

## ANÁLISIS GLOBAL-LOCAL DE MEDIOS LINEALES UTILIZANDO EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS

### GLOBAL-LOCAL ANALYSIS OF LINEAR MEDIA USING THE GENERALIZED FINITE ELEMENT METHOD

**Humberto Alves da Silveira Monteiro<sup>a</sup>, Gabriela Marinho Fonseca<sup>a</sup>, Larissa Novelli<sup>a</sup>,  
Roque Luiz da Silva Pitangueira<sup>a</sup> y Felício Bruzzi Barros<sup>a</sup>**

<sup>a</sup>INSANE Lab, Departamento de Engenharia de Estruturas, Universidade Federal de Minas Gerais. Av. Pres. Antônio Carlos, 6627, Escola de Engenharia – Bloco 1, Pampulha, Belo Horizonte – MG, Brasil.  
*hmonteiro@ufmg.br, gabriela-94@ufmg.br, larissan@ufmg.br, roque@dees.ufmg.br,  
felicio@dees.ufmg.br, [www.insane.dees.ufmg.br](http://www.insane.dees.ufmg.br)*

**Palabras clave:** Método de Elementos Finitos Generalizados, Análisis Global-Local, Enriquecimiento Global-Local.

**Resumen.** El Método de Elementos Finitos Generalizados (MEFG) es un método numérico relativamente nuevo, desarrollado a mediados de la década de 1990. Mediante el uso de conceptos de sus precursores, el MEFG aplica estrategias de los métodos sin malla dentro del Método de Elementos Finitos (MEF), permitiendo que la solución numérica de problemas de valor de frontera (PVF) sea más flexible y eficiente en situaciones en que haya, por ejemplo, algún tipo de discontinuidad. Este trabajo presenta el resultado de la implementación computacional de una alternativa de enriquecimiento ya conocida, pero todavía no largamente trabajada en la literatura: el enriquecimiento global-local, en lo que la solución de un PVF local refinado produce numéricamente funciones de enriquecimiento para el dominio global. Se presenta un breve ejemplo de aplicación de la técnica para medios lineales en estado plano. El trabajo se ejecuta en el sistema INSANE (*INteractive Structural ANalysis Environment*), *software* libre desarrollado en el Departamento de Ingeniería de Estructuras de la Universidad Federal de Minas Gerais, Brasil.

**Keywords:** Generalized Finite Element Method, Global-Local Analysis, Global-Local Enrichment.

**Abstract.** The Generalized Finite Element Method (GFEM) is a relatively new numerical method, developed in the mid-1990s. By using concepts of its precursors, the GFEM applies strategies of some meshless formulations within the Finite Element Method (FEM) framework, allowing more flexibility for the numerical solution of boundary value problems (BVP), and being efficient, for example, in those problems that have some kind of discontinuity. This work presents the result of a computational implementation of an already known enrichment strategy: the global-local enrichment, in which the solution of a refined local BVP numerically generates enrichment functions for the global domain. A brief example of application of the technique for linear problems in plane state is presented. The work has been executed in the INSANE system (*INteractive Structural ANalysis Environment*), a free software developed in the Department of Structural Engineering of the Federal University of Minas Gerais, Brazil.

## 1. INTRODUCCIÓN

En la mecánica del continuo, son frecuentes los problemas gobernados por ecuaciones diferenciales intrincadas cuya solución analítica es difícil o imposible. En este escenario, las técnicas numéricas surgen como una alternativa para que se obtengan respuestas cuantitativas (y cualitativas) a variables desconocidas de un determinado modelo. La elasticidad de los sólidos, la mecánica de fluidos y el análisis térmico figuran en el rango de posibilidades.

En los últimos años, se ha empleado el Método de Elementos Finitos Generalizados (MEFG) en diversos trabajos científicos para el estudio de variados problemas de la mecánica de los sólidos, con destaque para aquellos de fractura (Duarte et al., 2000; Barros, 2002; Kim et al., 2012). En este método, se mejora el espacio de aproximación original de un elemento finito a través de funciones especiales que describan fenómenos específicos. Más recientemente, se aplica el MEFG en problemas de múltiples escalas de análisis, en que se investigan el comportamiento de dominios globales (groseros) y locales (refinados) de manera concurrente. Surge ahí el Método de Elementos Finitos Generalizados con Enriquecimiento Global-Local (MEFG-GL), que utiliza funciones de enriquecimiento oriundas de una composición híbrida de la estrategia tradicional de análisis Global-Local con el MEFG (Duarte y Kim, 2008; Alves, 2012; Kim y Duarte, 2015; Plews y Duarte, 2016; Li y Duarte, 2018). La técnica se ha demostrado útil y flexible para el modelado de problemas en los que existan variaciones prominentes de campos internos que exijan un refinamiento acentuado de la malla, permitiendo que una investigación más detallada sea empleada solo en regiones localizadas y reducidas del dominio.

