

## PROBLEMAS DE INTERACCIÓN FLUIDO ESTRUCTURA EN GRANDES DESPLAZAMIENTOS

### FLUID-STRUCTURE INTERACTION PROBLEMS WITH LARGE DISPLACEMENTS

Nicolás Biocca<sup>a,c</sup>, Gonzalo D. Ares<sup>a,c</sup>, Daniel E. Caballero<sup>a,c</sup>, Juan M. Gimenez<sup>a,c</sup>, Gustavo E. Carr<sup>a,c</sup>, Alejandro Vaccari<sup>b</sup> y Santiago A. Urquiza<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup>Grupo de Ingeniería Asistida por Computador (GIAC), Universidad Nacional de Mar del Plata, J.B. Justo 4302, 7600, Buenos Aires, Argentina, [santiago.urquiza@fi.mdp.edu.ar](mailto:santiago.urquiza@fi.mdp.edu.ar), <http://www.fi.mdp.edu.ar/>

<sup>b</sup>Grupo HidroSim, Universidad Tecnológica Nacional, U. A. Mar del Plata, Buque Pesquero Dorrego N° 281, Mar del Plata, Argentina, [hidrodinamica@mdp.utn.edu.ar](mailto:hidrodinamica@mdp.utn.edu.ar)

<sup>c</sup>Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)

**Palabras clave:** formulación Arbitrariamente Lagrangiana-Euleriana, interacción fluido estructura, hemodinámica.

**Resumen.** Los problemas de acoplamiento fluido estructura surgen en variados campos de la ingeniería, como la interacción de válvulas cardíacas con el torrente sanguíneo y la del casco de buques con el flujo a su alrededor. Ambos tienen en común la ocurrencia de grandes desplazamientos de la componente sólida que conlleva a grandes deformaciones en el dominio de fluido circundante. En este contexto, para el tratamiento de las ecuaciones de Navier-Stokes es ampliamente utilizada una formulación Arbitrariamente Lagrangeana-Euleriana (ALE). De esta manera, se derivan algoritmos discretos que requieren metodologías de movimiento de mallas con capacidad de afrontar grandes deformaciones, manteniendo la máxima calidad de los elementos y minimizando el remallado. En este trabajo se plantean distintas alternativas de la dinámica del mapeo ALE para problemas típicos en el contexto antes mencionado, desde esquemas clásicos a aquellos más sofisticados. Finalmente se resuelve un problema orientado a la hemodinámica que muestra el desempeño de las diferentes variantes analizadas.

**Keywords:** Arbitrary Lagrangian-Eulerian formulation, Fluid-structure interaction, hemodynamics.

**Abstract.** The fluid-structure interaction (FSI) problems arise naturally in a wide variety of engineering problems, like the interaction between cardiac valves with the bloodstream and the ship hull with the surrounding flow. Both cases share large displacements in the structure involving large strains over the close around flow domain. In this context, the Arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE) Method is widely used to solve the Navier-Stokes equations in deformable regions. Thus, discrete algorithms are derived which require advanced mesh moving techniques in order to deal with large displacements. In this work various ALE mappings are evaluated, from classic schemes to more sophisticated ones. The alternatives analyzed are compared with reference cases taken from literature. Finally, a problem oriented to hemodynamics is solved showing the performance of the different studied alternatives.

## 1. INTRODUCCIÓN

En la resolución de problemas de flujo con interfases en movimiento, incluidas aquellas entre dos fluidos, dependiendo de la complejidad de la interfase y otros aspectos del problema, es posible tanto la utilización de técnicas de “seguimiento” (*interface-tracking*) como de “captura” (*interface-capturing*) de interfases (Tezduyar, 2001). En los métodos de tipo *interface-tracking*, a medida que la interfase se mueve, el dominio espacial ocupado por el fluido cambia su forma, la malla se mueve adaptándose para lograr el seguimiento de la interfase. En el caso de interfases fluido-estructura, el seguimiento de las mismas permite tener control sobre la calidad de malla en dichas zonas, obteniendo con precisión las fuerzas hidrodinámicas, que conforman una componente crítica en el problema de acoplamiento fluido-estructura (FSI). A veces la complejidad geométrica de la interfase evoluciona de tal manera que métodos de movimiento de malla convencionales podrían quedar fuera de alcance para resolver el problema, requiriendo una frecuencia de remallado considerable, lo que favorece el uso de métodos con captura de interfases. Este enfoque puede entenderse como un caso especial de técnicas de representación de interfases, donde el lugar geométrico de la interfase queda determinado por el valor de una cierta función indicatriz continua definida sobre una malla de fluido fija. Sin embargo, como menciona Tezduyar (2003), una consecuencia de estas técnicas de captura, independientemente de la precisión geométrica con la que la interfase es representada, es que la resolución de la capa límite estará limitada por el tamaño de la malla de fluido en donde se encuentre la interfase. Por esta razón, siempre que sea posible la utilización de métodos con movimiento de malla a un costo razonable de remallado, la precisión en las cercanías a la interfase será superior que en métodos de malla fija (Tezduyar et al., 2008).

Los métodos con movimiento de malla consisten en dos componentes: el movimiento de la malla tanto como sea posible y el remallado completo o parcial (es decir generar un nuevo conjunto de elementos y a veces también de nodos) donde la distorsión de los elementos sea muy elevada. El principal objetivo de estos métodos es mantener la calidad de los elementos en la vecindad de la interfase fluido-estructura y minimizar la frecuencia de remallado.

Al tratar con interfases del tipo FSI, es usual el empleo de elementos del tipo capa límite, para capturar con precisión las fuerzas hidrodinámicas. En los trabajos de Tezduyar et al. (1992, 1993); Johnson y Tezduyar (1994), esta capa de elementos se movía junto al sólido, llevando a cabo un movimiento rígido. De este manera no se resolvían ecuaciones de elasticidad para dicho conjunto. Como es obvio, en problemas de flujos con interfases fluido-estructura con sólidos deformables, el movimiento de la malla de fluido sobre la interfase no puede seguir las ecuaciones de cuerpo rígido.

En Tezduyar (2001) se introduce la técnica denominada *Solid-Extension Mesh Moving Technique* (SEMMT), la cual trata a los elementos del tipo capa límite como una extensión del sólido, donde al resolver las ecuaciones de elasticidad sobre la malla de fluido, se le otorga una rigidez elástica aumentada en la vecindad de la interfase en términos comparativos al resto del dominio. Es así que en esta técnica se proponen dos alternativas de rigidización selectiva: resolver las ecuaciones de elasticidad del dominio que conforman la capa límite en forma separada al resto o; resolver en forma monolítica como una única matriz pseudoelástica con valores diferenciales para ambas zonas. Si los subdominios de fluido se resuelven en forma separada, se asumen condiciones de tracción nula en la frontera entre ambos. A esta opción se la refiere como *SEMMT - Multiple Domain* (SEMMT-MD) y a la solución con subdominios unificados *SEMMT - Single Domain* (SEMMT-SD). En Stein y Tezduyar (2002) se comparan las propias variantes del SEMMT junto a *Jacobian-based stiffening* (Tezduyar, 1992) sobre un conjunto de

casos de prueba 2D para distintos modos de deformación.

