

## ANÁLISIS PARAMÉTRICO DE UN COSECHADOR AEROELÁSTICO DE ENERGÍA: ASPECTOS ESTRUCTURALES

### PARAMETRIC ANALYSIS OF AN AEROELASTIC ENERGY HARVESTER: STRUCTURAL ASPECTS

Emmanuel Beltramo<sup>a,b</sup>, José Enrique Stuardi<sup>a</sup> y Sergio Preidikman<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup>*Departamento de Estructuras, FCEFyN, Universidad Nacional de Córdoba, Av. Vélez Sarsfield 1611, 5000 Córdoba, Argentina. [depestructuras@fcecyn.unc.edu.ar](mailto:depestructuras@fcecyn.unc.edu.ar), <http://www.efn.uncor.edu.ar>*

<sup>b</sup>*Instituto de Estudios Avanzados en Ingeniería y Tecnología (IDIT) - CONICET, Universidad Nacional de Córdoba, Av. Vélez Sarsfield 1611, 5000 Córdoba, Argentina. [idit@fcefyn.edu.ar](mailto:idit@fcefyn.edu.ar), <http://www.inv.idit.efn.uncor.edu/>*

**Palabras clave:** Cosecha de Energía, Aeroelasticidad, Materiales Piezoeléctricos, Estudio Paramétrico.

**Resumen.** En la última década, la cosecha de energía a partir de fuentes ambientales ha sido un tópico importante en el área de la investigación. La motivación viene dada por la posibilidad de alimentar a dispositivos de baja potencia a partir de energía disponible en la naturaleza. En el campo aeronáutico, resulta factible la construcción de alas multifuncionales que integran, dentro de su propia estructura, un sistema de cosecha y almacenaje de energía. Las vibraciones debido a perturbaciones de naturaleza aerodinámica y oscilaciones de ciclo límite de carácter aeroelástico, constituyen la fuente principal de energía del cosechador. En este trabajo, el modelo estructural del cosechador consiste en una viga en voladizo sometida a una excitación de base, cuyas superficies superior e inferior están cubiertas por transductores piezoeléctricos. Se explora la influencia en la respuesta eléctrica y mecánica de: *i*) las funciones de aproximación propuestas para aproximar el desplazamiento transversal de la viga; *ii*) dos tipos de piezoeléctricos y *iii*) la resistencia eléctrica. Como parte de los resultados, se presenta, para una configuración particular del modelo, la evolución del voltaje, el desplazamiento del extremo libre de la viga y la energía disipada.

**Keywords:** Energy harvesting, Aeroelasticity, Piezoelectric materials, Parametric study.

**Abstract.** Energy harvesting from ambient sources has been subject of continuous interest during the last decade. The possibility of supplying electricity to low-power devices using ambient energy represents the main motivation. In the aeronautical-engineering field, new technologies enable the construction multifunctional wings, which integrate energy-harvesting subsystems to their structure. Mechanical vibrations of the structure, due to wind gusts or limit-cycle oscillations caused by aeroelastic instabilities like flutter, are the main source of input energy. In this work, the harvester is modeled as a beam whose upper and lower surfaces are covered by piezoelectric plates. To study the mechanical and the electrical response of the model we consider: *i*) two types of piezoelectric transducers, *ii*) several functions that can be used to approximate the transversal displacement of the beam, and *iii*) the electrical resistance. For a particular model configuration, results for the voltage evolution, the dissipated energy, and the displacement at the free end of the beam, are presented.

## 1 INTRODUCCIÓN

La cosecha de energía es el proceso por el cual la energía disponible en el medio ambiente es convertida en una forma utilizable de energía. Durante los últimos años, este tópico de investigación recibió atención por parte de la comunidad científica debido a la posibilidad de alimentar a dispositivos electrónicos de baja potencia a partir de fuentes energéticas naturales.

En el campo de la aeronáutica, nuevas tecnologías permiten la construcción de alas capaces de desempeñar múltiples funciones, ya sean éstas estructurales o no. En consecuencia, resulta factible la fabricación de estructuras alares que incluyan subsistemas de cosecha y almacenaje de energía, con el objetivo de proporcionar fuentes de alimentación alternativas para sensores, actuadores y demás dispositivos de baja demanda energética. La fuente principal de energía del cosechador proviene de las vibraciones mecánicas del ala, generadas por perturbaciones de carácter aerodinámico y oscilaciones de ciclo límite de naturaleza aeroelástica. La conversión de la deformación mecánica en energía eléctrica se lleva a cabo empleando de transductores piezoeléctricos. Estos materiales son cristales naturales o sintéticos que se caracterizan por producir una diferencia de potencial eléctrico cuando son deformados mecánicamente (efecto directo) o bien, sufrir una deformación mecánica cuando se someten a la acción de un campo eléctrico (efecto inverso).

