

ANÁLISIS DE UN ELEMENTO DE LÁMINA UTILIZANDO GALERKIN DISCONTINUO

ANALYSIS OF A SHELL ELEMENT USING DISCONTINUOUS GALERKIN

Carlos F. Estrada^a y Fernando G. Flores^a

^a*Departamento de Estructuras, Universidad Nacional de Córdoba, Casilla de Correo 916, Córdoba, Argentina, carlos.estrada@unc.edu.ar - fernando.flores@unc.edu.ar, url<http://www.efn.unc.edu.ar/departamentos/estruct/>*

Palabras clave: Galerkin discontinuo, láminas delgadas, sin rotaciones, grandes deformaciones.

Resumen. En este trabajo se presenta el análisis de un elemento de lámina delgada utilizando una formulación de Galerkin Discontinuo (GD). El tratamiento de la primera y segunda forma fundamental se formula a través de un operador diferencial (derivada GD) expresado en coordenadas convectivas. En contraste con otras formulaciones de GD donde las derivadas se calculan con respecto a un sistema de coordenadas cartesiano, las derivadas GD se formulan a nivel elemental en el espacio paramétrico. Así la formulación utilizada, tiene la ventaja de calcular y guardar información a nivel de los puntos de Gauss facilitando la programación y el ahorro en tiempo de cálculo. Las derivadas GD se aplican al campo de vectores de posición de la superficie media como al campo de directores normales de la lámina, permitiendo tratar geometrías suaves con cambio de material y mallas arbitrarias. En este trabajo se utilizan elementos cuadriláteros cuadráticos con únicamente grados de libertad traslacionales. Para la parte membranosa y flexional se utiliza información proveniente del elemento principal y de los elementos vecinos. Las ecuaciones de movimiento se resuelven en forma implícita y explícita. Se muestran algunos ejemplos numéricos, donde se analizan velocidades de convergencia para distintas densidades de mallas.

Keywords: Discontinuous Galerkin, thin shells, free rotations, large strains.

Abstract. In this work, the analysis of a thin-film element is presented using a discontinuous Galerkin formulation (GD). The treatment of the first and second fundamental form is formulated through of a differential operator (derivative GD) expressed in convective coordinates. In contrast to other formulations of GD where the derivatives are calculated with respect to a Cartesian coordinate system, the derivatives GD are formulated at the elementary level in the parametric space. Thus, the formulation used has the advantage of calculating and saving information at the level of Gauss points facilitating programming and saving in calculation time. The GD derivatives are applied to the field of position vectors of the surface average as to the field of normal film directors, allowing to treat soft geometries with material change and arbitrary meshes. In this work quadratic quadrilateral elements are used with only translational degrees of freedom. For the membrane and flexion part, information coming from of the main element and the neighboring elements. The equations of movement are resolved implicitly and explicitly. Some numerical examples are shown, where speeds of convergence for different densities of meshes.

1. INTRODUCCIÓN

El empleo de estructuras laminares se extiende a un gran número de problemas en ingeniería civil, aeronáutica, mecánica, naval, entre otras. Debido a que estas estructuras delgadas resisten fundamentalmente por su forma, en su diseño o verificación es esencial considerar modelos que representen adecuadamente las características no lineales del comportamiento cinemático y mecánico. En la actualidad, el análisis no lineal de elementos finitos es un componente esencial del diseño. Debido a la necesidad de mejores diseños y análisis estructural, la tecnología de elementos finitos de lámina no ha dejado de producir nuevas formulaciones que intentan dar soluciones a dichos problemas. Así, hoy en día, el objetivo de la tecnología de elementos es la de desarrollar precisamente elementos con mejor prestaciones particularmente para el rango no lineal. Los primeros desarrollos de elementos de lámina se basaron en la teoría de Kirchhoff-Love, sin embargo, pocos elementos fueron aceptados en la práctica ingenieril debido principalmente a las dificultades que acarrea la condición de continuidad C^1 . La idea de desarrollar elementos de lámina delgada basados en la teoría de Kirchhoff-Love, evitando los problemas de continuidad C^1 , dio origen a técnicas numéricas para el análisis de láminas que incluyen únicamente los grados de libertad (GdL) traslacional (denominado rotation-free). Una de las técnicas utilizadas se debe a (Oñate y Cervera, 1993) donde se propuso un procedimiento general combinando conceptos de elementos finito y volúmenes finito para derivar elementos triangulares y cuadriláteros de placa delgada con la deflexión como única variable nodal. Dentro de esta línea se desarrollaron los trabajos de (Oñate y Zárate, 2000) y (Oñate et al., 2002). En la Referencia (Oñate y Flores, 2005) se presenta un amplio rango de aplicaciones lineales y no lineales que muestra el excelente comportamiento membranal y flexional de este tipo de formulaciones.

Cabe destacar que la idea de prescindir de las rotaciones como GdL se ha extendido a otras aproximaciones. Así, las aproximaciones son muy diversas, una muy promisorias y que ha adquirido importancia últimamente es la basada en el concepto de "Isogeometría" ((Cottrell et al., 2006; Hughes et al., 2005; Benson et al., 2010; Kiendl et al., 2010), asociada a funciones usadas en los sistemas de CAD. Uno de los objetivos aquí es utilizar una única definición geométrica (NURBS) a los fines de simplificar los procedimientos de refinamiento. Una segunda aproximación, que comparte algunas ideas con la anterior en lo referido a la interacción con los sistemas de CAD, que no está limitada a problemas lineales y facilita el tratamiento del contacto, es el concepto de "Superficies de Subdivisión" (Cirak y Ortiz, 2000, 2001).

La tercera aproximación, ya no asociada con los sistemas CAD es a través del uso de técnicas de Galerkin Discontinuo (GD). El uso de esta técnica a probado ser una nueva forma de abordar el problema de bloqueo de los elementos de láminas delgadas. Así hay varias formulaciones dentro de la teoría de lámina de Kirchhoff-Love, como los trabajo de (Tien Dung y Wells, 2008; Huang et al., 2010; Noels y Radovitzky, 2008) y la extensión al comportamiento no lineal en (Noels, 2009). En este trabajo se desarrolla un elemento cuadrilátero de nueve nodos utilizando un operador diferencial en coordenadas convectivas. El elemento se denomina QUADG y las derivadas se aplican al campo de vectores de la superficie media como al campo de directores normales de la lámina. La formulación propuesta está inspirada en el trabajo de (Talamini y Radovitzky, 2016a) donde se desarrolla un elemento triangular utilizando la teoría de Reissner-Mindlin. La principal motivación del presente desarrollo es a futuro poder unir mallas de diferentes densidades y grados de interpolación polinómicas. También existe la posibilidad de abordar problemas de propagación de fisuras y fragmentación por cargas impulsivas como muestra el trabajo de (Talamini y Radovitzky, 2016b).