En este trabajo, se comparan diferentes alternativas de implementación de las técnicas de *interface-tracking* para el seguimiento de interfases en problemas de acoplamiento FSI considerando grandes desplazamientos en el dominio de referencia. Dicho problema se encuentra descrito en la Sección 2. En la Sección 3 se presenta un conjunto de alternativas al mapeo ALE. Estas alternativas se evalúan en la Sección 4 por medio de casos de prueba extraídos de la literatura, donde la eficiencia de los distintos métodos se miden por medio de parámetros de calidad de malla. En dicha sección, se introduce un nuevo parámetro de calidad de malla para medir la efectividad de las diferentes técnicas, así como también se desagrega el conjunto sobre el cual se mide. Adicionalmente, en el Sección 4.2.1 se introduce una variante de rigidización selectiva de la matriz pseudoelástica antes mencionada. Finalmente en la Sección 5 se resuelve un problema de aplicación con interés en el campo de la hemodinámica, inspirado en la dinámica FSI en válvulas cardíacas.

## 2. PROBLEMA MECÁNICO

En primera instancia describiremos en forma general el sistema fluido-estructura con grandes desplazamientos. Consideremos un sistema mecánico determinado por el dominio  $\Omega(t) := \Omega_t$ . El mismo consiste en un estructura deformable  $\Omega_t^s$ , la cual puede estar inmersa en el seno del fluido  $\Omega_t^f$  y/o puede rodear al mismo, sin pérdida de generalidad alguna (véase la Fig.1 ). El problema consiste en determinar la evolución temporal de la configuración  $\Omega_t$ , así como el campo de velocidades y el estado tensional dentro del fluido y la estructura.

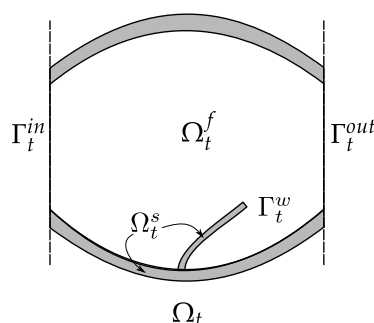


Figura 1: Configuración geométrica del problema fluido-estructura.

La evolución del dominio  $\Omega_t$  puede ser descripta por un mapeo  $\mathcal{M}_t : \Omega_0 \rightarrow \Omega_t$ , siendo  $\Omega_0 = \Omega_0^f \cup \Omega_0^s$  una configuración conocida, las cuales cumplen  $\Omega_0^f \cap \Omega_0^s = \emptyset$ . A su vez, el mapeo  $\mathcal{M}_t$  puede desdoblarse en los correspondientes al fluido y sólido:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_t : \Omega_0^f &\xrightarrow{\psi} \Omega_t^f, \boldsymbol{\chi} \rightarrow \boldsymbol{x} = \psi(\boldsymbol{\chi}, t) \equiv \mathcal{A}_t(\boldsymbol{\chi}), \boldsymbol{\chi} \in \Omega_0^f, \boldsymbol{x} \in \Omega_t^f \\ \mathcal{L}_t : \Omega_0^s &\xrightarrow{\phi} \Omega_t^s, \boldsymbol{X} \rightarrow \boldsymbol{x} = \phi(\boldsymbol{X}, t) \equiv \mathcal{L}_t(\boldsymbol{X}), \boldsymbol{X} \in \Omega_0^s, \boldsymbol{x} \in \Omega_t^s \end{aligned} \quad (1)$$

Además, se asume como condición adicional la adherencia del fluido a la pared sólida sobre la interfase  $\Gamma_w$

$$\psi(\boldsymbol{Y}, t) = \phi(\boldsymbol{Y}, t), \quad \forall \boldsymbol{Y} \in \Gamma_0^w \quad (2)$$

como consecuencia surge la continuidad entre campo de desplazamiento del sólido y el dominio referencial ALE del fluido sobre la interfase fluido-estructura  $\Gamma_t^w$ . Notar que el mapeo  $\mathcal{A}_t$  es un mapeo del tipo ALE sobre el dominio referencial de fluido y  $\mathcal{L}_t$  un mapeo lagrangeano del sólido (véase la Fig. 2).

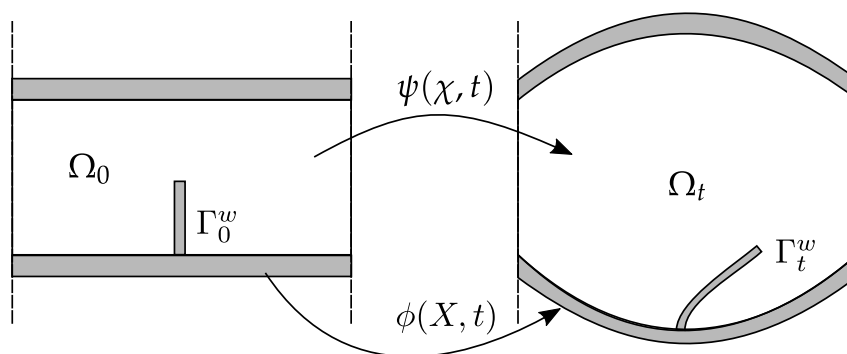


Figura 2: Mapeo entre el dominio de referencia y el actual.

Cabe mencionar que el mapeo  $\mathcal{A}_t$  es arbitrario, cuya única restricción es la ecuación 2. Dicha arbitrariedad abre un abanico de posibilidades sobre la elección de la misma, el cual será mencionado en la Sección 3. Por último, notar que el campo de velocidades del marco referencial ALE se caracteriza según:

$$\mathbf{v}_R(\mathbf{x}, t) = \left. \frac{\partial \psi(\boldsymbol{\chi}, t)}{\partial t} \right|_{\boldsymbol{\chi}} \circ \psi^{-1}(\mathbf{x}, t) \quad (3)$$

Consideraremos al fluido como Newtoniano e incomprensible, con densidad  $\rho$  y viscosidad dinámica  $\mu$ . Su comportamiento es descrito por su velocidad  $\mathbf{v}_f$  y su presión  $p$ . La relación constitutiva para el mismo es:

$$\boldsymbol{\sigma}_{(\mathbf{v}_f, p)} = -p\mathbf{I} + 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_f) \quad (4)$$

siendo  $\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot)$  el operador gradiente simétrico. Más detalles son dados en la Sección 2.1.

Por el lado del sólido, consideraremos al mismo como constituido de un material hiperelástico, sujeto a grandes desplazamientos y deformaciones. Su comportamiento quedará descrito por los desplazamientos  $\mathbf{u}_s$  y las velocidades  $\mathbf{v}_s$  derivadas del mismo. Además se supondrá a la configuración  $\Omega_0^s$  libre de cargas (véase la Sección 2.2).

## 2.1. Formulación variacional correspondiente al equilibrio del fluido

Hallar  $(\mathbf{v}_f, p) \in \text{Kin}_t^f$  tal que,

$$\left\langle \mathcal{R}_{\Omega_t^f}^f(\mathbf{v}_f, p), (\hat{\mathbf{v}}_f, \hat{q}) \right\rangle_{\Omega_t^f} = 0 \quad \forall (\hat{\mathbf{v}}_f, \hat{q}) \in \text{Var}_t^f \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_t^f} \rho \left. \frac{\partial \mathbf{v}_f}{\partial t} \right|_{\boldsymbol{\chi}} \cdot \hat{\mathbf{v}}_f dV_t + \int_{\Omega_t^f} \rho \nabla \mathbf{v}_f (\mathbf{v}_f - \mathbf{v}_R) \cdot \hat{\mathbf{v}}_f dV_t + \int_{\Omega_t^f} \boldsymbol{\sigma}_{(\mathbf{v}_f, p)} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{v}}_f) dV_t \\ & - \int_{\Omega_t^f} \rho \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{v}}_f dV_t + \int_{\partial \Gamma_t^{in+out}} \mathbf{t} \cdot \hat{\mathbf{v}}_f dS_t - \int_{\Omega_t^f} \hat{q} \text{div}(\mathbf{v}_f) dV_t = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

$$\forall (\hat{\mathbf{v}}_f, \hat{q}) \in \text{Var}_t^f$$

Como consecuencia de la adherencia del fluido con el sólido en  $\Gamma_t^w$  (véase la Ec. 2), la formulación de fluido (véase la Ec. 6) debe cumplir la condición  $\mathbf{v}_f = \mathbf{v}_R$  en  $\Gamma_t^w$ , definida en 3.