En este trabajo se estudian los aspectos estructurales más relevantes de un cosechador aeroelástico de energía, modelado por una viga de Euler-Bernoulli en voladizo, con una masa e inercia concentradas en su extremo libre y sometido a un desplazamiento y giro de base. La viga representa un modelo simplificado de un ala multifuncional, mientras que el desplazamiento y el giro de base corresponden al movimiento, debido a una ráfaga, que el fuselaje le transmite al ala. Además, se consideran dos transductores piezoeléctricos de idénticas características que recubren de manera parcial o total la superficie superior e inferior de la viga, los cuales presentan una conexión en paralelo.

## 2 DESCRIPCIÓN DEL MODELO PROPUESTO

El modelo de cosechador estudiado en este trabajo se muestra en la **Figura 1a**. El campo de desplazamiento transversal de la viga relativo a la base se indica por  $u_r(x,t)$ , y el giro y el desplazamiento de base se indican por  $h(t)$  y  $g(t)$  respectivamente. La energía recolectada se disipa a través de una resistencia eléctrica  $R$ , que tiene una diferencia de potencial  $v(t)$  entre sus extremos. La inercia y la masa concentradas se simbolizan mediante  $I_c$  y  $m_c$  respectivamente. El campo eléctrico de cada transductor se indica por  $E_{z1}$  y  $E_{z2}$ . En la **Figura 1b** se muestra la sección transversal de la viga en la región donde están ubicados los transductores piezoeléctricos.

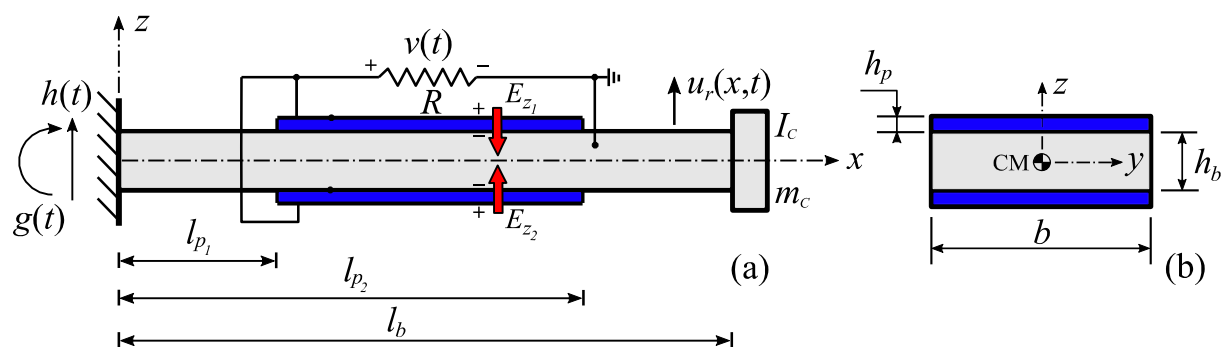


Figura 1: Modelo de cosechador propuesto.

## 2.1 Funciones de aproximación

El campo de desplazamiento transversal,  $u_r(x,t)$ , se discretiza espacialmente mediante el método de modos asumidos,

$$u_r(x,t) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) q_i(t) \quad (1)$$

donde  $q_i(t)$  es la  $i$ -ésima coordenada generalizada,  $\phi_i(x)$  es la  $i$ -ésima función de aproximación y  $n$  el número de términos de la aproximación (Baruh, 1999). En este trabajo, se adoptan cuatro conjuntos de funciones de aproximación.

$$\phi_i(x) = C_{1i} \cos(\beta_i x) + C_{2i} \sin(\beta_i x) + C_{3i} \cosh(\beta_i x) + C_{4i} \sinh(\beta_i x) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

El primero de ellos, ec. (2), resulta de calcular los modos normales de vibración de la viga de la Figura 1a.

$$\phi_i(x) = \left(\frac{x}{l_b}\right)^{i+1} \left\{ 6 + i^2 \left(1 - \frac{x}{l_b}\right)^2 + i \left[ 5 - \frac{6x}{l_b} + \frac{x^2}{l_b^2} \right] \right\} \frac{1}{i(1+i)(2+i)(3+i)} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

El segundo conjunto, ec. (3), se obtuvo de Hogdes y Pierce (2011).

$$\phi_i(x) = 1 - \cos \left[ \frac{(2i-1)\pi x}{2l_b} \right] \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

El tercer conjunto, ec. (4), se obtuvo de Erturk e Inman (2011).

$$\phi_i(x) = \left(\frac{x}{l_b}\right)^{2i+1} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

Y el cuarto conjunto, ec. (5), se obtuvo de Chopra y Sirohi (2013).

