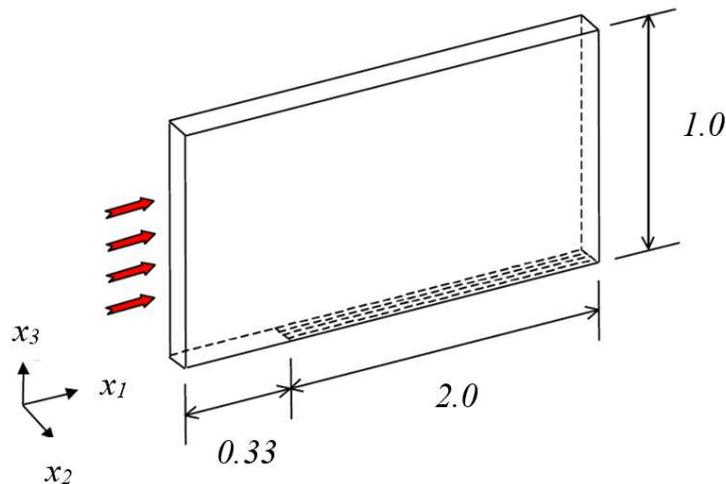


Figura 1 – Vista lateral y características de flujo.

La geometría y otros parámetros importantes de este problema se muestran en la Figura 1. Considerando que la malla utilizada es tridimensional con un único elemento en la dirección  $x_2$ , se impone la condición  $v_2 = 0,0$  en los contornos laterales de manera de evitar el flujo de masa a través de dichos contornos, conservando la característica bidimensional del flujo.

En la Figura 2 se muestra la vista lateral de la malla de elementos finitos, la cual cuenta con 13056 elementos hexaédricos y 26578 nodos. La malla es exactamente la misma que se encuentra en el repositorio web de la NASA para modelos de turbulencia (3D 2x137x97/2x113 puntos sobre la placa plana)

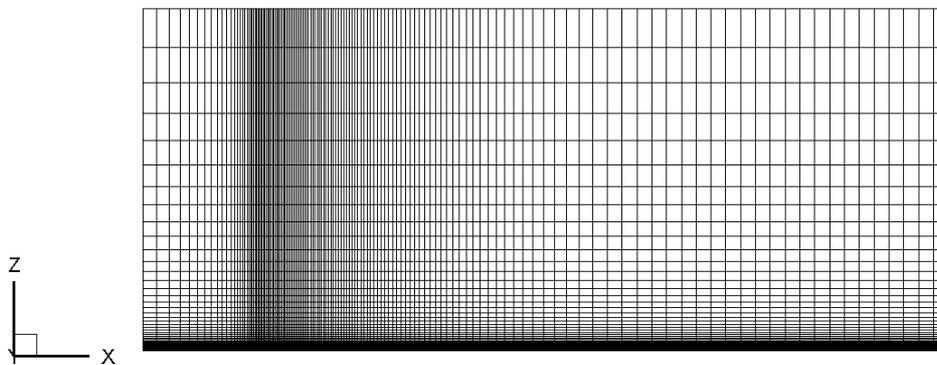


Figura 2 – Vista lateral de la malla.

La malla tiene un refinamiento en proximidades de la pared tal que la estimación del  $y^+$  resulta próximo a 0.3.

Las condiciones de contorno en la entrada son:

$$v_{1\infty} = 2.0; v_{2\infty} = v_{3\infty} = 0.00; u_{\infty} = 1.7795; \rho_{\infty} = 1.0; \tilde{v}_{\infty} = 6.667 * 10^{-7}$$

Sobre los contornos sólidos (sobre la placa) se aplica la condición de no deslizamiento

$$v_1 = v_2 = v_3 = 0.0; \tilde{v}_{\infty} = 0.0$$

juntamente con la temperatura de estancamiento, la cual se especifica utilizando la energía interna específica, según la siguiente expresión

$$u_{stg} = u_{\infty} \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_{\infty}^2 \right) = 3.0465$$

y las condiciones en los contornos de salida se especifican utilizando los vectores  $\{f_j\}$  y  $\{q\}$ .