En ese sentido, el presente trabajo presenta la adopción del MEFG-GL para el análisis de materiales lineales en dos niveles distintos. Se ha utilizado el sistema informático INSANE (*INteractive Structural ANalysis Environment*), un *software* libre desarrollado en el Departamento de Ingeniería de Estructuras de la Universidad Federal de Minas Gerais (UFMG), Brasil, escrito en lenguaje Java y disponible en [www.insane.dees.ufmg.br](http://www.insane.dees.ufmg.br). Este ambiente es compuesto por aplicaciones gráficas interactivas de pre- y pos-procesamiento que actúan en conjunto con un núcleo numérico que dispone de distintos recursos para solución de problemas estructurales.

Además de esa introducción, se exhibe en la Sec. 2 una formulación básica del MEFG y el mecanismo del enriquecimiento, con destaque para el MEFG-GL. En la Sec. 3, el problema global-local en elasticidad es enunciado. Luego, en la Sec. 4, se presentan los experimentos numéricos adoptados para validación de la implementación. Un problema lineal tradicional de elasticidad bidimensional, en lo que se estudia una inclusión en un dominio semi-infinito, fue modelado y los resultados comparados con soluciones de referencia. Al fin, se registran conclusiones en la Sec. 5, seguidas por agradecimientos y la referencias bibliográficas.

## 2. EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS

### 2.1. Breve Contextualización

El Método de Elementos Finitos Generalizados es un método numérico relativamente nuevo, desarrollado a mediados de la década de 1990. De acuerdo con Duarte et al. (2000), el MEFG se origina a partir de dos conjuntos independientes de estudios: (1) las obras de Babuška et al. (1994) y Melnik y Babuška (1996), como Método de los Elementos Finitos Especiales y Método de la Partición de la Unidad (MPU), respectivamente; y (2) los estudios de Duarte y Oden (1996) acerca de formulaciones sin malla, más precisamente el Método de las Nubes h-p.

Es conveniente mencionar que la estrategia de enriquecimiento del MEFG (Sec. 2.2) es similar a la de otro método numérico, el Método de Elementos Finitos Extendidos (XFEM, en inglés), desarrollado inicialmente en Belytschko y Black (1999) para el estudio de la propa-

gación de fisuras. Según [Fries y Belytschko \(2010\)](#), la distinción de nomenclatura entre MPU, MEFG y XFEM se ha quedado muy confusa, y en la práctica, se puede clasificar los métodos como idénticos.

## 2.2. La Aproximación del MEFG

Inicialmente, se define la partición de la unidad (PU) como un conjunto de funciones que suman la unidad en todos los puntos  $\mathbf{x}$  de un dominio  $\Omega$ . La estrategia del MEFG consiste en usar las funciones de forma de los elementos finitos (MEF) como PU y otro conjunto de funciones distintas y linealmente independientes  $\mathfrak{S}_j$  – funciones de aproximación local (Ec. 1), multiplicando las funciones de base ([Barros, 2002](#); [Duarte et al., 2000](#)).

$$\mathfrak{S}_j = \{1, L_{j1}(\mathbf{x}), L_{j2}(\mathbf{x}), \dots, L_{jq}(\mathbf{x})\} = \{L_{ji}(\mathbf{x})\}_{i=1}^q \quad (1)$$

Así, se puede definir las funciones de forma  $\Phi_{ji}$  del MEFG como:

$$\{\Phi_{ji}(\mathbf{x})\}_{i=1}^q = N_j(\mathbf{x}) \times \{L_{ji}(\mathbf{x})\}_{i=1}^q, \quad (2)$$

en la que las funciones de aproximación local  $\{L_{ji}(\mathbf{x})\}_{i=1}^q$  pueden tener distintas naturalezas (polinomial, por ejemplo) ([Alves et al., 2013](#)).

Finalmente, la aproximación del MEFG para un campo escalar cualquiera puede ser calculada de acuerdo con Ec. 3:

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n N_j(\mathbf{x}) \left\{ \hat{u}_j + \sum_{i=1}^q L_{ji}(\mathbf{x}) \hat{b}_{ji} \right\}, \quad (3)$$

en la que  $\hat{u}_j$  y  $\hat{b}_{ji}$  son parámetros nodales asociados a  $N_j(\mathbf{x})$  y  $N_j(\mathbf{x})L_{ji}(\mathbf{x})$ , o en otras palabras, a la PU y al enriquecimiento. La Fig. 1 ilustra la estrategia de enriquecimiento del MEFG.

## 2.3. Estrategia Global-Local y el MEFG

Una estrategia global-local (GL) es una técnica híbrida de modelado que consiste en el uso de algunos mecanismos computacionales para resolver problemas complejos. Su aplicación fue estimulada por la demanda de problemas no lineales ([Noor, 1986](#)). El uso de la metodología global-local dentro del MEFG consiste en aplicar la dicha técnica de *zoom*, en la que se emplea la solución de un problema local aislado para generar numéricamente el enriquecimiento del espacio de aproximación global; esta asociación se ha denominado Método de Elementos Finitos Generalizados con Enriquecimiento Global-Local (MEFG-GL) ([Duarte y Kim, 2008](#)). A diferencia de las aplicaciones GL clásicas, la interacción local-global es posible cuando el MEFG es usado; esto nos ofrece una buena alternativa para mejorar la solución global. Los tres pasos fundamentales del MEFG-GL son (Fig. 2): (1) Inicialmente, un problema global se modela con una malla gruesa; (2) luego, con la región de interés y los nodos a enriquecer identificados, uno (o más) problema(s) local(es) es(son) resuelto(s), utilizando la solución del primer paso como condiciones de contorno; (3) finalmente, en el tercer paso y usando la solución local, enriquecemos el problema global, que se puede procesar nuevamente.