El contenido de este trabajo es el siguiente. En la Sección 2 se presentan los aspectos básicos

de la mecánica del continuo de láminas delgadas. En la Sección 3 se presenta la formulación de GD utilizada. El cálculo de las deformaciones membranales y el cálculo de las curvaturas se presentan en la Sección 4 y 5, respectivamente. En las sección 6 y 7 se dan algunos detalles respecto al cálculo de de fuerzas nodales equivalentes y de la matriz de rigidez tangente. Los resultados numéricos lineales y no lineales se presentan en la Sección 8. Finalmente en la Sección 9 se resumen las conclusiones del presente trabajo.

2. MECÁNICA DEL CONTINUO DE LÁMINAS DELGADAS

2.1. Cinemática de láminas delgadas

Un cuerpo delgado puede ser representado considerando su superficie media y una tercera coordenada, representando el espesor. Así, las posiciones \mathbf{X} y \mathbf{x} de un punto de la lámina \mathcal{A} en las configuraciones indeformada y deformada pueden ser escrita respectivamente a través de los vectores posición

$$\mathbf{X}(\xi^\alpha, \xi^3) = \varphi_o(\xi^\alpha) + \xi^3 \mathbf{t}_o(\xi^\alpha) \quad (1)$$

$$\mathbf{x}(\xi^\alpha, \xi^3) = \varphi(\xi^\alpha) + \xi^3 \mathbf{t}(\xi^\alpha) \quad (2)$$

Donde \mathbf{t} es el vector unitario normal a la superficie media de la lámina y ξ^3 es la distancia entre un punto del cuerpo y la superficie media en la configuración deformada. Como consecuencia de la hipótesis sobre las normales el vector director sobre la superficie es construido a partir de los vectores base de la superficie media como

$$\mathbf{t} = \frac{\partial_1 \varphi \times \partial_2 \varphi}{\| \partial_1 \varphi \times \partial_2 \varphi \|} \quad (3)$$

donde la notación $\partial_\alpha = \partial/\partial \xi^\alpha$ se utiliza para indicar derivada parcial con respecto a las coordenadas paramétricas. Así, la primera y segunda formas fundamentales de la superficie se escriben como

$$a_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \varphi \cdot \partial_\beta \varphi \quad (4)$$

y las curvaturas (segunda forma fundamental) de la superficie media como

$$\kappa_{\alpha\beta} = \partial_\alpha \varphi \cdot \partial_\beta \mathbf{t} \quad (5)$$

2.2. Discretización Galerkin Discontinuo

2.2.1. Interpolación de la superficie media y de la normal

Las expresiones (4) y (5) requieren continuidad tanto del gradiente como de la normal a la superficie media. Así, se discretiza la lámina mediante un conjunto de elementos cuadriláteros finitos T_h . Inicialmente la malla es conforme, sin embargo, cada elemento es una entidad aislada con una aparente continuidad en la superficie media. Esta característica conlleva a diferenciar claramente los bordes internos y externos entre elementos, los cuales definiremos como $\Gamma = \cup_{E \in T_h} \partial E$. Para el caso de los bordes internos utilizaremos el símbolo $\Gamma_I = \Gamma \setminus \partial S$. De forma estándar definimos un elemento maestro $\hat{E} \subseteq \mathbb{R}^2$ y su respectivo mapeo $E = \varphi_h(\hat{E}) \in \mathbf{X}_h$.

De esta forma queda caracterizado cada elemento $E \in T_h$ conformando la superficie media como imagen del elemento maestro antes definido. En el presente trabajo utilizaremos como elemento maestro un elemento cuadrilátero de nueve nudos, esto es polinomios $P_2(\hat{E})$. De esta forma el espacio de funciones GD en el espacio paramétrico \mathbf{X}_h se construye a partir de la colección de espacios de funciones discretas $\mathbf{X}_h = \prod_{E \in T_h} \mathbf{X}_h^E$. En este trabajo las condiciones de borde son impuestas en forma fuerte, por lo tanto las funciones en \mathbf{X}_h deben cumplir con las condiciones esenciales $\varphi = \bar{\varphi}$ y $\mathbf{t} = \bar{\mathbf{t}}$ sobre $\partial_\varphi \mathcal{A}$ y $\partial_t \mathcal{A}$, respectivamente. Se toman funciones de forma de Lagrange estándar. Escribiendo N^A para las funciones base, la interpolación de la superficie media puede escribirse como

$$\varphi(\xi^1, \xi^2) = \sum_{A=1}^{n_x} N^A(\xi^1, \xi^2) \bar{\varphi}_A \quad (6)$$

cuya variación es

$$\delta\varphi(\xi^1, \xi^2) = \sum_{A=1}^{n_x} N^A(\xi^1, \xi^2) \delta\bar{\varphi}_A \quad (7)$$

La interpolación de la normal utiliza las mismas funciones de base de la superficie media, así

$$\mathbf{t}(\xi^1, \xi^2) = \sum_{A=1}^{n_x} N^A(\xi^1, \xi^2) \bar{\mathbf{t}}_A \quad (8)$$

cuya variación es

$$\delta\mathbf{t}(\xi^1, \xi^2) = \sum_{A=1}^{n_x} N^A(\xi^1, \xi^2) \delta\bar{\mathbf{t}}_A \quad (9)$$

donde \mathbf{t}_A son las normales a la superficie media nodales que se calculan como

$$\mathbf{t}_A = \frac{\partial_1 \varphi_h \times \partial_2 \varphi_h}{\| \partial_1 \varphi_h \times \partial_2 \varphi_h \|} \quad (10)$$

2.2.2. Discretización del operador de elevamiento y derivada DG

La derivada DG sobre el campo escalar se aplica sobre el campo vectorial componente a componente, así la derivada DG sobre la superficie media y la normal se escribe como

$$\partial_\alpha^{DG} \varphi_h = \partial_{h\alpha} \varphi_h + r_\alpha(\| \varphi_h \|) \quad (11)$$

$$\partial_\alpha^{DG} t_h = \partial_{h\alpha} t_h + r_\alpha(\| t_h \|) \quad (12)$$

donde $r_\alpha(\| \cdot \|)$ es el operador de elevamiento. Para calcular dicho operador se puede demostrar que la derivada DG tiene el mismo aspecto que las derivadas de las funciones de forma y por lo tanto pueden tratarse de forma similar a estas. Otro aspecto importante es que las derivadas DG se toman con respecto a las coordenadas convectivas lo que permite escribir la formulación en el espacio paramétrico. De esta forma, los cálculos se realizan a nivel de puntos de Gauss

facilitando el tratamiento de la formulación. Así, el operador de elevamiento se calcula una sola vez en el espacio paramétrico maestro en las coordenadas convectivas (ξ^1, ξ^2) facilitando el cálculo de las derivadas DG.