El espacio de las soluciones cinemáticamente admisible  $\text{Kin}_t^f$  y su correspondiente de variaciones  $\text{Var}_t^f$

$$\begin{aligned}\text{Kin}_t^f &= \left\{ \mathbf{v}_f \in \mathbf{H}^1(\Omega_t^f), \mathbf{v}_f = \mathbf{v}_R \text{ en } \Gamma_t^w \right\} \times \left\{ p \in L^2(\Omega_t^f) \right\} \\ \text{Var}_t^f &= \left\{ \hat{\mathbf{v}}_f \in \mathbf{H}^1(\Omega_t^f), \hat{\mathbf{v}}_f = \mathbf{0} \text{ en } \Gamma_t^w \right\} \times \left\{ \hat{q} \in L^2(\Omega_t^f) \right\}\end{aligned}\quad (7)$$

## 2.2. Formulación variacional correspondiente al equilibrio del sólido

Hallar  $\mathbf{u}_s \in \text{Kin}_t^s$  tal que,

$$\left\langle \mathcal{R}_{\Omega_t^s}^s(\mathbf{u}_s), (\hat{\mathbf{u}}_s) \right\rangle_{\Omega_t^s} = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{u}}_s \in \text{Var}_t^s \quad (8)$$

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_t^s} \rho \dot{\mathbf{v}}_s \cdot \hat{\mathbf{u}}_s dV_t + \int_{\Omega_t^s} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_s) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{u}}_s) dV_t + \int_{\partial\Gamma_t^w} \mathbf{t} \cdot \hat{\mathbf{u}}_s d\Gamma_t^w - \int_{\Omega_t^s} \rho \mathbf{g} \cdot \hat{\mathbf{u}}_s dV_t = 0 \\ \forall \hat{\mathbf{u}}_s \in \text{Var}_t^s\end{aligned}\quad (9)$$

Notar que  $\dot{\mathbf{v}}_s = \ddot{\mathbf{u}}_s = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \Big|_{\mathbf{X}}$

$$\begin{aligned}\text{Kin}_t^s &= \left\{ \mathbf{u}_s \in \mathbf{H}^1(\Omega_t^s) \right\} \\ \text{Var}_t^s &= \left\{ \hat{\mathbf{u}}_s \in \mathbf{H}^1(\Omega_t^s), \hat{\mathbf{u}}_s = 0 \text{ en } \Gamma_d \right\}\end{aligned}\quad (10)$$

## 2.3. Formulación variacional del movimiento de la malla

Hallar  $\mathbf{d}_f \in \text{Kin}_0^m$  tal que,

$$\left\langle \mathcal{R}_{\Omega_0^f}^m(\mathbf{d}_f), (\hat{\mathbf{d}}_f) \right\rangle_{\Omega_0^f} = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{d}}_f \in \text{Var}_0^m \quad (11)$$

$$\int_{\Omega_0^f} (\mathbf{d}_f - \text{Ext}(\mathbf{u}_s|_{\Gamma_0^w})) \cdot \hat{\mathbf{d}}_f dV_0 = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{d}}_f \in \text{Var}_0^m \quad (12)$$

donde los espacios  $\text{Kin}_0^m$  y  $\text{Var}_0^m$  se definen según:

$$\begin{aligned}\text{Kin}_0^m &= \left\{ \mathbf{d}_f \in \mathbf{H}^1(\Omega_0^f) \right\} \\ \text{Var}_0^m &= \left\{ \hat{\mathbf{d}}_f \in \mathbf{H}^1(\Omega_0^f), \hat{\mathbf{d}}_f = 0 \text{ en } \Gamma_0^w, \hat{\mathbf{d}}_f \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ en } \partial\Omega_0^f/\Gamma_0^w \right\}\end{aligned}\quad (13)$$

Siendo  $\text{Ext}(\mathbf{u}_s|_{\Gamma_0^w})$  una extensión arbitraria que cumple con la restricción impuesta en la ecuación 2. De este modo el dominio se mapea según:

$$\mathbf{x}_f = \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\chi}, t) = \boldsymbol{\chi} + \mathbf{d}_f(\boldsymbol{\chi}, t) \quad (14)$$

## 2.4. Acoplamiento fluido-estructura

El problema de acoplamiento fluido-estructura consiste en hallar  $(\mathbf{v}_f, p, \mathbf{u}_s) \in \text{Kin}_t = \text{Kin}_t^f \times \text{Kin}_t^s$  tales que las ecuaciones 5 y 8 sean satisfechas de manera simultánea:

$$\begin{aligned}\left\langle \mathcal{R}_{\Omega_t^f}^f(\mathbf{v}_s, p), (\hat{\mathbf{v}}_f, \hat{q}) \right\rangle_{\Omega_t^f} = 0 \quad \forall (\hat{\mathbf{v}}_f, \hat{q}) \in \text{Var}_t^f \\ \left\langle \mathcal{R}_{\Omega_t^s}^s(\mathbf{u}_s), (\hat{\mathbf{u}}_s) \right\rangle_{\Omega_t^s} = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{u}}_s \in \text{Var}_t^s\end{aligned}\quad (15)$$

Hasta aquí la única restricción impuesta en la configuración  $\Omega_t^f$  es que comparta la frontera  $\Gamma_t^w$  con  $\Omega_t^s$  por medio de la ecuación 2. Notar que la velocidad del marco referencial  $\mathbf{v}_R$  es consecuencia de la dinámica del mapeo ALE adoptada (véase la Ec. 3) y acopla con el problema de fluido 6 por medio de la velocidad del marco referencial  $\mathbf{v}_R$ . En un esquema segregado, donde cada componente se resuelve por iteraciones de subdominios, como parte de la solución al problema de fluido se encuentran las fuerzas hidrodinámicas sobre la frontera  $\Gamma_{t,k}^w$  (se entiende por subíndice  $k$  como iteración no lineal), las mismas se introducen en el problema de sólido 9 como condición de Neumann. Finalmente la solución del problema de sólido ingresa en forma de condición de Dirichlet sobre la nueva configuración de la frontera  $\Gamma_{t,k+1}^w$  en el problema de movimiento de la malla. El esquema iterativo por bloques anterior se describe de acuerdo con el algoritmo 1.

---

**Algoritmo 1** acoplamiento fluido-estructura: esquema iterativo por bloques

---

```

( $\mathbf{v}_f^n, p^n, \mathbf{u}_s^n$ )
for  $k = 1, \dots$  do
  resuelve problema 6 linealizado           ▷ problema tangente de fluido
  resuelve problema 9 linealizado           ▷ problema tangente de sólido
   $\mathbf{u}_{s,k+1}^n = \mathbf{u}_{s,k}^n + \omega (\tilde{\mathbf{u}}_{s,k+1}^n - \mathbf{u}_{s,k}^n)$            ▷ relajación del sólido
  resuelve problema 12                       ▷ mapeo ALE
  chequea convergencia
end for

```

---

### 3. DINÁMICA DEL MAPEO ALE

Dado que la dinámica del mapeo ALE es arbitraria, se pueden plantear distintos esquemas para el mismo. Aunque podría estar dado en forma de un mapeo explícito, en general es una práctica conveniente derivarlo como la solución de un problema variacional, el cual puede carecer o no de sentido físico. Una variante usual al problema 12, es tomar como configuración de referencia la última configuración conocida ( $\Omega_{t_n}^f$ ) al paso de tiempo  $n$ , o incluso sobre configuraciones no convergidas ( $\Omega_{t_n,k}^f$ ).