## 3. EL PROBLEMA GLOBAL-LOCAL EN ELASTICIDAD

Considerándose un dominio  $\Omega = \Omega_G \cap \Gamma_G$  en  $\mathbb{R}^3$ , cuya frontera es  $\Gamma_G = \Gamma_G^u \cup \Gamma_G^t$ , en la que  $\Gamma_G^u \cap \Gamma_G^t = \emptyset$ , se define el siguiente problema de equilibrio estático:

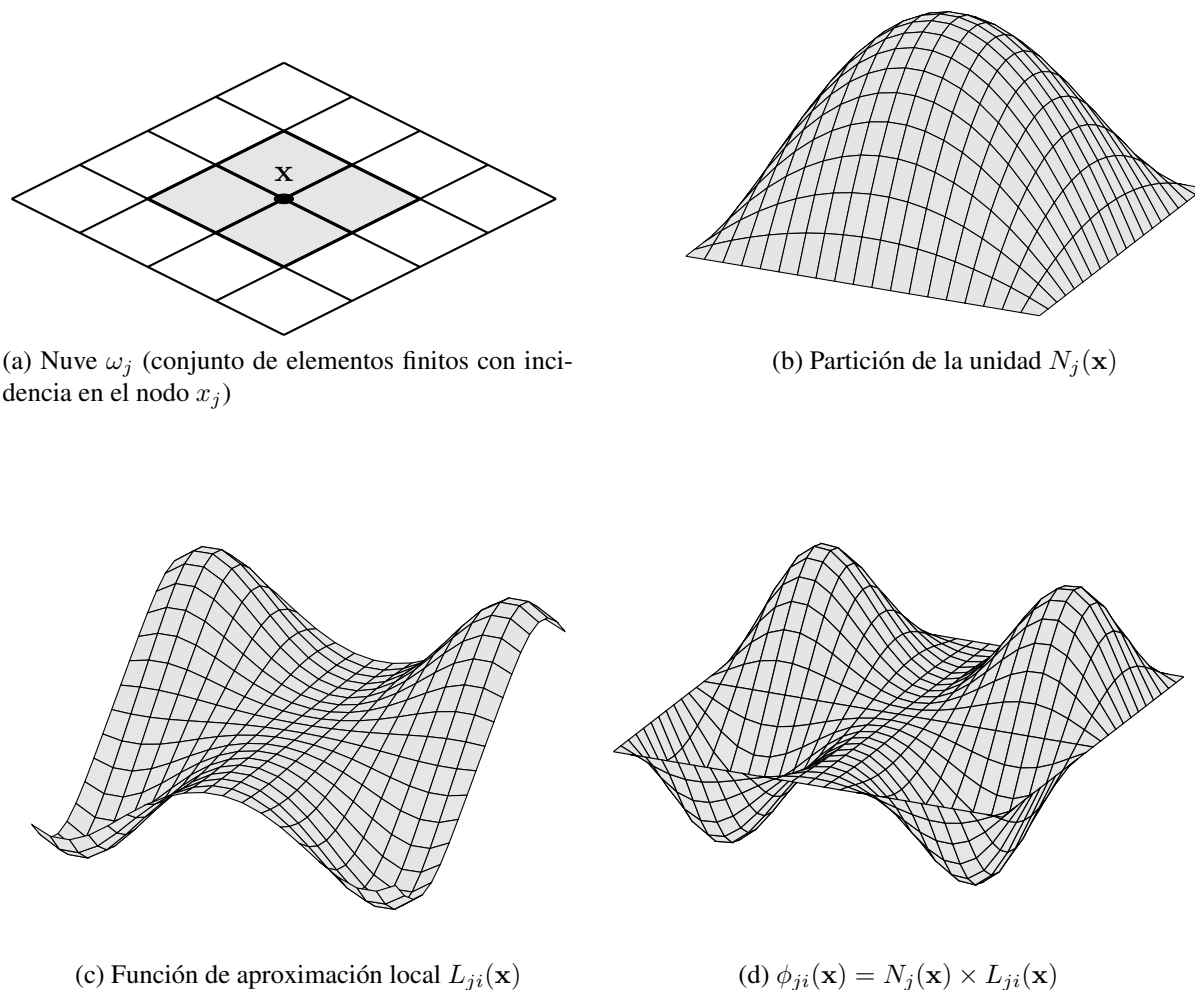


Figura 1: Estrategia de enriquecimiento. Adaptado de (Barros, 2002).