## 2.2 Ecuaciones de movimiento del sistema electromecánico

Para obtener las ecuaciones de movimiento se utiliza la siguiente versión de las ecuaciones de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad ; \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{v}} \right) - \frac{\partial L}{\partial v} = Q_e \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

donde  $Q_i$  es la  $i$ -ésima carga generalizada no conservativa,  $Q_e$  la carga eléctrica generalizada y  $L = T - V + W_e$  el Lagrangiano, donde  $T$  es la energía cinética,  $V$  la energía potencial elástica y  $W_e$  la coenergía potencial eléctrica. La energía cinética está dada por,

$$T(t) = \frac{1}{2} \int_{V_b} \rho_b \dot{u}(x,t)^2 dV_b + \frac{1}{2} \int_{V_p} 2\rho_p \dot{u}(x,t)^2 dV_p + \frac{1}{2} m_c \dot{u}(l_b,t)^2 + \frac{1}{2} I_c \left[ \frac{\partial^2 u(l_b,t)}{\partial x \partial t} \right]^2 \quad (7)$$

donde  $\rho_b$  es la densidad de la viga,  $\rho_p$  es la densidad del piezoeléctrico,  $V_b$  el volumen del núcleo de la viga,  $V_{p1}$  y  $V_{p2}$  el volumen de cada transductor y  $u(x,t)$  el campo de desplazamiento transversal absoluto. La energía potencial elástica está dada por,

$$V(t) = \frac{1}{2} \int_{V_b} \sigma_b \varepsilon_b dV_b + \frac{1}{2} \int_{V_{p1}} \sigma_{p1} \varepsilon_{p1} dV_{p1} + \frac{1}{2} \int_{V_{p2}} \sigma_{p2} \varepsilon_{p2} dV_{p2} \quad (8)$$

donde  $\sigma_k$  es la tensión axial y  $\varepsilon_k$  la deformación axial, con  $k = b$  para la viga y  $k = p_1$  y  $k = p_2$  para los transductores. La coenergía eléctrica  $W_e$  está dada por,

$$W_e(t) = \frac{1}{2} \int_{V_{p_1}} E_{z1} D_{z1} V_{p1} + \frac{1}{2} \int_{V_{p_2}} E_{z2} D_{z2} V_{p2} \quad (9)$$

donde  $D_{z1}$  y  $D_{z2}$  son los desplazamientos eléctricos de cada transductor. Adoptando relaciones constitutivas lineales para los piezoeléctricos, asumiendo un modelo de amortiguamiento clásico con factor de amortiguamiento modal constante y reemplazando las ec. (7) a ec. (9) en la ec. (6) se obtiene el siguiente sistema acoplado (electromecánicamente) de ecuaciones de movimiento,

$$\begin{aligned} [M] \ddot{\mathbf{q}}(t) + [C] \dot{\mathbf{q}}(t) + [K] \mathbf{q}(t) + \boldsymbol{\theta} v(t) &= \mathbf{f}(t) \\ \frac{1}{R} v(t) + C_p \dot{v}(t) - \boldsymbol{\theta}^T \dot{\mathbf{q}}(t) &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

donde  $[M] = [m_{ij}]$  es la matriz de masa,  $[K] = [k_{ij}]$  la matriz de rigidez,  $[C]$  la matriz de amortiguamiento,  $\boldsymbol{\theta} = \{\theta_i\}$  el vector de acoplamiento,  $\mathbf{f}(t) = \{f_i(t)\}$  el vector de cargas y  $C_p$  la capacitancia del piezoeléctrico. El término  $m_{ij}$  está dado por,

$$m_{ij} = bh_b \rho_b \int_0^{l_b} \phi_i(x) \phi_j(x) dx + 2bh_p \rho_p \int_{l_{p1}}^{l_{p2}} \phi_i(x) \phi_j(x) dx + I_c \phi_i'(l_b) \phi_j'(l_b) + m_c \phi_i(l_b) \phi_j(l_b) \quad (11)$$