#### 3.1. Difusión armónica

Hallar  $\mathbf{d}_f \in \text{Kin}_0$  tal que:

$$\int_{\Omega_0^f} \kappa \nabla \hat{\mathbf{d}}_f \cdot \nabla \mathbf{d}_f dV_0 = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{d}}_f \in \text{Var}_0 \quad (16)$$

siendo  $\kappa$  el coeficiente de “difusión”. Sujeto a las condiciones impuestas en 13.

#### 3.2. Ecuaciones de elasticidad Lineal

Hallar  $\mathbf{d}_f \in \text{Kin}_0$  tal que:

$$\int_{\Omega_0^f} 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{d}}_f) \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{d}_f) dV_0 + \int_{\Omega_0^f} \hat{\mathbf{d}}_f \cdot \mathbf{f} dV_0 = \int_{\Gamma_{0,N}^f} \hat{\mathbf{d}}_f \cdot \mathbf{t} dS_0 \quad \forall \hat{\mathbf{d}}_f \in \text{Var}_0 \quad (17)$$

siendo  $\boldsymbol{\sigma}$  el tensor de tensiones de Cauchy,  $\mathbf{f}$  las fuerzas de volumen externas,  $\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot)$  el operador gradiente simétrico. Para el caso de elasticidad lineal,  $\boldsymbol{\sigma}$  se define como:

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{d}_f) + \lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{d}_f)) \mathbf{I} \quad (18)$$

Las condiciones de borde pueden inferirse de la definición de los espacios cinemáticamente y variacionalmente admisibles (véase la Ec. 13). Para nuestro problema en particular, la frontera queda definida en su totalidad por condiciones de Dirichlet y las fuerzas por unidad de volumen  $\mathbf{f}$  son consideradas nulas, así es posible reescribir la ecuación 17 del siguiente modo:

$$\int_{\Omega_0^f} 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{d}}_f) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{d}_f) dV_0 + \int_{\Omega_0^f} \lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\mathbf{d}}_f)) \operatorname{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{d}_f)) dV_0 = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{d}}_f \in \operatorname{Var}_0 \quad (19)$$

Varios métodos se encuentran motivados en ecuaciones de elasticidad lineal, para darle un sentido físico a la dinámica del movimiento de la malla, como si se tratase de una matriz elástica. Tradicionalmente se ajustaba el ratio  $\lambda/\mu$ , mediante el cual se ajusta el nivel de compresibilidad de la matriz. Una mejora en esta dirección se encuentra en la técnica de endurecimiento por jacobiano (*Jacobian-Based Stiffening*) (Tezduyar et al., 1992), donde los elementos son rigidizados en forma selectiva por medio de del factor  $(J_0/J^e)$ , donde  $J^e$  es el jacobiano de la transformación entre el elemento físico y el master, y  $J_0$  un parámetro de escala arbitrario. Esta metodología fue extendida por Stein et al. (2003), en la misma adiciona una potencia de endurecimiento  $\chi$  la cual determina el grado rigidización selectiva. Es así que para valores de  $\chi = 0$  se reduce a los modelos de elasticidad sin endurecimiento selectivo, si  $\chi = 1$  se retoma la técnica *Jacobian-Based Stiffening* tradicional. Como ya fue mencionado, la metodología SEMMT es presentada con dos variantes, SEMMT-MD y SEMMT-SD. En la primera opción se resuelven las ecuaciones de elasticidad para el dominio conectado al sólido en forma de elementos tipo capa límite, los cuales se encuentran embebidos en el resto del dominio, conectados por medio de la superficie  $\Gamma_t^{MD}$ . Como condiciones de contorno en el dominio interior se imponen los desplazamientos de la estructura en  $\Gamma_t^w$  y tracción nula en  $\Gamma_t^{MD}$ . Luego se resuelven el dominio exterior imponiendo los desplazamientos de la solución al problema anterior en  $\Gamma_t^{MD}$ . En la segunda opción, se resuelven la ecuaciones de elasticidad de manera simultanea sobre ambos subdominios, pero rigidizando el dominio interior respecto el exterior, por medio de la potencia de endurecimiento  $\chi$ . Normalmente se utilizan valores de  $\chi = 2$  para el dominio que contiene la interfase  $\Gamma_t^w$ , mientras que para el resto un valor de  $\chi = 1$ .

En la siguiente sección se introducen los casos de prueba, en ellos no se resuelve el problema FSI completo sino sólo el mapeo ALE. Ello se encuentra motivado en estudiar con detalle la dinámica del mapeo ALE para los distintos esquemas planteados y la compresión de los parámetros involucrados, sin el costo computacional que implica el acoplamiento por FSI.

#### 4. CASOS DE PRUEBA

Los casos evaluados están inspirados en el trabajo de Stein y Tezduyar (2002), consisten de diferentes pruebas sobre una malla 2d no estructurada, conformada de elementos triangulares con una estructura embebida de espesor nulo ( $\Gamma^w$ ). La malla se encuentra en el dominio  $x, y \in [-1, 1] \times [-1, 1]$  (véase la Fig. 3). La interfase interna al dominio de fluido  $\Gamma^{MD}$ , representa la superficie en común entre los subdominios definidos por el método SEMMT. Además, sobre la superficie  $\Gamma_D$  se restringen los desplazamientos en la dirección normal, esto es  $(\mathbf{d}_f \cdot \mathbf{n})|_{\Gamma} = 0$ .

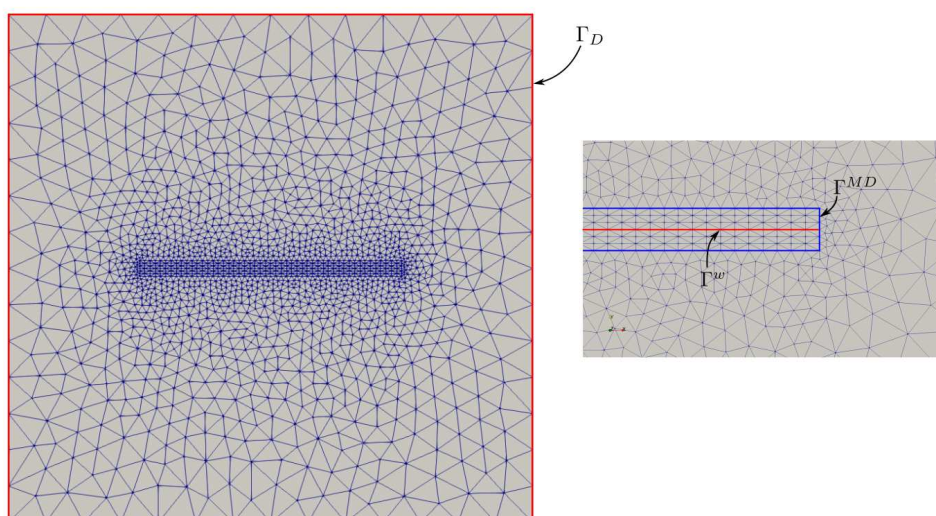


Figura 3: Malla de prueba. En la misma se indican las fronteras  $\Gamma^w$ ,  $\Gamma^{MD}$  y  $\Gamma_D$ .