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}, \text{ en } \Omega_G \quad (4)$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}, \text{ en } \Gamma_G^u \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}}, \text{ en } \Gamma_G^t \quad (6)$$

### 3.1. Problema Global

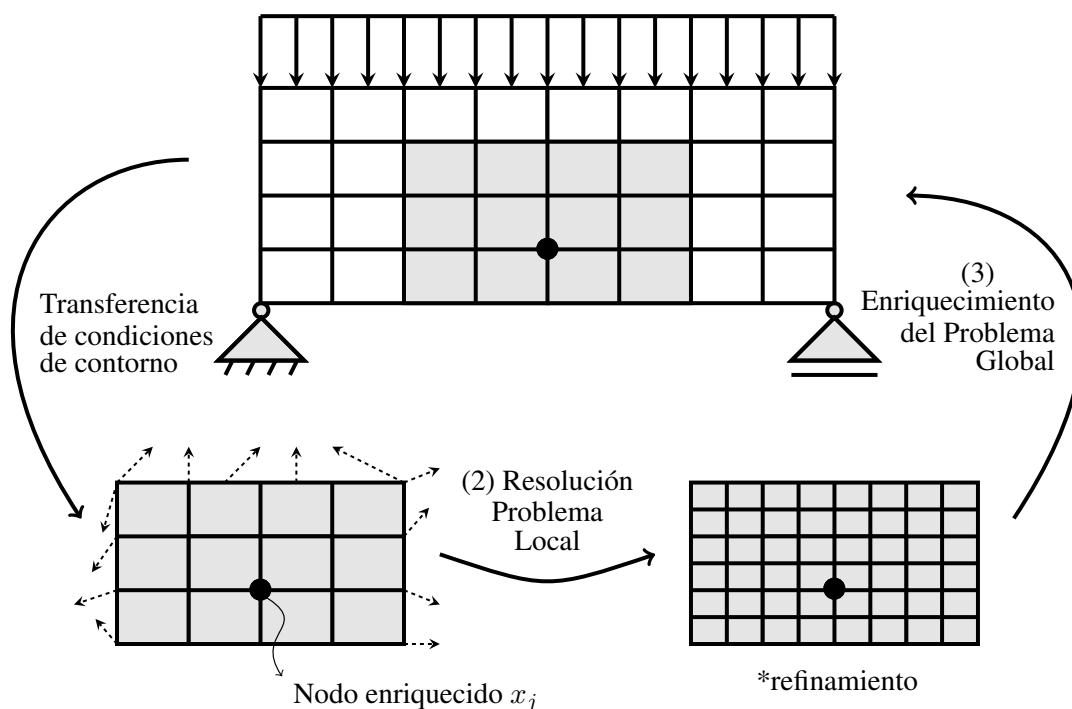
Sabiéndose que  $\mathbb{E}$  es el espacio de aproximación, que  $\delta$  indica un desplazamiento virtual y que  $H$  es el espacio de Hilbert, se puede establecer el siguiente problema: encuentre  $\mathbf{u}_G \in \mathbb{E}_G(\Omega_G) \subset H^1(\Omega_G) \mid \forall \delta \mathbf{u}_G \in \mathbb{E}_G(\Omega_G)$ . Así:

$$\int_{\Omega_G} \nabla \delta \mathbf{u}_G : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_G) dV + \eta \int_{\Gamma_G^u} \delta \mathbf{u}_G \cdot \mathbf{u}_G dS = \int_{\Gamma_G^t} \delta \mathbf{u}_G \cdot \bar{\mathbf{t}} dS + \eta \int_{\Gamma_G^u} \delta \mathbf{u}_G \cdot \bar{\mathbf{u}} dS, \quad (7)$$

en la que  $\eta$  es un parámetro de penalidad,  $\bar{\mathbf{u}}$  e  $\bar{\mathbf{t}}$  son desplazamientos y vectores de tracción

### Problema Global

(1) Solución del Problema Global Inicial con malla gruesa



### Problema Local

Figura 2: Etapas del MEFG-GL. Adaptado de Alves (2012).

prescritos en el contorno, respectivamente,  $\mathbf{n}$  es el vector normal a la superficie  $\Gamma_G^t$  y  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} : \boldsymbol{\epsilon}$ , donde  $\mathbf{D}$  es el tensor constitutivo.

Para la presente aplicación, el problema global de la etapa inicial y el problema global enriquecido se formulan análogamente.

### 3.2. Problema Local

De manera semejante, encuentre  $\mathbf{u}_L \in \mathbb{E}_L(\Omega_L) \subset H^1(\Omega_L) \mid \forall \delta \mathbf{u}_L \in \mathbb{E}_L(\Omega_L)$ . Así:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_L} \nabla \delta \mathbf{u}_L : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_L) dV + \eta \int_{\Gamma_L \cap \Gamma_G^u} \delta \mathbf{u}_L \cdot \mathbf{u}_L dS + \kappa \int_{\Gamma_L \setminus (\Gamma_L \cap \Gamma_G)} \delta \mathbf{u}_L \cdot \mathbf{u}_L dS = \\ = \int_{\Gamma_L \cap \Gamma_G^t} \delta \mathbf{u}_L \cdot \bar{\mathbf{t}} dS + \eta \int_{\Gamma_L \cap \Gamma_G^u} \delta \mathbf{u}_L \cdot \bar{\mathbf{u}} dS + \\ + \int_{\Gamma_L \setminus (\Gamma_L \cap \Gamma_G)} \delta \mathbf{u}_L \cdot [\mathbf{t}(\mathbf{u}_G) + \kappa \mathbf{u}_G] dS, \end{aligned} \quad (8)$$