Para $\psi \in \mathbf{X}_h$ el operador de elevamiento en el elemento Formula E se define como

$$\int_{\hat{E}} \mathbf{r}_\alpha(\psi) \cdot \mathbf{z}^\alpha d\mathcal{A} = - \int_{\partial\hat{E}} \psi \cdot \{\mathbf{z}^\alpha\} \mu_\alpha ds, \quad \forall \mathbf{z}^\alpha \in \mathbf{W}_h^E \quad (13)$$

El borde del elemento $\partial\hat{E}$ se puede particionar en cuatro ejes y el operador de elevamiento puede descomponerse en la contribución de cada eje, dando lugar a la definición del operador perimetral de elevamiento $\mathbf{r}_\alpha^e : [L^2(\Gamma_I)]^3 \rightarrow \mathbf{W}_h^E$

$$\int_{\hat{E}} \mathbf{r}_\alpha^e(\psi) \cdot \mathbf{z}^\alpha d\mathcal{A} = - \int_e \psi \cdot \{\mathbf{z}^\alpha\} \mu_\alpha ds, \quad \forall \mathbf{z}^\alpha \in \mathbf{W}_h^E \quad (14)$$

donde $\mathbf{r}_\alpha = \sum_{e \in \Gamma_I} \mathbf{r}_\alpha^e$ Insertando la definición de ψ en la base elegida para X_h y haciendo uso de la linealidad del operador de elevamiento se puede escribir

$$\mathbf{r}_\alpha^e \left(\sum_A N^A \psi_A \right) = \sum_A r_\alpha^e(N^A) \psi_A \quad (15)$$

Dado $[r_\alpha^e]^A = r_\alpha^e(N^A)$ y dado Q^B denotada como las funciones base de \mathbf{W}_h . Luego (14) puede escribirse como

$$\int_{\hat{E}} \left(\sum_B Q^B(\xi) \sum_A [r_\alpha^e]_{\alpha B}^A \psi_A \right) \left(\sum_C Q^C(\xi) \mathbf{z}_C^\alpha \right) d\mathcal{A} = -\frac{1}{2} \int_e \left(\sum_A N^A(\xi) \psi_A \right) \left(\sum_C Q^C(\xi) \mathbf{z}_C^\alpha \right) \mu_\alpha ds \quad \forall \mathbf{z}^\alpha \in \mathbf{W}_h^E \quad (16)$$

Luego

$$\sum_B [r_\alpha^e]_{\alpha B}^A \int_{\hat{E}} Q^B Q^C d\mathcal{A} = -\frac{1}{2} \int_e N^A Q^C \mu_\alpha ds \quad (17)$$

De la expresión (17) se pueden extraer las siguientes componentes

$$[M^{\hat{E}}]^{BC} = \int_{\hat{E}} Q^B Q^C d\mathcal{A} \quad (18)$$

$$[G^e]_\alpha^{AC} = \int_e N^A Q^C \mu_\alpha ds \quad (19)$$

Así el valor nodal del operador perimetral de elevamiento se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones lineales siguiente

$$\sum_B [M^{\hat{E}}]^{BC} [r_\alpha^e]_{\alpha B}^A = -\frac{1}{2} [G^e]_\alpha^{AC} \quad (20)$$

donde $A \in e$ y Formula $\alpha \in \{1, 2\}$. La matriz de masa es simétrica y definida positiva y por lo tanto invertible y su tamaño depende del grado de polinomio adoptado en \mathbf{W}_h^E . Una vez computado los valores nodales a través de (20) el operador perimetral de elevamiento puede ser interpolado sobre cualquier punto del elemento maestro

$$[r^e]_\alpha^A(\xi) = \sum_B Q^B(\xi) [r^e]_{\alpha B}^A \quad (21)$$

Luego, a partir de (21) es posible almacenar información del operador en los puntos de Gauss de manera estándar. Utilizando el procedimiento anterior se puede expresar (11) y (12) como

$$\begin{aligned} \partial_\alpha^{DG} \varphi_h &= \partial_{h\alpha} \varphi_h + r_\alpha (\| \varphi_h \|) \\ &= \sum_{A=1}^{n_x} \partial_\alpha N^A \bar{\varphi}_A \pm \sum_{e \in \partial \hat{E}} \sum_{A=1}^{n_{e_x}} [r^e]_\alpha^A \bar{\varphi}_A \end{aligned} \quad (22)$$

El signo positivo es usado para los GdL sobre el eje del elemento maestro, y el signo negativo, para los GdL sobre el eje del elemento adyacente. Los lados que coinciden con un borde donde se imponen las condiciones esenciales de la lámina no son tenidos en cuenta en la sumatoria. Para el vector normal, aprovechando la información anterior del operador de elevamiento, se procede de forma similar

$$\begin{aligned} \partial_\alpha^{DG} \mathbf{t}_h &= \partial_{h\alpha} \mathbf{t}_h + r_\alpha (\| \mathbf{t}_h \|) \\ &= \sum_{A=1}^{n_x} \partial_\alpha L^A \mathbf{t}_A \pm \sum_{e \in \partial \hat{E}} \sum_{A=1}^{n_{e_x}} [r^e]_\alpha^A \mathbf{t}_A \end{aligned} \quad (23)$$

En la Fig. 1 puede observarse la parcela de elementos cuadriláteros y los GdL involucrados (marcado con el círculo en trazos) para el cálculo de (22) y (23).