el término  $k_{ij}$  está dado por,

$$k_{ij} = E_b I_b \int_0^{l_b} \phi_i''(x) \phi_j''(x) dx + \frac{2I_p}{s_{xx}^E} \int_{l_{p1}}^{l_{p2}} \phi_i''(x) \phi_j''(x) dx \quad (12)$$

el término  $\theta_i$  está dado por,

$$\theta_{pi} = -\frac{d_{zx}^E}{s_{xx}^E} \lambda \int_{l_{p1}}^{l_{p2}} \phi_i''(x) dx ; \quad \theta_{si} = -\frac{d_{zx}^E}{2s_{xx}^E} \lambda \int_{l_{p1}}^{l_{p2}} \phi_i''(x) dx \quad (13)$$

donde  $\theta_{pi}$  corresponde a una conexión en paralelo y  $\theta_{si}$  a una conexión serie; y el término  $f_i(t)$  está dado por,

$$\begin{aligned} f_i(t) = & -bh_b \rho_b \int_0^{l_b} \phi_i(x) [\ddot{h}(t) + x\ddot{g}(t)] dx - 2bh_p \rho_p \int_{l_{p1}}^{l_{p2}} \phi_i(x) [\ddot{h}(t) + x\ddot{g}(t)] dx - \\ & -I_c \phi_i'(l_b) \ddot{g}(t) - m_c \phi_i(l_b) \ddot{h}(t) \end{aligned} \quad (14)$$

$I_p$  es la inercia de cada lámina piezoeléctrica,  $I_b$  la inercia del núcleo de la viga y  $\lambda$  un parámetro geométrico, mientras que la capacitancia para una conexión en serie y paralelo se indica por  $C_{sp}$  y  $C_{pp}$  respectivamente. Todos ellos se obtienen mediante,

$$C_{pp} = \frac{2b(l_{p2} - l_{p1})}{h_p} \left( -\frac{d_{zx}^2}{s_{xx}^E} + e_{zz}^\sigma \right); \quad C_{ps} = \frac{C_{pp}}{4}; \quad I_b = \frac{bh_b^3}{12}; \quad I_p = b \left[ \left( \frac{h_b}{54} + \frac{h_p}{27} \right)^3 - \frac{h_b^3}{24} \right]; \quad \lambda = \frac{b(h_b + h_p)}{2} \quad (15)$$

donde  $s_{xx}^E$  es la flexibilidad mecánica y  $e_{zz}^\sigma$  la permitividad eléctrica. Un mayor detalle de las ecuaciones constitutivas piezoeléctricas se presenta en [Chopra y Sirohi \(2013\)](#).

### 3 FRECUENCIAS NATURALES Y RESISTENCIA ÓPTIMA

Para obtener las frecuencias naturales se resuelve el problema de autovalores,

$$\left\{ -\omega^2 [M] + j\omega [C] + [K] + \theta\theta^T \left( \frac{j\omega R}{1 + C_p^2 R^2 \omega^2} + \frac{C_p R^2 \omega^2}{1 + C_p^2 R^2 \omega^2} \right) \right\} \mathbf{Q}_0 = \mathbf{0}. \quad (16)$$

Se observa que la presencia de un término resistivo incrementa la rigidez y afecta a la disipación; asimismo, se deduce que, cuando más fuerte es el acoplamiento, más significativo es el aporte eléctrico.

$$R_{op} = \frac{1}{\omega C_p} \quad (17)$$

En la literatura, se presenta la ec. (17) (modelo N°1) como una aproximación al valor que debe adquirir la resistencia para maximizar la cosecha, la cual se obtiene derivando el término disipativo de la ec. (16) respecto a  $R$ . Sin embargo, esta expresión resulta imprecisa debido a que considera al piezoeléctrico actuando únicamente como sensor (Erturk e Inman, 2011).

$$R_{op} = \left[ \frac{\omega^2 (c^2 - 2km + m^2 \omega^2) + k^2}{C_p^2 \omega^2 (c^2 \omega^2 + k^2 - 2km\omega^2 + m^2 \omega^4) - 2C_p \theta^2 m \omega^4 + \theta^4 \omega^2} \right]^{1/2} \quad (18)$$

El valor óptimo de  $R$  se encuentra derivando la ecuación de la potencia eléctrica respecto a  $R$ , la cual, para un sistema de un grado de libertad adopta la forma de la ec. (18) (modelo N°2) que tiene validez para un desplazamiento de base armónico con frecuencia  $\omega$ .

$$K_R(\omega, R) = \frac{C_p^2 R^2 \omega^2}{1 + C_p^2 R^2 \omega^2} \quad (19)$$

Por otro lado, la ec. (19) muestra la contribución de  $R$  a la rigidez del sistema. Si se deriva esta ecuación respecto a  $R$ , no se encuentra un valor que la maximice debido a que presenta un comportamiento asintótico. En consecuencia, para cada configuración del modelo, existe un valor de  $R$  a partir del cual la ec. (19) se vuelve constante.

