

SOLUCIÓN DISCRETA EXPLÍCITA DE DOS PROBLEMAS DE CONTROL ÓPTIMO DE FRONTERA

EXPLICIT DISCRETE SOLUTION OF TWO BOUNDARY OPTIMAL CONTROL PROBLEMS

Julieta Bollati^a, Mariela C. Olguin^b y Domingo A. Tarzia^a

^a*Depto de Matemática-CONICET, Universidad Austral, Paraguay 1950, S2000FZF Rosario, Argentina.*

^b*Depto de Matemática, EFB-FCEIA, UNR, Avda. Pellegrini 250, S2000BPT Rosario, Argentina, mcolguin@fceia.unr.edu.ar*

Palabras clave: Control óptimo, Diferencias finitas, Soluciones explícitas.

Resumen. Se consideran dos sistemas estacionarios de conducción del calor, S y S_a , en un dominio multidimensional D acotado para la ecuación de Poisson con fuente de energía g . En uno de ellos se proponen condiciones de contorno mixtas (temperatura b en la porción de frontera F_1 , flujo de calor q sobre el borde F_2 y una condición adiabática sobre la restante porción de frontera F_3). En el otro sistema se reemplaza la condición sobre F_1 por una condición de flujo de calor convectivo con coeficiente de convección a . A su vez, para S y S_a , se establecen problemas de control óptimo (P) y (P_a) donde la variable de control será el flujo de calor q . Si el dominio D es rectangular, se conocen de manera explícita el control óptimo continuo y el estado correspondiente de los sistemas. En el presente trabajo, utilizando un esquema de diferencias finitas, se discretizan los sistemas S y S_a obteniéndose S_h y $S_{a,h}$ además de (P_h) y ($P_{a,h}$), siendo h el paso espacial en la discretización. El objetivo del trabajo es hallar las soluciones discretas explícitas de S_h , $S_{a,h}$, (P_h) y ($P_{a,h}$). Además obtener resultados de convergencia de los mismos cuando h y a tienden a cero e infinito respectivamente. Los resultados teóricos obtenidos se chequean con resultados numéricos.

Keywords: Optimal control, finite difference, Explicit solutions.

Abstract. We consider two steady state heat conduction systems, S and S_a in a multidimensional bounded domain D for the Poisson equation with source energy g . In one system we impose mixed boundary conditions (temperature b on the boundary F_1 , heat flux q on F_2 and an adiabatic condition on F_3). In the other system, the condition on F_1 is replaced by a convective heat flow condition with coefficient a . For each of these systems, we consider optimal control problems (P) and (P_a) where the control variable will be the heat flow q . If D is a rectangle, we know the explicit continuous optimal control and the corresponding state of the systems. In the present work, by using a finite difference scheme, we obtain the discrete systems (S_h) and ($S_{a,h}$) and problems (P_h) and ($P_{a,h}$), where h is the space step in the discretization. The goal of this work is to find the discrete explicit solutions of (S_h), ($S_{a,h}$), (P_h) and ($P_{a,h}$). In addition, we obtain convergence results when h tends to zero and when a tends to infinite. Some numerical simulations are provided in order to test theoretical results.

1. INTRODUCCIÓN

Se considera un dominio acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ cuya frontera regular Γ está compuesta por tres porciones de frontera F_i ($med(F_i) > 0$, para $i = 1, 2, 3$). Se presentan dos problemas estacionarios de conducción del calor con condiciones de frontera mixtas llamados (S) y (S_α) definidos por las ecuaciones (1,2) y (1,3) respectivamente que se muestran a continuación:

$$-\Delta u = g \text{ en } \Omega, \quad (1)$$

$$u = b \text{ sobre } F_1, \quad -\frac{\partial u}{\partial n} = q \text{ sobre } F_2, \quad -\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sobre } F_3, \quad (2)$$

$$-\frac{\partial u}{\partial n} = \alpha(u - b) \text{ sobre } F_1, \quad -\frac{\partial u}{\partial n} = q \text{ sobre } F_2, \quad -\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sobre } F_3, \quad (3)$$

donde g es la energía interna del sistema en Ω , $b > 0$ es la temperatura ambiente (constante) sobre el borde F_1 , q es el flujo de calor sobre el borde F_2 y α es el coeficiente de calor convectivo sobre el borde F_1 . Se supone que: $g \in H = L^2(\Omega)$ y $q \in Q = L^2(F_2)$. Estos problemas pueden ser considerados como un problema estacionario de Stefan (Tarzia, 1979).