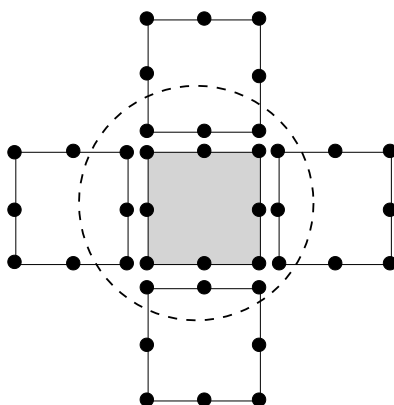


Figura 1: Grados de libertad necesarios para computar la derivada DG en el elemento central.

3. EVALUACIÓN DE LOS ESFUERZOS MEMBRANALES

A partir de la derivada DG es posible calcular la primera forma fundamental (4). Luego, el tensor métrico de la superficie media en la configuración original es

$$a_{\alpha\beta}^0 = \partial_\alpha^{DG} \varphi_h^0 \cdot \partial_\beta^{DG} \varphi_h^0 = \delta_{\alpha\beta} \quad (24)$$

donde $\delta_{\alpha\beta}$ es la delta de Kronecker. Para una configuración deformada el tensor métrico es

$$a_{\alpha\beta} = \partial_\alpha^{DG} \varphi_h \cdot \partial_\beta^{DG} \varphi_h \quad (25)$$

Luego, las deformaciones de Green-Lagrange expresadas en la base convectiva son

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (a_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta}^0) = \frac{1}{2} (a_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}) \quad (26)$$

La variación de las tensiones membranales es

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{A=1}^{n_x} \partial_\alpha N^A \pm \sum_{e \in \partial\hat{E}} \sum_{A=1}^{n_{e_x}} [r^e]_\alpha^A \right) \partial_\beta^{DG} \varphi_h + \right. \\ &\quad \left. \left(\sum_{A=1}^{n_x} \partial_\beta N^A \pm \sum_{e \in \partial\hat{E}} \sum_{A=1}^{n_{e_x}} [r^e]_\beta^A \right) \partial_\alpha^{DG} \varphi_h \right] \cdot \delta\mathbf{u}_i \\ &= \mathbf{B}_m \delta\mathbf{u}_i \end{aligned} \quad (27)$$

A diferencia de los elementos finitos tradicionales de lámina sin GdL rotacional donde la continuidad de la superficie media C^0 de la formulación débil, requiere de la continuidad del gradiente φ entre elementos. En esta formulación la continuidad de la superficie media queda garantizada de manera directa por el flujo numérico a través del operador de elevamiento por eje.

4. EVALUACIÓN DE LAS CURVATURAS

A partir de la derivada DG es posible calcular la primera forma fundamental (5). Luego, la segunda forma fundamental (tensor de curvaturas) de la superficie media puede escribirse como (con $\alpha, \beta = \xi.. \eta$)

$$\kappa_{\alpha\beta} = \partial_\alpha^{DG} \varphi_h \cdot \partial_\beta^{DG} \mathbf{t}_h \quad (28)$$

Los cambios de curvaturas son computados como la diferencia entre la configuración deformada y la de referencia

$$\chi_{\alpha\beta} = \kappa_{\alpha\beta} - \kappa_{\alpha\beta}^0 = \partial_\alpha^{DG} \varphi_h \cdot \partial_\beta^{DG} \mathbf{t}_h - \partial_\alpha^{DG} \varphi_h^0 \cdot \partial_\beta^{DG} \mathbf{t}_h^0 \quad (29)$$

Para el planteo de la forma débil de las ecuaciones de equilibrio se requiere evaluar la variación de las componentes del tensor de curvaturas, esta resulta

$$\begin{aligned} \delta\chi_{\alpha\beta} &= \delta (\partial_\alpha^{DG} \varphi_h \cdot \partial_\beta^{DG} \mathbf{t}_h) \\ &= \partial_\alpha^{DG} \delta\varphi_h \cdot \partial_\beta^{DG} \mathbf{t}_h + \partial_\alpha^{DG} \varphi_h \cdot \partial_\beta^{DG} \delta\mathbf{t}_h \end{aligned} \quad (30)$$

El primer término de (30) se expresa como

$$\partial_\alpha^{DG} \delta\varphi_h \cdot \partial_\beta^{DG} \mathbf{t}_h = \left(\sum_{A=1}^{n_x} \partial_\alpha N^A \partial_\beta^{DG} \mathbf{t}_h \pm \sum_{e \in \partial\hat{E}} \sum_{A=1}^{n_{e_x}} [r^e]_\alpha^A \partial_\beta^{DG} \mathbf{t}_h \right) \cdot \delta\mathbf{u}_i \quad (31)$$

El segundo término requiere más elaboración debido a la variación de la normal. En forma simplificada se puede expresar como

$$\begin{aligned} \partial_\alpha^{DG} \varphi_h \cdot \partial_\beta^{DG} \delta\mathbf{t}_h &= - \sum_{A=1}^{n_x} \sum_{B=1}^{n_x} \partial_\alpha L^A [\partial_1 N^B \mathbf{c}_\beta^{A1} + \partial_2 N^B \mathbf{c}_\beta^{A2}] (\mathbf{t}_A \cdot \delta\mathbf{u}_i) \\ &\mp \sum_{e \in \partial\hat{E}} \sum_{A=1}^{n_x} \sum_{B=1}^{n_x} [r^e]_\alpha^A [\partial_1 N^B \mathbf{c}_\beta^{A1} + \partial_2 N^B \mathbf{c}_\beta^{A2}] (\mathbf{t}_A \cdot \delta\mathbf{u}_i) \\ &= \mathbf{B}_b \delta\mathbf{u}_i \end{aligned} \quad (32)$$

donde

$$c_{\alpha}^{A\beta} = \partial_{\alpha} \tilde{\varphi}_h^A \cdot \partial_{\beta}^{DG} \varphi_h \quad (33)$$

con $\partial_{\alpha} \tilde{\varphi}_h^A$ vectores de la base contravariante definidos como

$$\partial_1 \tilde{\varphi}_h = \partial_2 \varphi_A \times \mathbf{t}_A \quad (34)$$

$$\partial_2 \tilde{\varphi}_h = -\partial_1 \varphi_A \times \mathbf{t}_A \quad (35)$$

A diferencia de los elementos finitos tradicionales de lámina sin GdL rotacional donde la continuidad C^1 de la formulación débil, requiere de la continuidad del gradiente $\varphi_{,\alpha}$ entre elementos. En esta formulación la continuidad queda garantizada a través de la derivada DG.