#### 4.1. Condiciones generales y medidas de calidad de malla

Se ponen a prueba las técnicas mencionadas con dos movimientos prescritos para la estructura: 1) una traslación de cuerpo rígido según la dirección  $y$ ; 2) una rotación de cuerpo de rígido respecto del origen, de acuerdo con el trabajo de [Stein y Tezduyar \(2002\)](#). Para el caso 1) el desplazamiento máximo impuesto es de  $y = 0,75$  en incrementos de  $\Delta y = 0,005$ . En el caso 2) se impone un giro máximo de  $\theta = \pi/2$  en 100 incrementos iguales.

A modo de evaluación y comparación de las distintas técnicas de movimiento de malla, se usan distintos parámetros de calidad de malla. En primer lugar, los definidos por [Johnson y Tezduyar \(1996\)](#), utilizados en [Stein y Tezduyar \(2002\)](#), los cuales son una medida del cambio en el área del elemento ( $f_A^e$ ) y forma del mismo ( $f_{AR}^e$ ):

$$f_A^e = \left| \log \left( \frac{A^e}{A_0^e} \right) / \log(2,0) \right| \quad f_{AR}^e = \left| \log \left( \frac{AR^e}{AR_0^e} \right) / \log(2,0) \right| \quad (20)$$

el subíndice “0” hace referencia a la malla no deformada (inicial) y  $AR^e$  es la relación de aspecto del elemento definida como  $AR^e = (l_{max}^e)^2 / A^e$ , siendo  $l_{max}^e$  la arista de mayor longitud del elemento  $e$ .

Por otro lado, se adiciona otro parámetro de control de calidad de malla, responsable de medir la falta de simetría de los elementos (*Skewness*)

$$Skw = \frac{\text{tamaño de elemento óptimo} - \text{tamaño de elemento}}{\text{tamaño de elemento óptimo}} \quad (21)$$

donde el tamaño de elemento óptimo se define como aquel tamaño de un elemento equilátero de tipo simplex de mismo circunradio. Entendiendo por tamaño de elemento de un simplex como el área para el caso 2D o el volumen para 3D. La ventaja de medir distorsión de malla con respecto al parámetro  $Skw$  es que el mismo se encuentra definido en el rango  $[0, 1]$ , siendo  $Skw = 0$  para el caso de elementos equiláteros y  $Skw = 1$  en el caso de elementos degenerados.

Por último, para una dada malla, los parámetros mencionados se calculan como los máximos valores del conjunto de todos los elementos que conforman la malla.



### 4.2. Resultados para los casos de prueba de mapeos ALE

Se llevan a cabo casos de prueba con las siguientes técnicas: difusión, elasticidad, *Jacobian-Based Stiffening* y SEMMT en sus variantes *Single Domain* y *Multiple Domain*. En el caso de problema de difusión se utiliza como parámetro de “difusividad” un valor unitario. En las siguientes técnicas se utiliza una razón  $\lambda/\mu$  correspondiente un coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$ . En todos los casos se utiliza como potencia de endurecimiento  $\chi = 1$ , salvo en la modalidad SEMMT-SD donde al dominio “interior” se lo endurece con un valor de  $\chi = 2$ .

La figura 4 muestra valores de  $f_A^e$ ,  $f_{AR}^e$  y  $Skw$  a medida que la magnitud del desplazamiento se va incrementando para las diferentes técnicas implementadas. Los parámetros de calidad de malla se calculan sobre el total de los elementos, en dualidad también se reportan resultados computando los mismos parámetros sobre los elementos pertenecientes al dominio encerrado por  $\Gamma^{MD}$ .

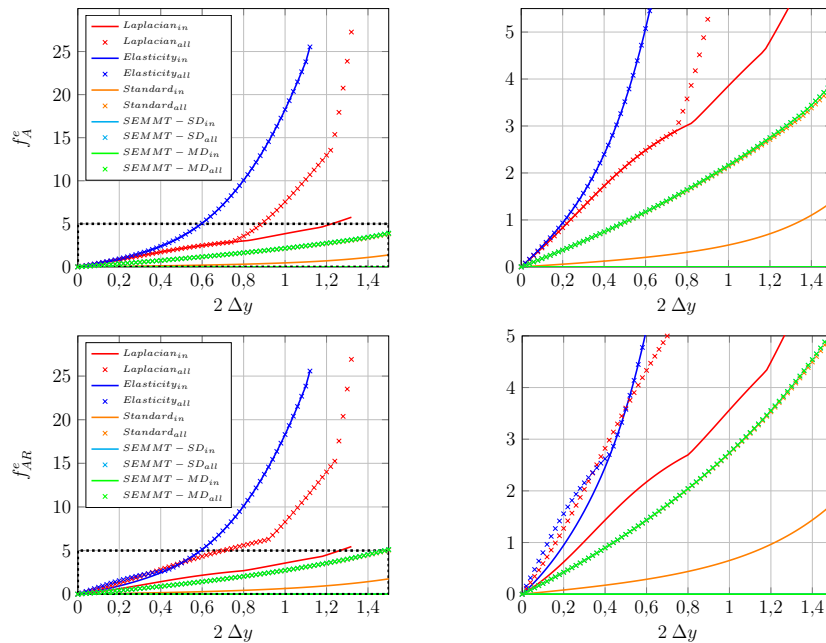


Figura 4: Parámetros de calidad de malla del caso de prueba 1). En la columna de la izquierda, de arriba hacia abajo, se muestran los parámetros  $f_A^e$ ,  $f_{AR}^e$  respectivamente. A la derecha de cada figura una ampliación de la misma.

Por otro lado, en la figura 6 se muestra el valor del parámetro  $Skw$  para los casos de prueba 1) y 2). Para todos los casos se muestran los resultados considerando para el cálculo de calidad de malla el dominio total como el dominio encerrado por la superficie  $\Gamma^{MD}$ , indicado en las figuras por los subíndices “all” y “in” respectivamente.

#### 4.2.1. Rigidización selectiva de elementos

Se plantea la rigidización selectiva de elementos por medio del parámetro  $\chi$ , definiendo un valor umbral para el parámetro  $Skw$ .

$$\chi(Skw) = \begin{cases} 1 & \text{si } Skw < Skw_{th} \\ 2 & \text{si } Skw > Skw_{th} \end{cases} \quad (22)$$

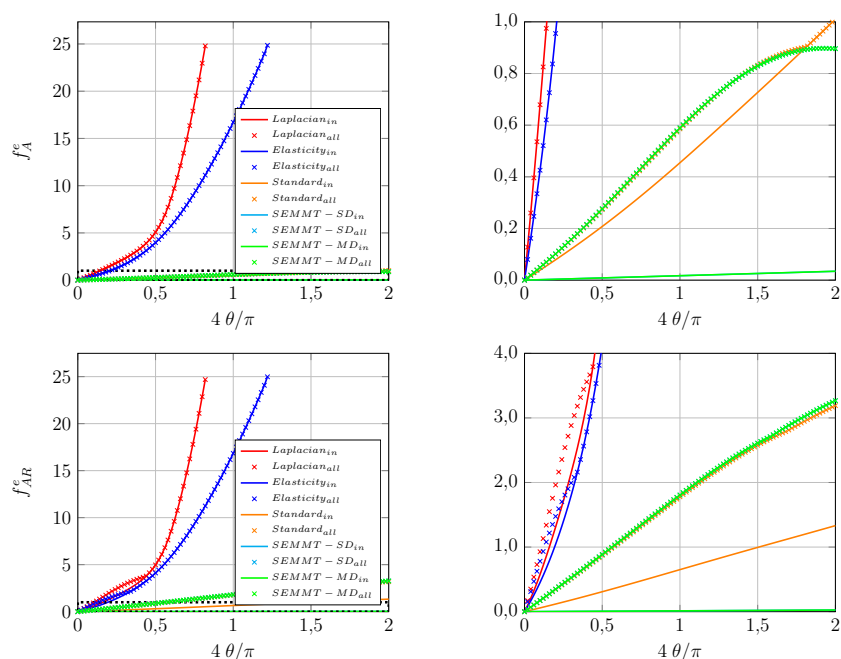


Figura 5: Parámetros de calidad de malla del caso de prueba 2). En la columna izquierda, de arriba hacia abajo, se muestran los parámetros  $f_A^e$ ,  $f_{AR}^e$  respectivamente. A la derecha de cada figura una ampliación de la misma.