en la que  $[\mathbf{t}(\mathbf{u}_G) + \kappa \mathbf{u}_G]$  son condiciones de contorno (“tracciones”) en la interfaz entre los dominios local e global, función de la respuesta global inicial, y  $\kappa$  es una constante elegida de manera a definir las condiciones de contorno de Neumann ( $\kappa = 0$ ), Dirichlet ( $\kappa \cong \eta$ ) o Cauchy ( $0 < \kappa < \eta$ ).

## 4. EXPERIMENTO NUMÉRICO

### 4.1. El Problema de la Inclusión

Para ejemplificar el uso del método, el problema de la inclusión fue elegido. En esa situación, en la que un cilindro de un determinado material (inclusión) está incrustado en un dominio semi-infinito de otro material (la matriz) – Fig. 3 –, la distribución de tensiones sigue funciones complicadas, con variaciones abultadas en determinadas direcciones, ocurriendo también fenómenos de concentración de tensión, a depender de las constantes materiales de la partícula (Mal y Singh, 1991).

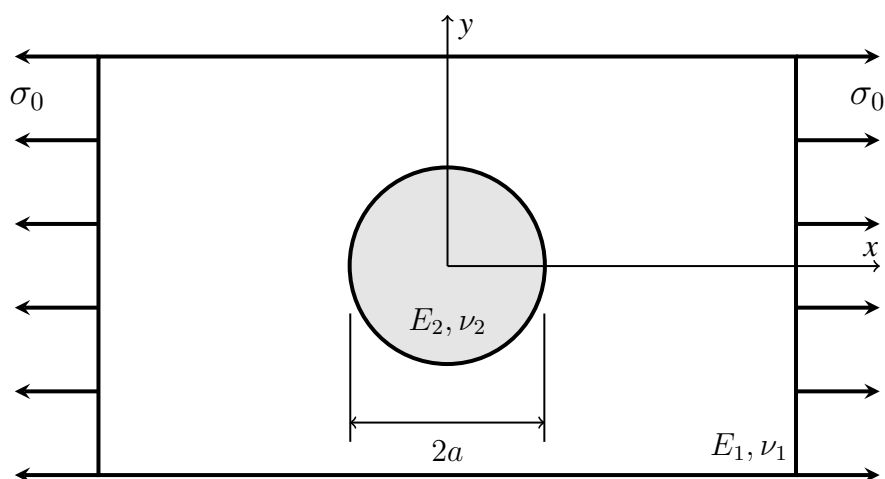


Figura 3: Modelo estudiado – problema de la inclusión.

### 4.2. Solución de Referencia – MEF Tradicional

Como solución de referencia (REF), se modeló el problema a través del MEF tradicional en un único nivel, con representación directa de la inclusión. Como la motivación del trabajo es académica y de validación de la estrategia numérica-computacional, no hubo preocupación más detallada con parámetros materiales o de la malla.

El tratamiento numérico para la morfología de la heterogeneidad fue simplificado, con uso de una malla no alineada con la geometría del contorno de la partícula. La dimensión promedio de los elementos finitos fue elegida de manera a capturar la forma de la inclusión con una precisión aceptable (Fig. 4a). Por simplicidad, se consideró una malla uniforme, con elementos de misma dimensión. Los parámetros materiales fueran arbitrariamente elegidos. Los datos de entrada para el problema son:  $E_1 = 20000$  MPa,  $\nu_1 = 0,2$ ,  $E_2 = 30000$  MPa,  $\nu_2 = 0,3$ ,  $a = 10$  mm,  $\sigma_0 = 10$  N, *longitud* =  $10a$ , *ancho* =  $10a$ .

Los campos dominantes (dirección  $x$ ) son presentados en la Fig. 4. Los desplazamientos  $u_x$  son registrados en la Fig. 4b, la componente de deformación  $\epsilon_{xx}$ , en la Fig. 4c y la componente de tensión  $\sigma_{xx}$ , en la Fig. 4d.