#### 4 VALORES NUMÉRICOS PARA LOS PARÁMETROS DEL MODELO

En la [Tabla 1](#), [Tabla 2](#) y [Tabla 3](#) se resumen los valores numéricos del modelo analizado.

Parámetro mecánico y eléctrico	Valor numérico
Módulo elástico de la viga, $E_b$	$70 \times 10^9$ [N/m <sup>2</sup> ]
Flexibilidad del piezoeléctrico, $s_{xx}^E$	$1,64 \times 10^{-11}$ (PZT-5A) y $1,65 \times 10^{-11}$ (PZT-5H) [m <sup>2</sup> /N]
Factor de amortiguamiento, $\zeta$	0,015
Densidad de la viga y piezoeléctrico, $\rho_p$ y $\rho_p$	$7750$ [Kg/m <sup>3</sup> ]
Permitividad eléctrica, $\epsilon_{zz}^\sigma$	$1,51 \times 10^{-8}$ (PZT-5A) y $3,01 \times 10^{-8}$ (PZT-5H) [C <sup>2</sup> /Nm <sup>2</sup> ]
Coefficiente piezoeléctrico, $d_{zx}$	$-1,705 \times 10^{-10}$ (PZT-5A) y $-2,72 \times 10^{-10}$ (PZT-5H) [C/N]
Masa e inercia concentrada, $m_c$ y $I_c$	0,05 [Kg] y $1 \times 10^{-5}$ [Kg m <sup>2</sup> ]

Tabla 1: Parámetros mecánicos y eléctricos.

Parámetro Geométrico	Valor Numérico	Parámetro Geométrico	Valor Numérico
Longitud Viga, $l_b$	0,25 [m]	Longitud $l_{p1}$	0 [m]
Ancho Viga, $b$	0,02 [m]	Longitud $l_{p2}$	0,25 [m]
Espesor Viga $h_b$	0,005 [m]	Espesor piezoeléctrico, $h_p$	0,0002 [m]

Tabla 2: Parámetros geométricos del modelo.

Propiedades generales	Valor numérico
Desplazamiento de base, $h(t)$	Cosenoidal con frecuencia $\omega_{1cc}$ y $\omega_{1ca}$
Giro de base, $g(t)$	Nulo

Tabla 3: Propiedades generales.

## 5 RESULTADOS

### 5.1 Frecuencias de cortocircuito y de circuito abierto

Las frecuencias naturales de cortocircuito se obtienen adoptando un valor nulo para la resistencia eléctrica y resolviendo el problema de autovalores de la ec. (16). Se calcularon las primeras cuatro frecuencias seleccionando cinco funciones de aproximación para cada uno de los conjuntos propuestos. La [Tabla 4](#) y la [Tabla 5](#) muestran los resultados obtenidos.

Frecuencias Naturales de Cortocircuito $\omega_{cc}$ [rad/s]				
Conjunto N°	Frec. N°1 $\omega_{cc1}$	Frec. N°2 $\omega_{cc2}$	Error % $\omega_{cc1}$	Error % $\omega_{cc2}$
1	221,37	1876,29	0	0
2	221,39	1885,04	0,009	0,464
3	221,39	1881,45	0,009	0,274
4	247,09	2180,04	10,409	13,933

Tabla 4: Frecuencias naturales de cortocircuito.

Frecuencias Naturales de Cortocircuito $\omega_{cc}$ [rad/s]				
Conjunto N°	Frec. N°3 $\omega_{cc3}$	Frec. N°4 $\omega_{cc4}$	Error % $\omega_{cc3}$	Error % $\omega_{cc4}$
1	5289,79	9605,62	0	0
2	5531,47	11166,29	4,369	13,976
3	5398,42	10631,58	2,012	9,65
4	6250,11	12329,11	15,365	22,089

Tabla 5: Frecuencias naturales de cortocircuito.

El error porcentual se calculó respecto al primer conjunto, ya que éste se encuentra constituido por las autofunciones del modelo de la [Figura 1a](#). El objetivo es determinar el set que mejor aproxima a las autofunciones para que, en estudios posteriores, no sea necesario calcularlas ya que implica un esfuerzo extra. A partir de los resultados obtenidos, se concluye que el tercero de ellos permite obtener los errores más bajos, mientras que el cuarto los más elevados. Además, se debe tener en cuenta que al incrementar el número de términos de la aproximación el error disminuye a expensas de un aumento de la dimensión del sistema a resolver.