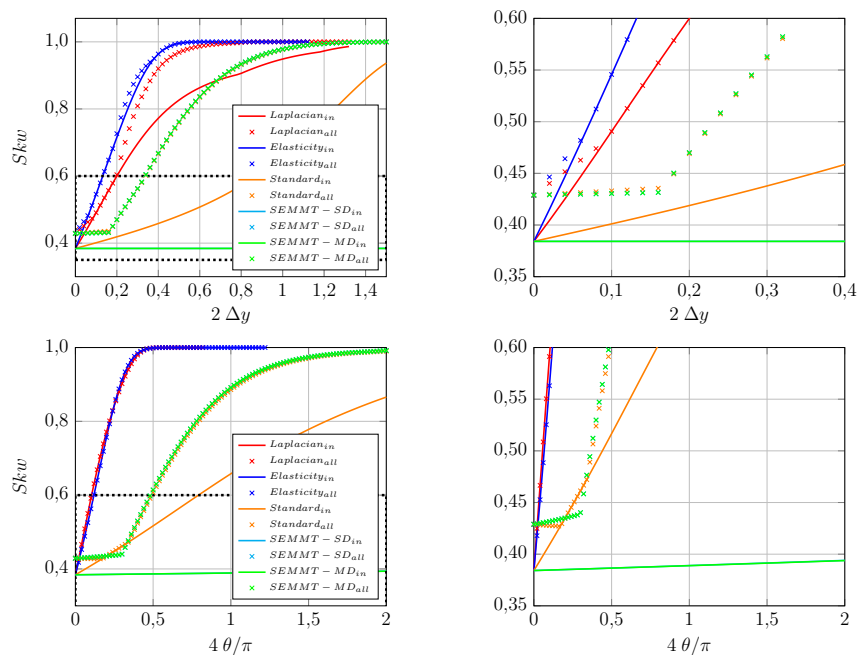


Figura 6: Valores de  $Skw$  para los modos de deformación de traslación y rotación. A la derecha de cada figura un aumento de su respectiva.

Otra alternativa propuesta es realizar una transición suave de dicha rigidización:

$$\chi(Skw) = \begin{cases} 1 & \text{si } Skw < Skw_{th} \\ \frac{Skw - Skw_{th}}{Skw_{ult} - Skw_{th}} + 1 & \text{si } Skw_{th} \leq Skw \leq Skw_{ult} \\ 2 & \text{si } Skw > Skw_{ult} \end{cases} \quad (23)$$

donde  $Skw_{th}$  es un valor umbral el cual da comienzo a la rigidización selectiva y  $Skw_{ult}$  un valor máximo admisible de distorsión del elemento.

Se implementan ambas técnicas de rigidización selectiva con la metodología SEMMT-SD para el modo de deformación por desplazamiento. Se utiliza un valor de  $Skw_{th} = 0,8$  y  $Skw_{ult} = 0,95$ . La figura 7 muestra la última configuración de equilibrio para  $\Delta y = 0,75$ , el valor de  $\chi$  para cada una de las técnicas mencionadas.

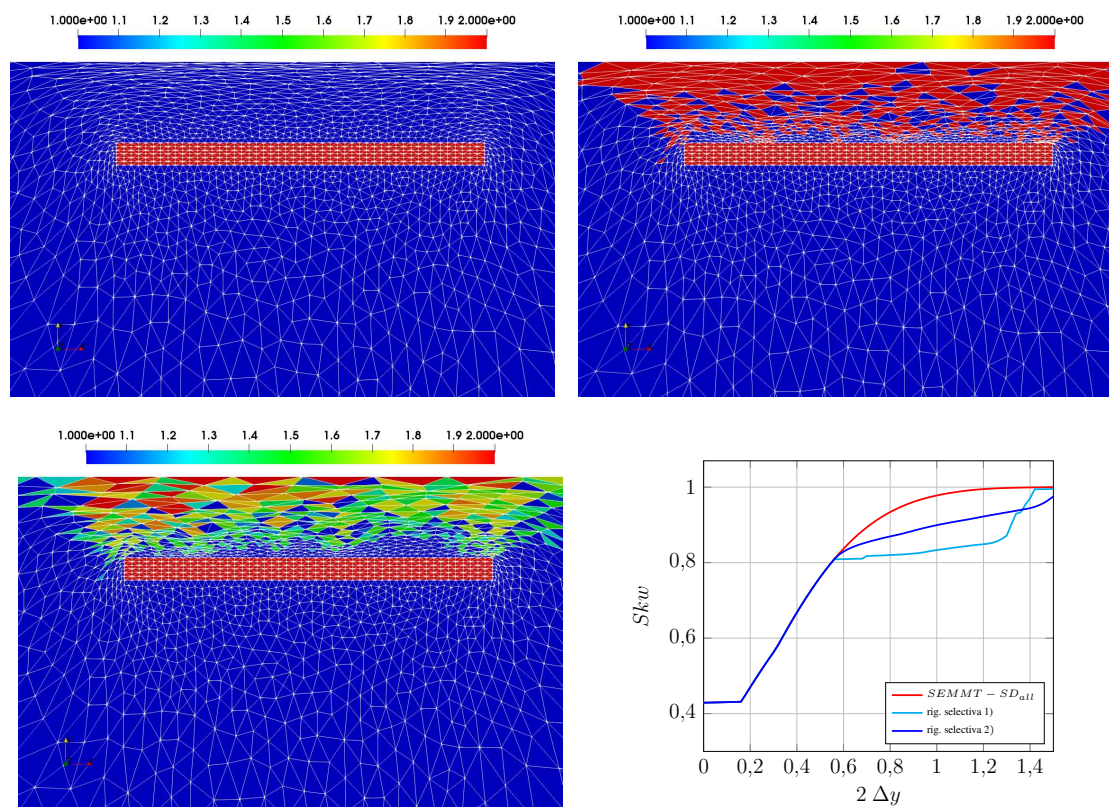


Figura 7: Configuración deformada para  $\Delta y = 0,75$  utilizando las técnicas SEMMT-SD (arriba a la izquierda), rigidización selectiva 1) (véase la Ec. 22) (arriba a la derecha) y rigidización selectiva 2) (véase la Ec. 23) (abajo a la izquierda). Comparación de la evolución del parámetro  $Skw$  (abajo a la derecha).