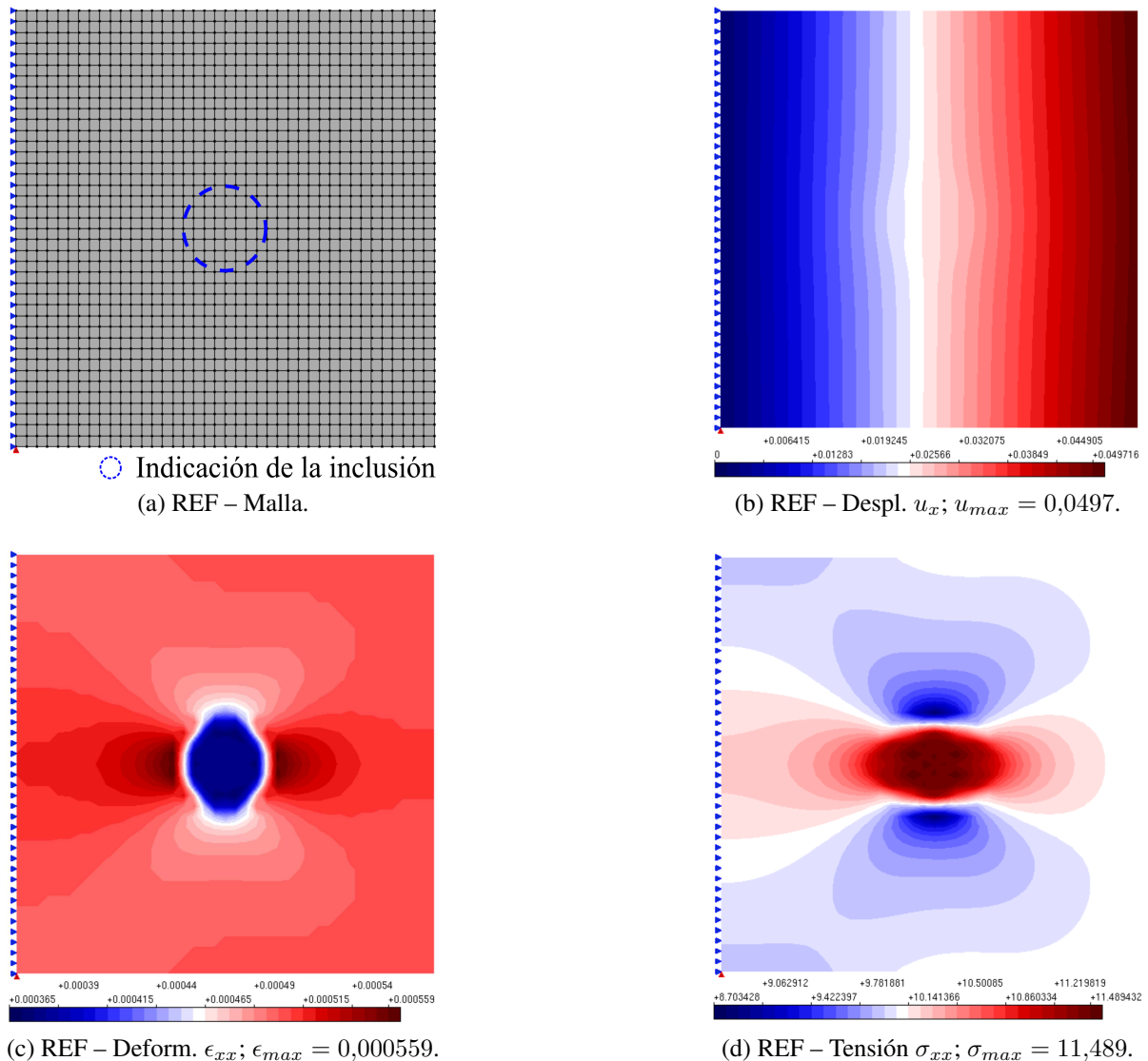


Figura 4: Solución de referencia.

### 4.3. Resultados Numéricos – MEFGL

Para la modelización numérica del problema precedente via MEFGL, se construyó un modelo global sin la descripción de la heterogeneidad y con una malla más grosera, pero con una cantidad mínima de nodos abarcando la región de la partícula (Fig. 5). Una pequeña banda del dominio alrededor de su zona central fue elegida para construcción del problema local, resuelto con una malla con el mismo grado de refinamiento de la solución de referencia y con la representación de la inclusión ligeramente más rígida que la matriz (Fig. 5). El tratamiento numérico para la morfología de la heterogeneidad fue igualmente simplificado. Se presentan la distribución de las componentes en la dirección  $x$  de los campos internos en el problema global con y sin enriquecimiento – Global Inicial (GI), homogéneo, y Global Enriquecido (GE), heterogéneo, respectivamente (Fig. 6).