Las condiciones iniciales vienen dadas por:

$$v_1^0 = 2.0; v_2^0 = v_3^0 = 0.00; u^0 = 1.7795; \rho^0 = 1.0; p^0 = 0.7118 \text{ y } \tilde{v}^0 = 6.667 * 10^{-7}$$

Estos valores se definen en todos los nodos de la malla, a excepción de los nodos donde se prescribieron condiciones de contorno de Dirichlet.

Utilizando el factor de seguridad  $\beta = 0.2$ , definido en (23) el paso de tiempo adimensional efectivo utilizado en este problema resultó  $\Delta t = 1.0 * 10^{-5}$ . El coeficiente de viscosidad artificial, definido en (37), utilizado en este problema es  $C_{AD} = 0.3$ .

La Figura 3 muestra los contornos de presión obtenidos en este trabajo.

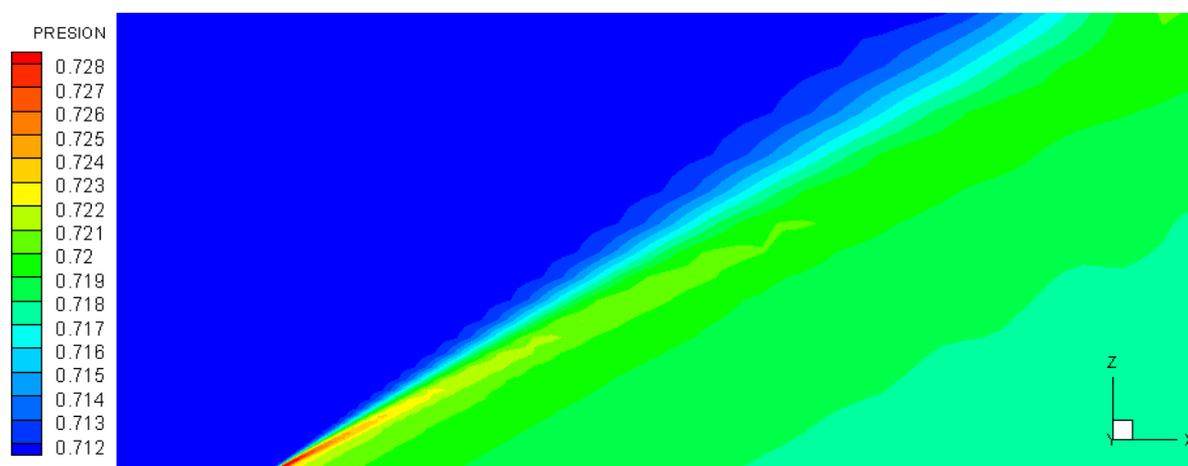


Figura 3 – Contornos de Presión (Trabajo presente)

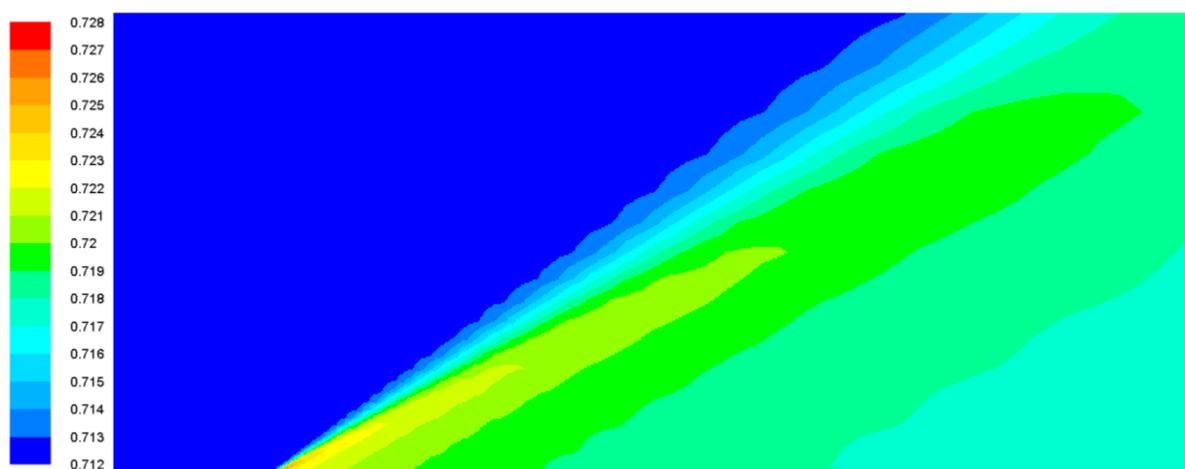


Figura 4 – Contornos de Presión (ANSYS/Fluent 17.1)