## 5. PROBLEMA DE APLICACIÓN

### 5.1. problema inspirado en válvulas cardíacas

El siguiente problema se encuentra inspirado en válvulas cardíacas (Gil et al., 2010; Hesch et al., 2012; Boilevin-Kayl et al., 2018), para poner a prueba las técnicas hasta aquí vistas sobre el tratamiento del mapeo ALE en problemas que involucren grandes desplazamientos en la estructura. Dada la simetría del problema, es posible modelar sólo la mitad del dominio bajo apropiadas condiciones de contorno. Tal cual lo indicado en la figura 8, el problema consiste en modelar un sólido hiperelástico dispuesto en forma de viga en voladizo, la cual se encuentra sumergida en un canal lleno de un fluido newtoniano e incompresible.

La geometría del fluido esta confinada en el dominio  $[0, 8] \times [0, 0,805]$ , la configuración de referencia del sólido se encuentra definida por una segmento de espesor  $t = 0,0212$ . Los propiedades del fluido son una densidad  $\rho_f = 100$  y viscosidad  $\mu_f = 10$ . Para el sólido se tiene

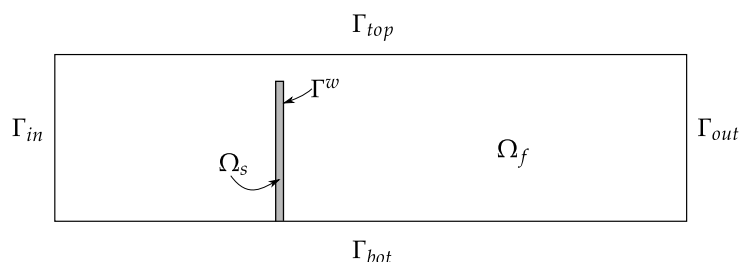


Figura 8: Configuración geométrica (no a escala) y condiciones de borde.

$\rho_s = 100$  y un material hiperelástico Neo-Hookeano con constantes de lamé  $\lambda = 8 \times 10^6$  y  $\mu = 2 \times 10^6$ . Las unidades se encuentran dadas en sistema CGS.

Las condiciones de contorno para el fluido son: sobre la frontera  $\Gamma_{bot}$  se tiene condición de adherencia, mientras que sobre  $\Gamma_{top}$  se impone condición de simetría. A la salida  $\Gamma_{out}$  se impone tracción nula y en la entrada  $\Gamma_{in}$  se prescribe un perfil de velocidad.

$$v_{max} = 5 \times (0,805)^2 \times (\sin(2\pi t) + 1,1) \quad (24)$$

## 5.2. Resultados

Se muestran los resultados utilizando las siguientes técnicas en la resolución del mapeo ALE: 1) problema de difusión, 2) *Jacobian-Based Stiffening* y 3) SEMMT-SD. En todos los casos se utiliza la misma malla tanto para el dominio de fluido (véase la Fig. 9) como para el dominio de sólido (véase la Fig. 10). La malla de fluido consta de 15258 elementos triangulares lineales mientras que la malla de sólido cuenta con 620 elementos del mismo tipo.

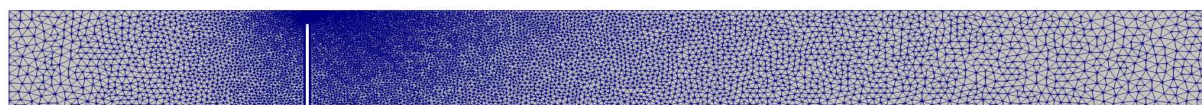


Figura 9: Malla del dominio  $\Omega_f^0$ .

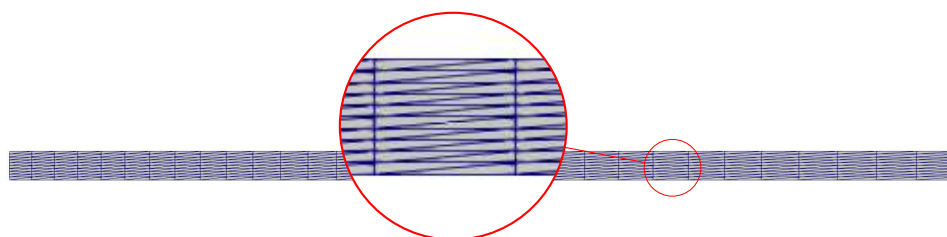


Figura 10: Malla del dominio  $\Omega_s^0$ .

En los casos 1) y 2), no es posible resolver dado el tamaño de los desplazamientos. En la figura 11 se muestran las configuraciones de equilibrio anteriores a la inversión de jacobianos por parte de los mapeos ALE propuestos.

Los casos 3),4) y 5) resuelven de manera exitosa el mapeo ALE. La figura 12 se muestra la zona del extremo libre de la estructura en una configuración de equilibrio donde los desplazamientos de la malla son máximos, para cada una de las técnicas referidas.

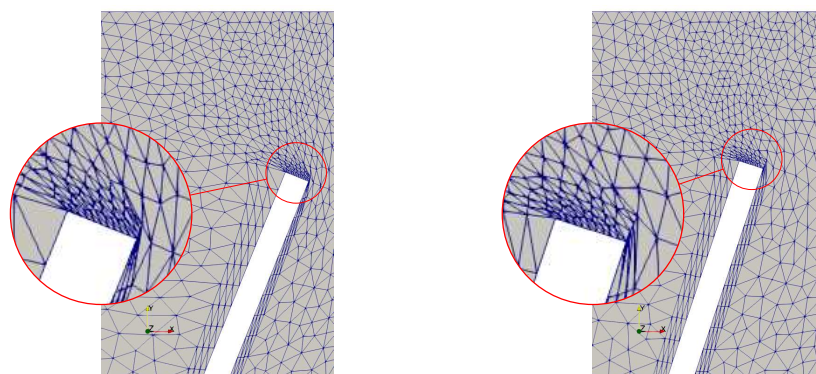


Figura 11: Última configuración de equilibrio alcanzada para el caso 1) (izquierda) y el caso 2) (derecha).

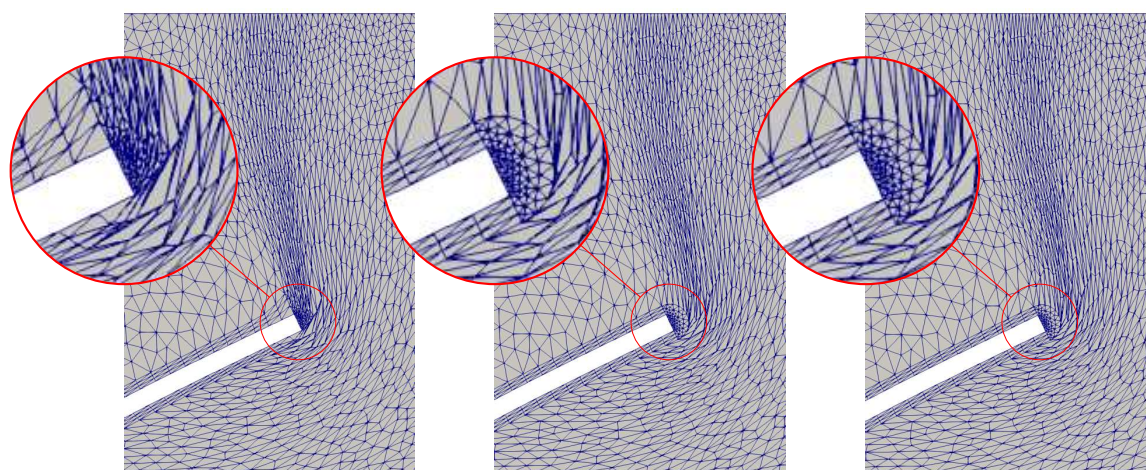


Figura 12: Mapeo ALE en la configuración de máximos desplazamientos, resueltos por las técnicas Jacobian-Based Stiffening (izquierda), SEMMT-SD (medio), SEMMT-MD (derecha).