Por otro lado, para calcular las frecuencias de circuito abierto se debe analizar el valor mínimo que debe tener la resistencia eléctrica para obtener resultados adecuados. En virtud de ello, se evalúa la ec. (19) para ambos piezocerámicos, adoptando como referencia a las frecuencias de cortocircuito. De la [Figura 2](#) se desprende que, para el PZT-5A, se necesita una resistencia mínima de 60 k $\Omega$  para que la rigidez alcance su valor asintótico, mientras que para el PZT-5H se requiere una magnitud mínima de 30 k $\Omega$ . Nótese que según la [Figura 2](#), el PZT-5A aparenta aportar mayor rigidez al sistema, sin embargo, esto no puede afirmarse ya que también depende de la intensidad del acoplamiento. La [Tabla 6](#) y la [Tabla 7](#) muestran los resultados para cada conjunto considerando ambos tipos de piezocerámicos. Al comparar las frecuencias de cortocircuito con las de circuito abierto se deduce que las últimas poseen valores más elevados, fundamentalmente las dos primeras. El incremento depende de las características de cada modelo, no obstante, se puede afirmar que la presencia de un elemento

resistivo aporta rigidez al sistema. Además, particularmente para el modelo en evaluación, el PZT-5H introduce mayor rigidez.

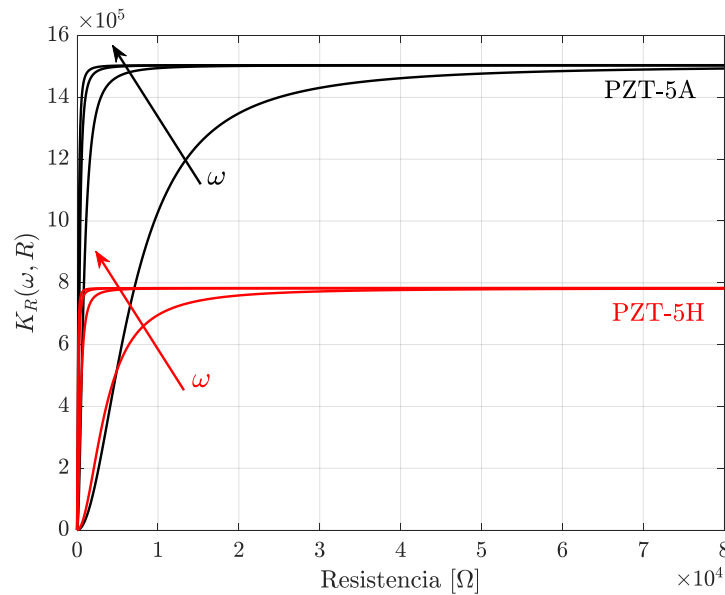


Figura 2: Aporte resistivo a la rigidez del sistema.

Frecuencias Naturales de Circuito Abierto $\omega_{ca}$ [rad/s]				
Conjunto N°	PZT-5A		PZT-5H	
	Frec. N°1 $\omega_{ca1}$	Frec. N°2 $\omega_{ca2}$	Frec. N°1 $\omega_{ca1}$	Frec. N°2 $\omega_{ca2}$
1	223,32	1880,46	223,93	1881,81
2	223,32	1888,76	223,93	1889,95
3	223,33	1885,44	223,96	1886,73
4	249,14	2184,66	249,8	2186,16

Tabla 6: Frecuencias naturales de circuito abierto.

Frecuencias Naturales de Circuito Abierto $\omega_{ca}$ [rad/s]				
Conjunto N°	PZT-5A		PZT-5H	
	Frec. N°3 $\omega_{ca3}$	Frec. N°4 $\omega_{ca4}$	Frec. N°3 $\omega_{ca3}$	Frec. N°4 $\omega_{ca4}$
1	5294,29	9608,85	5295,76	9609,9
2	5534,04	11167,86	5534,88	11167,86
3	5401,93	10633,38	5403,07	10633,96
4	6255,35	12331,81	6257,06	12332,69

Tabla 7: Frecuencias naturales de circuito abierto.