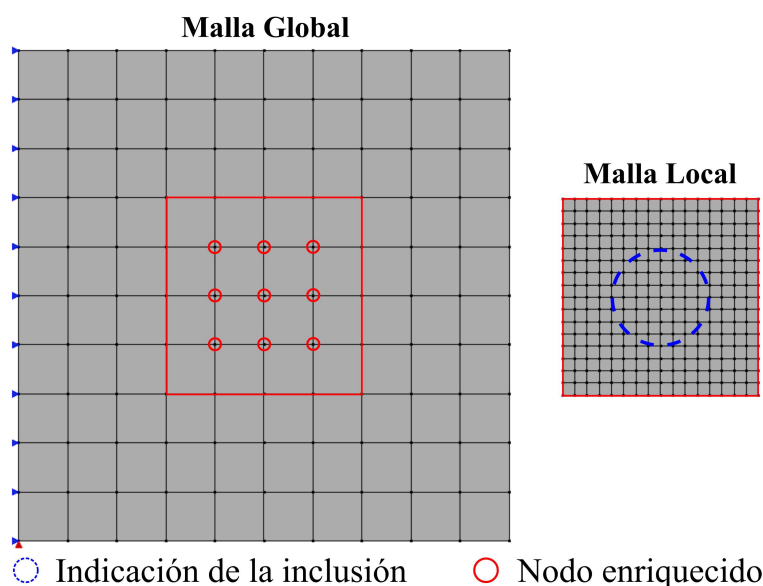


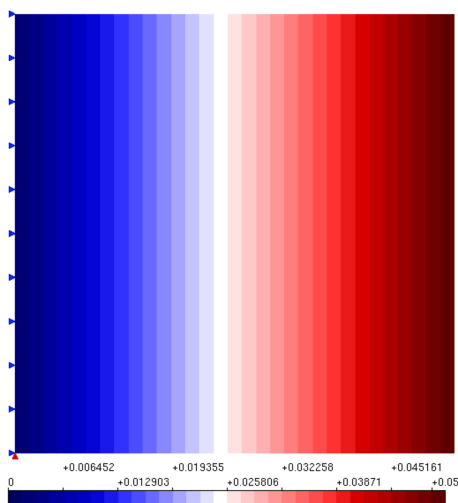
Figura 5: Representación de las mallas global y local – MEFGL.

## 5. CONCLUSIONES

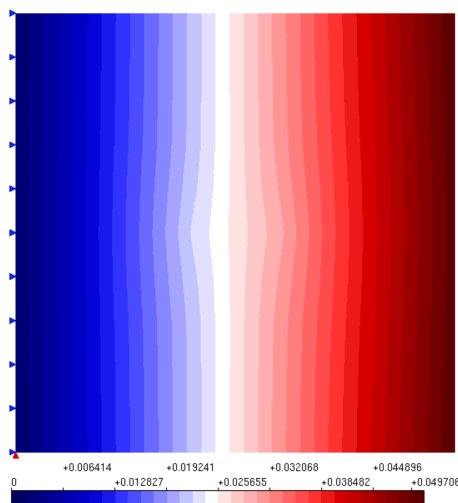
Se ha presentado una estrategia numérica-computacional para resolución de problemas de la mecánica de los medios continuos en dos niveles distintos, un grosero y el otro, refinado. Este mecanismo consiste en la unión del MEFGL con un procedimiento específico de enriquecimiento, llamado global-local. Un problema de elasticidad bidimensional, en estado plano de tensiones y con inserción de heterogeneidad material fue registrado en conjunto con una solución de referencia. A partir de los resultados se puede constatar que es posible incorporar en el problema global el comportamiento de un dominio local con características distintas, a través del enriquecimiento de la PU. Con la inclusión de pocos grados de libertad en la malla global (dos por nodo enriquecido, en el ejemplo), la técnica fue capaz de acoplar los efectos de la solución de un problema local al dominio global y cambiar totalmente la distribución de las variables internas del problema original (GI) – Fig. 6. Los resultados logrados para el caso GE (figuras 6b, 6d, 6f) están de acuerdo con la solución de referencia (figuras 4b, 4c, 4d, respectivamente), aunque pequeñas diferencias se puedan observar (posiblemente en razón de la diferencia de mallas). La estrategia se presenta como una fuerte alternativa para resolución de problemas complejos, con dimensiones más grandes, en los que haya la necesidad de un estudio más detallado en regiones críticas del dominio global. En situaciones en las que sea necesario la descripción de fisuras, fallos, heterogeneidades o geometrías localizadas menos sencillas, sobre todo en situaciones en las que la generación y la conformidad de la malla sean difíciles, la técnica propuesta introduce ventajas claras. Además, la implementación es suficientemente flexible para que distintos métodos numéricos sean aplicados en la resolución del problema local.

Actualmente, los autores implementan la estrategia aquí ilustrada para problemas con no-linealidad material, con el objetivo de consolidación de un mecanismo multi-escala basado en el MEFGL. Los resultados obtenidos en este estudio indican ser posible la adopción de una descripción localizada de la morfología del medio y la capacidad de incorporación de la constitución material en el problema global, a partir del *framework* teórico de la PU.

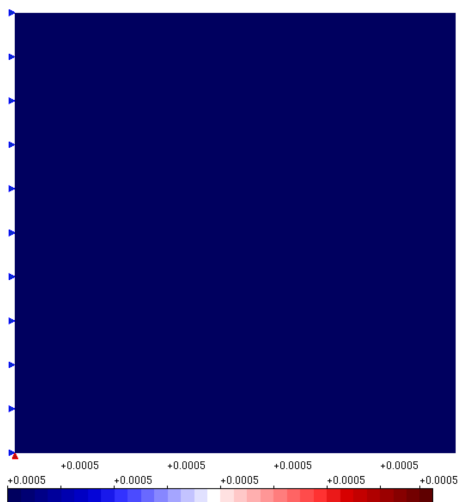




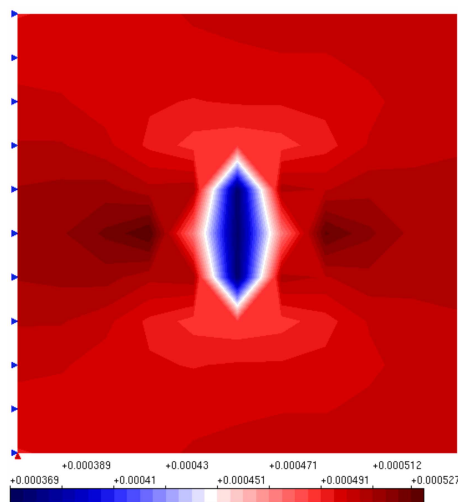
(a) GI – Despl.  $u_x$ ;  $u_{max} = 0,05$ .