5. EVALUACIÓN DE LAS FUERZAS RESIDUALES

Las fuerzas nodales equivalentes $\mathbf{r}(\mathbf{u})$ se obtienen de la expresión del trabajo virtual interno sobre el volumen inicial V_o

$$\delta \mathbf{u}^T \mathbf{r}(\mathbf{u}) = \int_{V_o} \frac{1}{2} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV_o \quad (36)$$

la expresión (36) para el caso de teoría de láminas se simplifica a

$$\delta \mathbf{u}^T \mathbf{r}(\mathbf{u}) = \int_{A_o} (\delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{N} + \delta \boldsymbol{\chi}^T \mathbf{M}) dA_o \quad (37)$$

donde \mathbf{S} es el segundo tensor de Piola-Kirchhoff y el tensor derecho de Cauchy-Green \mathbf{C} puede aproximarse para puntos fuera de la superficie media

$$\mathbf{C}(\zeta) = \mathbf{a} + 2\zeta \boldsymbol{\chi} \quad (38)$$

Definiendo los esfuerzos integrados en el espesor en la dirección ζ (con ${}^o h$ el espesor original)

$$\mathbf{N} = \int_{{}^o h} \mathbf{S} d\zeta \quad (39)$$

$$\mathbf{M} = \int_{{}^o h} \mathbf{S} \zeta d\zeta \quad (40)$$

Como en la gran mayoría de los métodos que utilizan GD es necesario introducir términos de estabilización para remover los modos de energía nula o espúrea introducidos por la no conformidad de la formulación. Así, las fuerzas residuales de estabilización a nivel elemental utilizadas en esta formulación se expresan como

$$\delta \mathbf{u}^{eT} \mathbf{r}_m^{Stab} = \pm \int_e \frac{c_m}{h^e} E h \|\boldsymbol{\varphi}\| N^A \bar{j}_o ds \quad (41)$$

$$\delta \mathbf{u}^{eT} \mathbf{r}_b^{Stab} = \pm \int_e \frac{c_b}{h^e} \frac{E h^3}{12} \|\mathbf{t}\| \bar{j}_o ds \quad (42)$$

donde (41) y (42) son las fuerzas de estabilización membranal y flexional, respectivamente. En dichas expresiones h^e está relacionada con el tamaño de la malla, E es el módulo de Young, h el espesor de la lámina, $\|\bullet\|$ es el operador de salto definido como $\|\bullet\| = \bullet^+ - \bullet^-$. Donde c_m y c_b son coeficientes de estabilización definidos por el usuario.

6. MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE

La matriz de rigidez tangente \mathbf{K} se obtiene derivando (37) respecto a los desplazamientos. Como es habitual expresaremos a la matriz \mathbf{K} como la suma de dos partes, material y geométrica. Así,

$$\delta \mathbf{u}^T \partial_u \mathbf{r}(\mathbf{u}) \Delta \mathbf{u} = \int_{A_o} \partial_u (\delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{N} + \delta \boldsymbol{\chi}^T \mathbf{M}) \Delta \mathbf{u} dA_o \quad (43)$$

Se obtienen dos contribuciones de la expresión (43)

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{K} \Delta \mathbf{u} &= \delta \mathbf{u}^T \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{r}^0 \Delta \mathbf{u} \\ &= \delta \mathbf{u}^T (\mathbf{K}_M + \mathbf{K}_G) \Delta \mathbf{u} \end{aligned} \quad (44)$$

Donde la rigidez material se expresa como

$$\delta \mathbf{u}^T \mathbf{K}_M^0 \Delta \mathbf{u} = \int_{A_o} (\delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \partial_u \mathbf{N} + \delta \boldsymbol{\chi}^T \partial_u \mathbf{M}) \Delta \mathbf{u} dA_o \quad (45)$$

Así, la parte material debida a los esfuerzos en los puntos de Gauss del elemento depende de la relación constitutiva, en particular del módulo tangente algorítmico \mathbf{D}_{EP} y en forma estándar se escribe por la integral

$$\mathbf{K}_M^0 = \int \int_{A_o} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_{EP} \mathbf{B} dA_o \quad (46)$$

donde $\mathbf{B} = \mathbf{B}_m + \mathbf{B}_b$. La matriz de rigidez geométrica membranal y flexional se obtiene como

$$\delta \mathbf{u}^T \mathbf{K}_{Gm}^0 \Delta \mathbf{u} = \int_{A_o} (\partial_u (\delta \boldsymbol{\varepsilon}^T) \mathbf{N} + \partial_u (\delta \boldsymbol{\chi}^T) \partial_u \mathbf{M}) \Delta \mathbf{u} dA_o \quad (47)$$

En cuanto a la matriz de rigidez de estabilización, los términos son computados en la interface elemental como

$$\mathbf{K}_{stab}^m = \pm \int_e \frac{c_m}{h^e} E h N^A N^B \bar{j}_o ds \quad (48)$$

$$\mathbf{K}_{stab}^b = \pm \int_e \frac{c_b}{h^e} \frac{E h^3}{12} L^A L^B \bar{j}_o ds \quad (49)$$

7. RESULTADOS NUMÉRICOS

En los siguientes ejemplos numéricos se muestra el comportamiento del elemento *QUADG* para problemas lineales y no lineales. Se comparan en algunos casos con otras formulaciones como ser el elemento *BSQ* de (Flores y Estrada, 2007) y el elemento de (ABAQUS, 2003) *S4R*. Los ejemplos fueron obtenidos a través de un código implícito y explícito de elementos finitos.

7.1. Barra de Cook

Este ejemplo contiene una cantidad importante de energía de corte y también distorsión en el elemento y se incluye para estudiar la respuesta membranal de la formulación propuesta. La Fig. 2a muestra la geometría de la barra empotrada en uno de sus extremos y un esfuerzo de corte distribuido en el extremo libre. En la Fig. 2b se muestra el desplazamiento vertical normalizado del punto *C* (punto medio del extremo libre) en función del número de nodos. Se puede ver que para mallas más finas los resultados convergen al valor esperado. También se observa que el elemento *QUADG* no presenta problemas de bloqueo membranal. Los resultados obtenidos con el elemento bilineal estándar con cuatro puntos de integración se incluye como referencia.