En la Figura 4 se ven los contornos de presión obtenidos con ANSYS/Fluent 17.1 disponible en el GFC (Grupo de Fluidodinámica Computacional) de la UNLP (Universidad Nacional de La Plata). La malla utilizada para las simulaciones con Fluent es exactamente la misma que la mostrada en la Figura 2. Las escalas de las Figuras 3 y 4 han sido ajustadas para ser lo más similares posibles, teniendo en cuenta que los pos-procesadores son diferentes. Los valores de

presión adimensional son muy similares. Existen pequeñas diferencias, pero debe tenerse en cuenta que las escalas de colores no son exactamente iguales. En ambas imágenes las distribuciones de presión en el flujo muestran la perturbación producida por el borde de la placa propagándose como una onda de Mach.

En la Figura 4 se muestra una imagen del coeficiente de fricción  $c_f$ , comparando con valores obtenidos provistos por la correlación semi-empírica de Van Driest (ver repositorio web de la NASA para modelos de turbulencia), que muestran la buena concordancia con los resultados provistos en dicha referencia para el coeficiente de fricción.

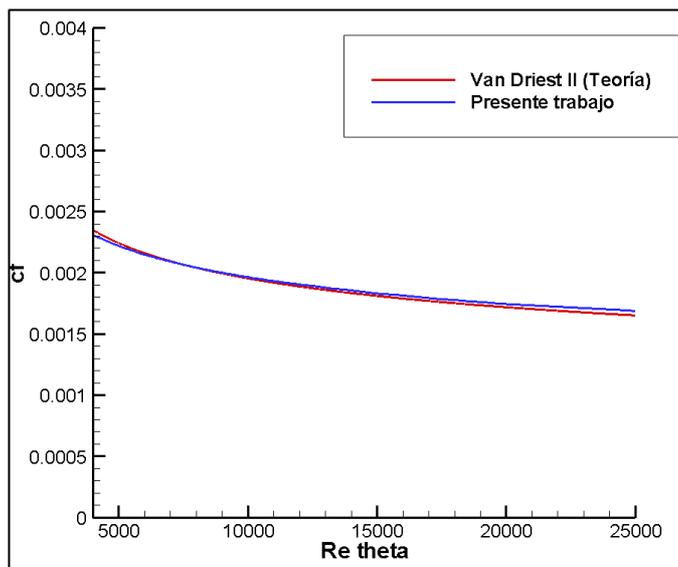


Figura 4 – Coeficiente de fricción sobre la placa plana.

Por último, la Figura 5 muestra el perfil de velocidades adimensionalizado, correspondiente a la posición de la placa donde se verifica que  $Re\theta = 10000$ .

Como puede verse los resultados obtenidos para en este trabajo resultan muy próximos a los valores de la referencia citada.