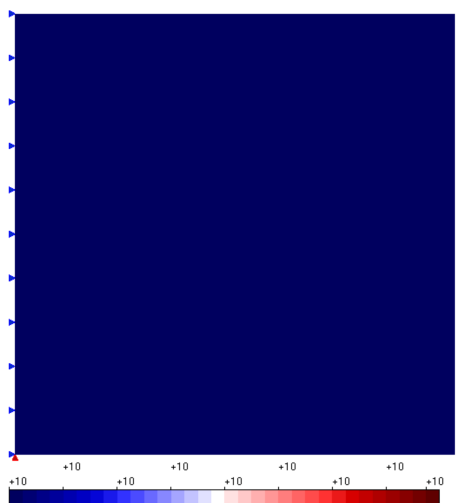
(b) GE – Despl.  $u_x$ ;  $u_{max} = 0,0497$ .



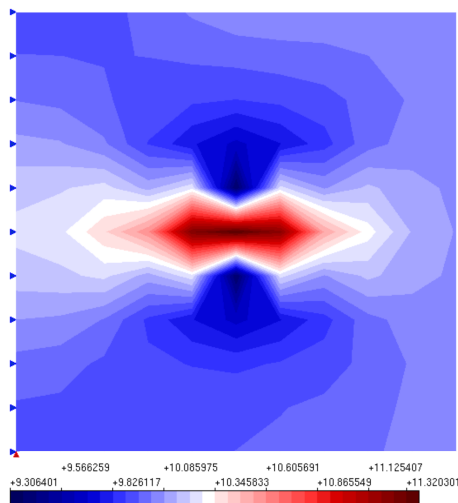
(c) GI – Deform.  $\epsilon_{xx}$ ;  $\epsilon_{max} = 0,0005$ .



(d) GE – Deform.  $\epsilon_{xx}$ ;  $\epsilon_{max} = 0,000527$ .



(e) GI – Tensión  $\sigma_{xx}$ ;  $\sigma_{max} = 10$ .



(f) GE – Tensión  $\sigma_{xx}$ ;  $\sigma_{max} = 11,320$ .

Figura 6: Ejemplo de validación.

## AGRADECIMIENTOS

A los autores les gustaría agradecer el financiamiento y el apoyo concedidos por *Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq)*, *Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES)* y *Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG)*.

## REFERENCIAS

- Alves P.D. *Estratégia Global-Local Aplicada ao Método dos Elementos Finitos Generalizados*. Tesis de Maestría, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil, 2012.
- Alves P.D., Barros F.B., y Pitangueira R.L. An object-oriented approach to the generalized finite element method. *Advances in Engineering Software*, 59:1–18, 2013.
- Babuška I., Caloz G., y Osborn J.E. Special finite element methods for a class of second order elliptic problems with rough coefficients. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 31(4):945–981, 1994.
- Barros F.B. *Métodos Sem Malha e Método dos Elementos Finitos Generalizados em Análise Não Linear de Estruturas*. phdthesis, Universidade de São Paulo, 2002.
- Belytschko T. y Black T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 45(5):601–620, 1999.
- Duarte C., Babuška I., y Oden J. Generalized finite element methods for three-dimensional structural mechanics problems. *Computers & Structures*, 77(2):215–232, 2000.
- Duarte C. y Kim D.J. Analysis and applications of the generalized finite element method with global-local enrichment functions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(6-8):487–504, 2008.
- Duarte C.A. y Oden J.T. H-p clouds—an h-p meshless method. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 12(6):673–705, 1996.
- Fries T.P. y Belytschko T. The extended/generalized finite element method: An overview of the method and its applications. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2010.
- Kim D.J., Duarte C.A., y Proenca S.P. A generalized finite element method with global-local enrichment functions for confined plasticity problems. *Computational Mechanics*, 50(5):563–578, 2012.
- Kim J. y Duarte C.A. A new generalized finite element method for two-scale simulations of propagating cohesive fractures in 3-D. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 104(13):1139–1172, 2015.
- Li H. y Duarte C. A two-scale generalized finite element method for parallel simulations of spot welds in large structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 337:28–65, 2018.
- Mal A.K. y Singh S.J. *Deformation of Elastic Solids*. Prentice-Hall, New Jersey, 1991.
- Melenk J. y Babuška I. The partition of unity finite element method: Basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 139(1-4):289–314, 1996.
- Noor A.K. Global-local methodologies and their application to nonlinear analysis. *Finite Elements in Analysis and Design*, páginas 333–346, 1986.
- Plews J.A. y Duarte C.A. A two-scale generalized finite element approach for modeling localized thermoplasticity. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, 2016.