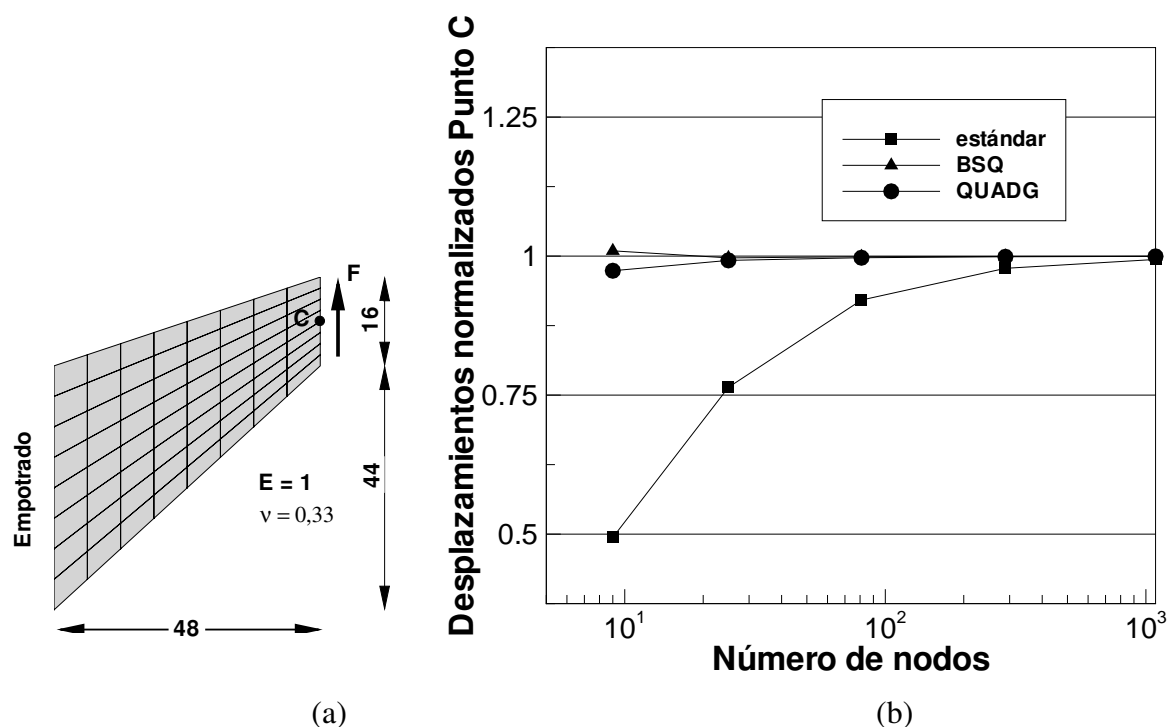


Figura 2: Barra de Cook. a) Geometría y malla de elementos finitos. b) Resultados numéricos.

7.2. Casquete esférico bajo carga puntuales

Este ejemplo es utilizado para evaluar el comportamiento de los elementos de láminas con curvatura inicial ante posibles problemas de bloqueo membranar. La geometría consiste en un casquete esférico de radio $r = 10$ y un espesor $h = 0,04$ con un agujero de 18° en su polo cuyo borde se encuentra libre al igual que su borde inferior. Se modela la geometría completa la cual está sometida a un par de fuerzas, una entrante y la otra saliente $F = 2$. Las propiedades elásticas del material son $E = 6,825 \times 10^7$ y $\nu = 0,3$. En la Fig. 3a se muestra la geometría y una de las mallas utilizadas para el análisis numérico. En la Fig. 3b se muestran los desplazamientos normalizados del punto de aplicación de la carga y se compara con resultados obtenidos con el elemento $S4R$ y BSQ . Nótese que al refinar la malla los valores obtenidos con la formulación propuesta convergen al valor de referencia $\delta = 0,093 \times \frac{F}{2}$

7.3. Cilindro bajo carga puntuales

Este ejemplo es utilizado para estudiar el comportamiento flexional de los elementos de láminas. El cilindro mostrado en la Fig. 4a tiene una longitud $L = 600$, radio $R = 300$ y un espesor $t = 3$, con un módulo de elasticidad $E = 3 \times 10^6$ y un coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$. Se aplican dos fuerzas iguales y opuestas $P = 1$ en el costado del cilindro y se considera los extremos del cilindro como diafragmas rígidos. Los resultados se muestran en la Fig. 4b y se comparan los resultados con el elemento $S4R$. El valor de referencia en los puntos de aplicación de la carga es $1,8248 \times 10^{-5}$. Se observa una respuesta satisfactoria de la formulación propuesta.

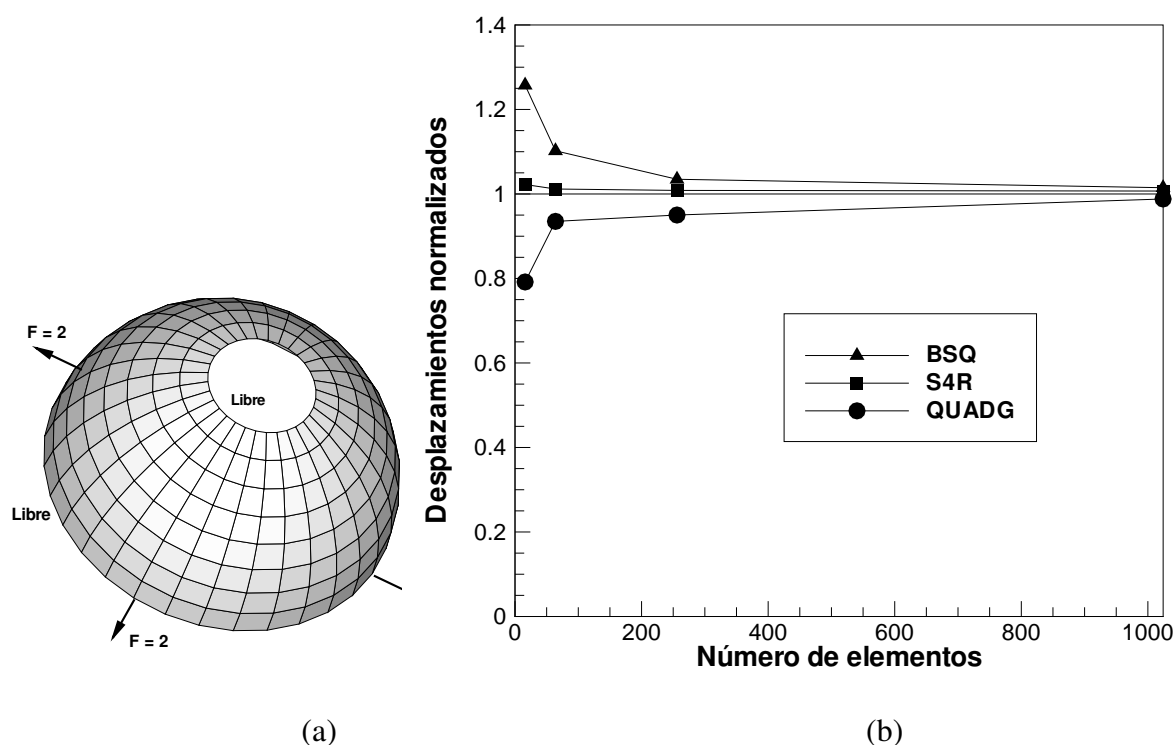


Figura 3: a) Casquete esférico bajo carga puntual. b) Desplazamientos normalizados.