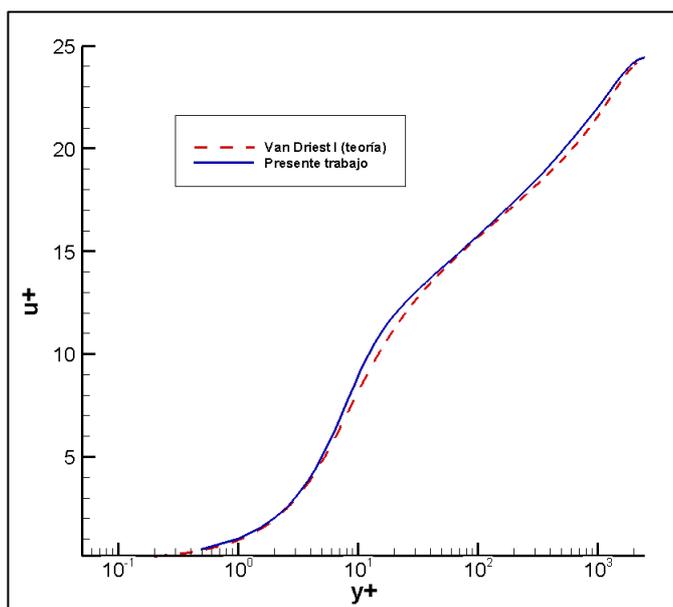


Figura 5 – Perfil de velocidad en  $Re\theta = 10000$

## 5 CONCLUSIONES

Puede observarse que el esquema T-G con el modelo de turbulencia S-A presenta resultados muy próximos a los esperables para el caso de la placa plana. Es importante remarcar que aquí se utilizó la forma conservativa de la ecuación de transporte de S-A, la cual fue propuesta por primera vez en el trabajo de Allmaras y Spalart (2012). Se muestran aquí los resultados obtenidos para el mismo problema con la versión 17.1 de ANSYS/Fluent, y puede observarse un buen nivel de proximidad con los valores obtenidos para los contornos de presión. Por razones de brevedad no se muestran contornos de viscosidad turbulenta y número de Mach pero los mismos también presentan un buen nivel de acuerdo.

Este trabajo se enmarca en un proyecto de investigación de algoritmos basados en elementos finitos para flujos externos aerodinámicos. Como futuros trabajos se presentarán variantes del esquema de T-G que presentan mejor comportamiento desde el punto de vista de la convergencia. Se prevé utilizar los códigos aquí desarrollados para simular problemas de flujo externo aerodinámico en aplicaciones aeroespaciales como, por ejemplo, para simulación de aletas de cohetes o cohetes completos en régimen supersónico turbulento.

## REFERENCIAS

- 2D Zero pressure gradient high Mach number flat plate. Turbulence Modeling Resource, Langley Research Center, NASA. <https://turbmodels.larc.nasa.gov/>
- Allmaras, S. R., Johnson F. T. and Spalart P. R., Modifications and Clarifications for the Implementation of the Spalart-Allmaras Turbulence Model, *ICCFD7-1902*, 2012.
- Argyris, J., Doltsinis, I. S. and Friz, H., Hermes space shuttle: exploration of reentry aerodynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 73, pp. 1-51, 1989.
- Boonmarlert, P., Phongthanapanich, S. and Dechaumpai, P., High-Speed Compressible Flow by Combined Characteristic-Based Split Method and Adaptive Meshing Technique, *Proceedings of the 18th ME-NETT Conference*, Khon Kaen, Thailand, 2004.
- Burbridge, H.P. and Awruch A.M., A Finite Element Taylor-Galerkin Scheme for 3-D Numerical Simulation of High Compressible Flow with Analytical Evaluation of Element Matrices. *Hybrid Methods in Engineering*, Vol. 2, Begell House Inc. N.Y., 2000.
- Burbridge, H.P., O esquema explícito de Taylor-Galerkin na simulação numérica de escoamentos compressíveis tridimensionais utilizando elementos finitos hexaédricos de oito nós, *Tese de mestrado. Programa de pós-graduação em Engenharia Civil*, UFRGS, Porto Alegre, 1999.
- Donea, J., A Taylor-Galerkin method for convective transport problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 20, pp. 101-119, 1984.
- Huebner, K. H., Thornton, E. A. and Byrom, T.G., The Finite Element Method for Engineers. Third Edition. *John Wiley and Sons, Inc.*, pp 237-243, 1995.
- Massarotti, N., Arpino, F., Lewis, R.W. and Nithiarasu, P., Explicit and semi-implicit CBS procedures for incompressible viscous flows. *International journal for numerical methods in engineering*, Vol. 66, pp 1618-1640, 2006.
- Molina R. C. and Huot, J. P., A one-point integration finite element solver for the fast solution of the compressible Euler equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 95, pp. 37-48, 1992.
- White, F., Viscous Fluid Flow. *McGraw Hill Book Co, (Fist edition)*, N.Y., 1974.
- Yoon, K. T., Moon S. Y., Garcia, S. A., Heard, G. W. and Chung, T. J., Flowfield-dependent mixed explicit-implicit (FDMEI) methods for high and low speed and compressible and incompressible flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 151,

pp. 75-104, 1998.

Zienkiewicz, O.C. and Codina, R., A general algorithm for compressible and incompressible flow-Part I: The Split, Characteristic-Based Scheme. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 20, pp. 869-885, 1995.

Zienkiewicz, O.C., Satya Sai, B.V.K., Morgan, K., Codina R., and Vázquez, M., A general algorithm for compressible and incompressible flow-Part II: Tests on the Explicit Form. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 20, pp. 887-913, 1995.