### 5.2 Potencia máxima y resistencia óptima

Los resultados que se presentan se obtuvieron integrando numéricamente en el dominio del tiempo las ec. (10) y adoptando el tercer conjunto de funciones de aproximación. En la Figura 3 se muestra la potencia cosechada en función de la resistencia eléctrica para dos frecuencias de excitación. Se desprende que, según la resistencia adoptada, hay regiones donde conviene excitar al cosechador a  $\omega_{cc1}$  y otras a  $\omega_{ca1}$ . Para el PZT-5H la potencia máxima disipada es de 260 mW, tanto para  $\omega_{cc1}$  como  $\omega_{ca1}$ , aunque esto se obtiene para diferentes valores de  $R$ . La magnitud óptima de  $R$  para  $\omega_{cc1}$  es 2,8 k $\Omega$  y para  $\omega_{ca1}$  es 4,25 k $\Omega$ . Por otro lado, la potencia máxima para el transductor PZT-5A depende de la frecuencia de excitación, 230 mW para





frecuencias más elevadas, lo que obedece al incremento de rigidez. Y por otro, los voltajes máximos aumentan con  $R$  tendiendo hacia un valor asintótico, denominado voltaje de circuito abierto.

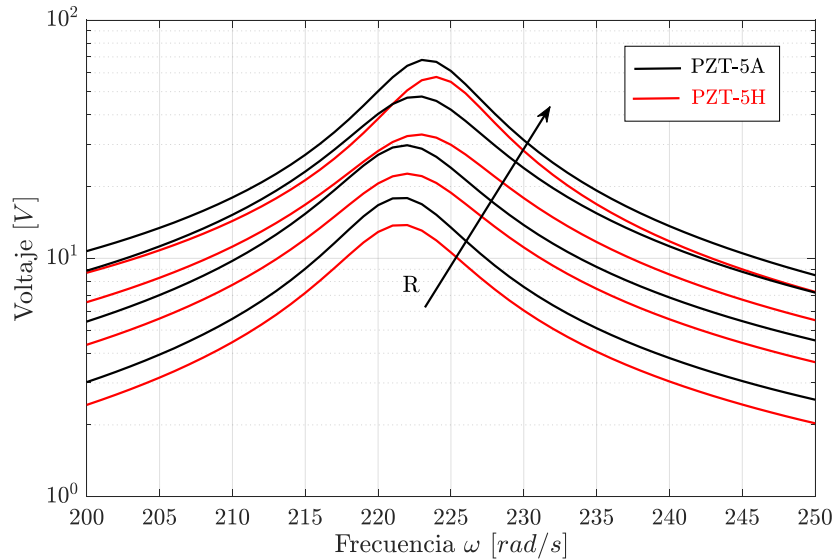


Figura 5: Voltaje en función de la frecuencia para diferentes valores de  $R$ .

La Figura 6 muestra el desplazamiento máximo del extremo de la viga en función de la resistencia cuando se excita al cosechador a las frecuencias  $\omega_{cc1}$  y  $\omega_{ca1}$ . Se observa que, para valores pequeños de  $R$ , los desplazamientos obtenidos a  $\omega_{cc1}$  son mayores que los calculados a  $\omega_{ca1}$ , esto se debe a que la frecuencia natural real está mucho más próxima a  $\omega_{cc1}$  que a  $\omega_{ca1}$ ; sin embargo, la tendencia se invierte para valores grandes de  $R$  debido a que la frecuencia real se aproxima más a  $\omega_{ca1}$ . Además, nótese que los valores de  $R$  que maximizan la atenuación no son los mismos que maximizan la cosecha, es decir, la máxima disipación no ocurre cuando la amplitud del desplazamiento es mínima.

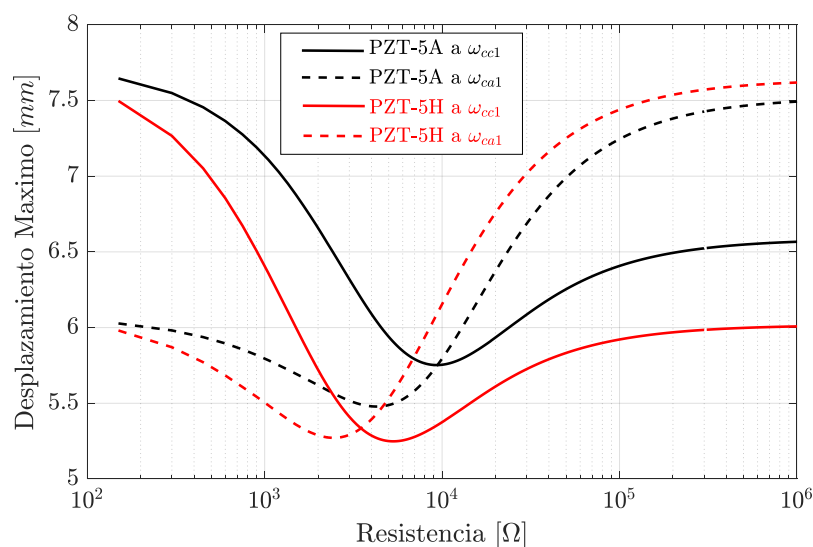


Figura 6: Desplazamiento del extremo de la viga en función de la resistencia.