7.4. Panel cilíndrico

En este caso se trata de un panel cilíndrico sometido a una velocidad inicial de $v_o = -5650$ plg/s que simula el efecto de la detonación de un explosivo. Los resultados numéricos están obtenidos con un código explícito de las ecuaciones de movimiento. El material se considera elasto-plástico perfecto en régimen de grande deformaciones. El panel se supone empotrado a lo largo de todos los bordes y no se considera la simetría y se modela el cilindro completo. Se utiliza una malla de 12×16 elementos. En la Fig. 5a puede observarse los datos geométricos. En la Fig. 5b la configuración deformada para la malla correspondiente al tiempo de 1 msec.

En la Fig. 6 se grafica el desplazamiento vertical en función del tiempo para el puntos ubicado sobre el eje de simetría a la distancia de $y = 6,28$ pulgadas. En la figura se han incluido los resultados obtenidos con el *BSQ*. También se compara con resultados experimentales reportados en (Balmer y Witmer, 1964). Existe un buen acuerdo entre los valores obtenidos con el elemento *QUADG* y los datos experimentales. Los resultados numéricos obtenidos con el elemento *BSQ* muestran una mayor discrepancia con los datos experimentales. A la luz de los resultados, la formulación propuesta muestra un comportamiento aceptable para problemas no lineales.

8. CONCLUSIONES

Se ha presentado una formulación de un elemento de lámina delgada cuadrilátero de nueve nodos. La formulación de GD permite tratar geometrías suaves a través de una malla de elementos individuales sin continuidad C^0 entre bordes adyacentes y sin continuidad de los directores normales a la superficie media de la lámina. Si bien no hay continuidad en la posición

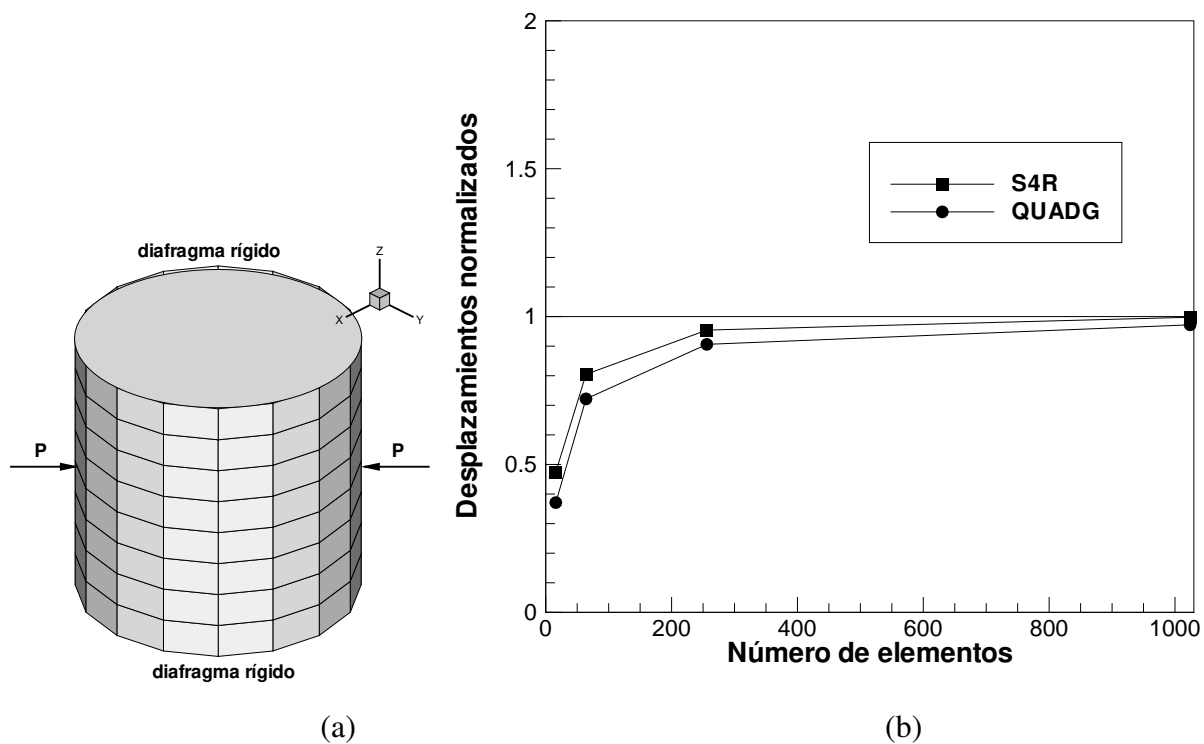


Figura 4: a) Cilindro bajo carga puntual. b) Desplazamientos normalizados.