La figura 13 muestra el módulo de la velocidad, resuelto por el método SEMMT-MD en la misma configuración de equilibrio para la que se muestra la malla con desplazamientos máximos. En la figura 14 se indican los resultados de desplazamientos en la dirección  $X$  en los casos 3), 4) y 5).

## 6. CONCLUSIONES

Los resultados de la Sección 4 muestran mejoras en la calidad de malla obtenidas por las técnicas de endurecimiento por jacobiano con respecto a técnicas clásicas tales como las que resuelven problemas homogéneos de difusión o elasticidad lineal. En los casos de prueba resueltos, no se nota una mejora sustancial de la técnica SEMMT-MD frente a SEMMT-SD. Asimismo, en la Sección 4.2.1 se incursiona en técnicas de rigidización selectiva en función de parámetros de calidad de la malla. Se observan buenos resultados aunque es necesario realizar más pruebas para determinar con mejor criterio el conjunto de parámetros óptimos.

Por otro lado, en el problema de aplicación se deja en evidencia la necesidad de contar con algoritmos robustos para determinar el mapeo ALE. Con las técnicas de mapeo ALE tradicionales, tales como la de la difusión o elasticidad homogéneas, no fue posible obtener mallas capaces de acomodar las exigencias de los casos planteados en cuanto a los grandes desplazamientos y

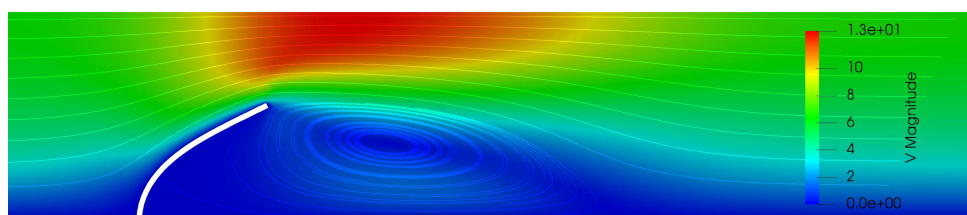


Figura 13: Campo de  $|\vec{v}_f|$  junto a líneas de corriente.

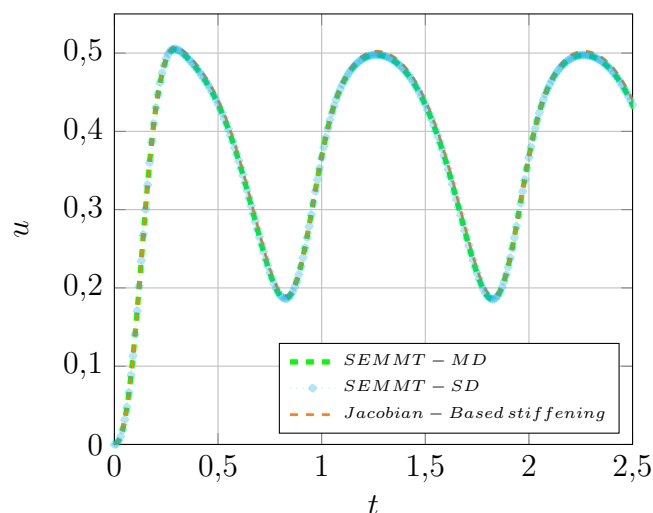


Figura 14: Campo desplazamientos en dirección  $x$  del extremo libre de la estructura.

deformaciones. En técnicas más sofisticadas, como SEMMT-SD, se obtienen mejoras, siendo posible la resolución con éxito del problema en todo su rango de desplazamientos. Durante la resolución del mismo se pone en evidencia una falencia de este tipo de técnicas, que dan por asumido que la discretización de la malla es más fina en la interfase. El caso de aplicación resuelto pone en evidencia dicha cuestión, pues se requiere de una buena resolución en la malla para capturar el flujo en forma de jet por encima de la estructura. En conclusión, a pesar de los grandes desarrollos existentes en el área de movimiento de mallas, sigue siendo crucial la elección de una buena malla inicial. Con todo esto, en determinada clase de problemas estas técnicas presentan limitaciones que requieren una selección de parámetros iniciales que son dependientes del caso, lo que requiere mayores desarrollos en procura de robustez y funcionamiento automático de los algoritmos, que eviten la intervención del usuario.

## REFERENCIAS

- Boilevin-Kayl L., Fernández M.A., y Gerbeau J.F. Numerical methods for immersed FSI with thin-walled structures. *Computers & Fluids*, 2018. ISSN 00457930. doi:10.1016/j.compfluid.2018.05.024.
- Gil A., Arranz Carreño A., Bonet J., y Hassan O. The Immersed Structural Potential Method for haemodynamic applications. *Journal of Computational Physics*, 229(22):8613–8641, 2010. ISSN 00219991. doi:10.1016/j.jcp.2010.08.005.
- Hesch C., Gil A., Arranz Carreño A., y Bonet J. On continuum immersed strategies for Fluid–Structure Interaction. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 247-

- 248:51–64, 2012. ISSN 0045-7825. doi:10.1016/J.CMA.2012.07.021.
- Johnson A. y Tezduyar T. Simulation of multiple spheres falling in a liquid-filled tube. *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, 134:351–373, 1996.
- Johnson A.A. y Tezduyar T.E. Mesh update strategies in parallel finite element computations of flow problems with moving boundaries and interfaces. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1994. ISSN 00457825. doi:10.1016/0045-7825(94)00077-8.
- Stein K., Tezduyar T., y Benney R. Mesh Moving Techniques for Fluid-Structure Interactions With Large Displacements. *Journal of Applied Mechanics*, 2003. ISSN 00218936. doi: 10.1115/1.1530635.
- Stein K. y Tezduyar T.E. Advanced Mesh Update Techniques for Problems Involving Large Displacements. En *Fifth World Congress on Computational Mechanics*, volumen 1-15, páginas 1–15. 2002. ISBN 3-9501554-0-6.
- Tezduyar T. Finite element interface-tracking and interface-capturing techniques for flows with moving boundaries and interfaces. En *American Society of Mechanical Engineers, Heat Transfer Division, (Publication) HTD*, volumen 369, páginas 105–114. 2001. ISBN 02725673 (ISSN). ISSN 02725673.
- Tezduyar T., Aliabadi S., Behr M., Johnson A., y Mittal S. Parallel Finite-Element Computation of 3D Flows. *Computer*, 1993. ISSN 00189162. doi:10.1109/2.237441.
- Tezduyar T.E. Computation of Unsteady Incompressible Flows with the Stabilized Finite Element Methods: Space-Time Formulations, Iterative Strategies and Massively Parallel Implementations. *New Methods in Transient Analysis*, 1992. ISSN 0277027X.
- Tezduyar T.E. Computation of moving boundaries and interfaces and stabilization parameters. *575(April 2002):555–575*, 2003.
- Tezduyar T.E., Behr M., Mittal S., y Johnson A.A. Computation of unsteady incompressible flows and massively parallel implementations. *New Methods in Transient Analysis*, 246:7–24, 1992.
- Tezduyar T.E., Sathe S., Pausewang J., Schwaab M., Christopher J., y Crabtree J. Interface projection techniques for fluid-structure interaction modeling with moving-mesh methods. *Computational Mechanics*, 2008. ISSN 01787675. doi:10.1007/s00466-008-0261-7.