La Figura 7 presenta el desplazamiento máximo entorno a la primera frecuencia natural para

diferentes resistencias. Se destaca que, para valores extremos de  $R$  (cortocircuito  $100 \Omega$  o circuito abierto  $100 \text{ k}\Omega$ ) el desplazamiento máximo posee la misma magnitud, pero los picos se presentan para diferentes frecuencias, tal como se aprecia en las curvas de color negro. Esto se produce debido a un cambio en la rigidez del sistema, pero con disipación nula. Para magnitudes de  $R$  situadas dentro del intervalo que definen los valores extremos de ella, se muestra una atenuación del desplazamiento y un traslado de los máximos hacia frecuencias más elevadas a medida que aumenta  $R$ . En este caso, la presencia resistiva tiene efectos disipativos y también incrementa la rigidez, tal como se observa en las curvas rojas y azul.

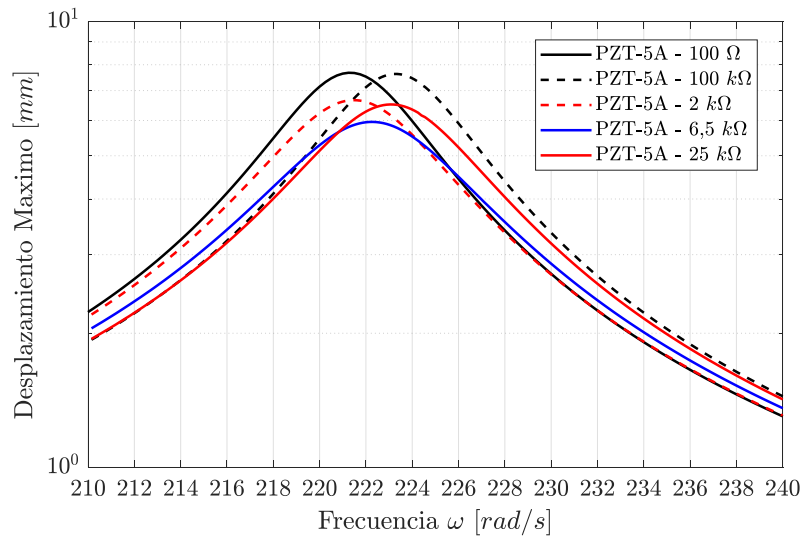


Figura 7: Desplazamiento del extremo de la viga en función de la frecuencia.

## 6 CONCLUSIONES

En este trabajo se evaluó el desempeño de un cosechador de energía modelado por una viga de Euler-Bernoulli en voladizo sometida a una excitación de base, y cuyas superficies superior e inferior están cubiertas con láminas piezoeléctricas que tienen sus electrodos conectados a un resistor. Las ecuaciones de movimiento se calcularon mediante las ecuaciones de Lagrange.

Para una configuración particular del modelo y, para dos tipos de piezocerámicos, se calcularon las frecuencias naturales en condición de cortocircuito y de circuito abierto. Para ello, se consideraron diferentes conjuntos de funciones de aproximación y se compararon los resultados obtenidos con las frecuencias analíticas. Se analizó el efecto de la resistencia sobre las propiedades mecánicas del sistema, concluyendo que tiene una incidencia significativa en la rigidez y en la disipación. Además, se concluyó que la resistencia que permite cosechar la máxima energía debe calcularse, necesariamente, maximizando la potencia eléctrica, ya que la aproximación obtenida asumiendo a la disipación eléctrica como viscosa es imprecisa. Por último, se mostró que el desplazamiento mínimo del extremo de la viga se obtiene para una resistencia diferente de la que maximiza la disipación.

## REFERENCIAS

- Baruh, H., *Analytical Dynamics*, McGraw Hill, 1999.  
 Chopra, I. y Sirohi, J., *Smart Structures Theory*, Cambridge University Press, 2013.  
 Erturk, A. y Inman, D., *Piezoelectric Energy Harvesting*, Wiley, 2011.  
 Hodges, D.H. y Pierce, G.A., *Introduction to Structural Dynamics and Aeroelasticity*, Cambridge University Press, 2011.