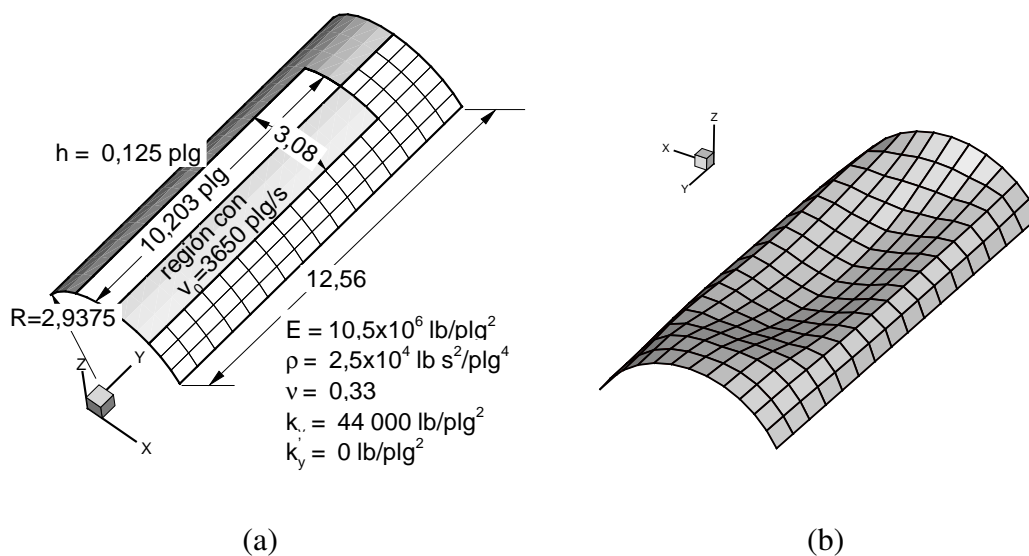


Figura 5: Panel cilíndrico bajo carga impulsiva. a) Geometría. b) Malla deformada.

de la superficie media y los directores normales inicialmente la malla debe ser suave para evitar problemas numéricos. Los resultados muestran que no hay problemas de bloqueo numérico mebranales y flexionales. El operador de derivadas GD puede ser almacenado a nivel de punto de Gauss. Una de las desventajas es el tratamiento de las malla durante el pre-proceso debido a que cada elemento de lámina es individual. También en comparación con otras formulaciones

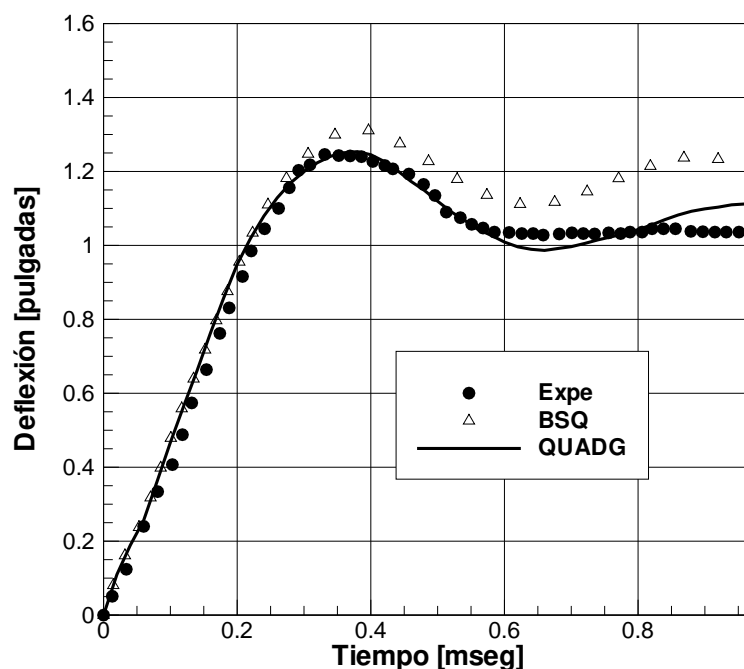


Figura 6: Panel Desplazamiento vertical versus tiempo en el punto central del panel.

el tiempo de cálculo es costoso, sin embargo, las posibles aplicaciones de la formulación son prometedoras y amerita ser considerada. Así, algunos aspectos de futuro trabajo son la unión de mallas de diferentes densidades y grado de interpolación y el tratamiento de problemas de fractura.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo financiero de CONICET (Argentina) y a la Universidad Nacional de Córdoba (a través de SeCyT).

REFERENCIAS

- ABAQUS. *Student Edition, version 6.4.2*. Hibbit, Karlson and Sorensen Inc., Pawtucket, EE.UU., 2003.
- Balmer H. y Witmer E. *Theoretical experimental correlation of large dynamic and permanent deformation of impulsively loaded simple structures*. Air Force flight dynamic Lab. Rep. FDQ-TDR-64-108, 1964.
- Benson D., Bazilevs Y., Hsu M., y Hughes T. Isogeometric shell analysis: The reissner-mindlin shell. 199:276–289, 2010.
- Cirak F. y Ortiz M. Subdivision surfaces: A new paradigm for thin-shell finite element analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47:2039–2072, 2000.
- Cirak F. y Ortiz M. Fully c1-conforming subdivision elements for finite deformations thin-shell analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 51:816–833, 2001.
- Cottrell J., Reali A., Bazilevs Y., y T.J.R. H. Isogeometric analysis of structural vibrations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 195:5257–5296, 2006.
- Flores F. y Estrada C. A rotation-free thin shell quadrilateral. página in press, 2007.

- Huang J., Huang X., y Han W. A new co discontinuous galerkin method for kirchhoff plates. 199:1446–1454, 2010.
- Hughes T., Cottrell J., y Bazilevs Y. Isogeometric analysis: Cad, finite elements, nurbs, exact geometry and mesh refinement. 194:4135–4195, 2005.
- Kiendl J., Bletzinger K., Linhard J., y Wüchner R. Isogeometric shell analysis with kirchhoff-love elements. 198:3902–3914, 2010.
- Noels L. A discontinuous galerkin formulation of non-linear kirchhoff-love shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 78:296–323, 2009.
- Noels L. y Radovitzky R. A new discontinuous galerkin method for kirchhoff-love shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 197:2901–2929, 2008.
- Oñate E., Cendoya P., y Miquel J. Nonlinear explicit dynamic analysis of shells using the bst rotation-free triangle. 19:662–706, 2002.
- Oñate E. y Cervera M. Derivation of thin plate bending elements with one degree of freedom per node. páginas 553–561, 1993.
- Oñate E. y Flores F. Advances in the formulation of the rotation-free basic shell triangle. 194:2406–2443, 2005.
- Oñate E. y Zárate F. Rotation-free plate and shell triangles. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47:557–603, 2000.
- Talamini B. y Radovitzky R. A discontinuous galerkin method for nonlinear shear-flexible shells. 303:128–162, 2016a.
- Talamini B. y Radovitzky R. A parallel discontinuous galerkin/cohesive-zone computational framework for teh simulation of fracture in shear-flexible shells. 317:480–506, 2016b.
- Tien Dung N. y Wells G. Geometrically nonlinear formulation for thin shells without rotation degrees of freedom. 197:2778–2788, 2008.