Los problemas elípticos definidos antes en (1,2) y (1,3), tienen la formulación variacional dada en (Gariboldi y Tarzia, 2008). Puede verse que admiten solución única (Kinderhlerer y Stampacchia, 2000; Tarzia, 1979).

Vinculado a estos sistemas, se han considerado los problemas de control óptimo, llamados (P) y (P_α) , como los que se detallan a continuación (Lions, 1968; Tröltzsch, 2010). Sean los funcionales de costo cuadrático $J : Q \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ definido por:

$$J(q) = \frac{1}{2} \|u - z_d\|_H^2 + \frac{M}{2} \|q\|_Q^2 \quad (4)$$

y $J_\alpha : Q \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ definido por:

$$J_\alpha(q) = \frac{1}{2} \|u_\alpha - z_d\|_H^2 + \frac{M}{2} \|q\|_Q^2 \quad (5)$$

con $M > 0$ una constante dada, u la solución de (1,2), u_α la solución de (1,3) (ambas asociadas con el control $q \in Q$) y $z_d \in H$ el estado deseado de los sistemas continuos (S) y (S_α) . El problema de control óptimo de frontera continuo (P) asociado a (S) queda establecido como: Hallar el control óptimo continuo $q_{op} \in Q$ tal que

$$J(q_{op}) = \min_{q \in Q} J(q) \quad (6)$$

y el problema (P_α) se establece como: Hallar el control óptimo $q_{op_\alpha} \in Q$ tal que

$$J_\alpha(q_{op_\alpha}) = \min_{q \in Q} J_\alpha(q) \quad (7)$$

En el trabajo (Gariboldi y Tarzia, 2008) se obtuvieron resultados de existencia y unicidad para el sistema S y para el problema de control óptimo continuo (P) en determinado espacio y en el trabajo (Tarzia, 2016) se realizó el análisis numérico correspondiente. Además, en (Bollati et al., 2017) se obtuvieron las soluciones explícitas para los problema de control continuo (P) y (P_α) para un dominio rectangular en el plano, como así también para los sistemas (S) y (S_α) correspondientes.

El objetivo de este trabajo es el de hallar las soluciones discretas explícitas que aproximan a las soluciones continuas de los sistemas (S) y (S_α) y de los problemas de control óptimo de frontera asociados (P) y (P_α) , descritos por (1, 2), (1, 3), (4, 6) y (5, 7) respectivamente considerando un dominio Ω particular de forma rectangular en el plano y obtener estimaciones de error. Con este fin, en la Sección 2, siguiendo lo hecho en (Bollati et al., 2017) y utilizando el método de diferencias finitas (Crank, 1984) con h el parámetro de la discretización se tiene, de manera explícita, la solución discreta del sistema lineal de ecuaciones que resulta, llamado (S_h) . Además, se establece la función costo discreto, llamado así dado que se define en función de la solución del sistema (S_h) . Se plantea la familia de problemas de control óptimo discreto (P_h) , dependiente del parámetro h y nuevamente se analizan estimaciones de error. En la Sección 3, se trabaja en forma similar para establecer la discretización del sistema (S_α) y del problema (P_α) y a la vez obtener resultados de convergencia cuando el parámetro h tiende a cero. Por último, en la Sección 4, los resultados teóricos se chequean con resultados numéricos para distintos valores del paso espacial h cuando h tiende a cero.

Estas soluciones discretas explícitas podrían ser utilizadas para chequear cálculos numéricos en condiciones de dominios generales.

2. DISCRETIZACIÓN DE (S) Y (P)

Se considera, de aquí en adelante, el dominio $\Omega = (0, x_0) \times (0, y_0)$ con $x_0 > 0$ e $y_0 > 0$. Se notan F_i con $i = 1, 2, 3$ las porciones de frontera definidas como:

$$F_1 = \{(0, y) : y \in (0, y_0]\}, \quad F_2 = \{(x_0, y) : y \in (0, y_0]\}$$

y

$$F_3 = \{(x, 0) : x \in [0, x_0]\} \cup \{(x, y_0) : x \in [0, x_0]\}.$$

En (Bollati et al., 2017) se vio que la solución del sistema (S) establecido en (1 y 2) está dada por $u(x, y) = -\frac{1}{2}gx^2 + (gx_0 - q)x + b$ donde los datos b, g y q son constantes. Asumiendo, además, que el estado deseado z_d es constante en la expresión (4), se tiene que la función de costo cuadrático puede escribirse como:

$$J(q) = \frac{x_0 y_0}{2} \left\{ q^2 x_0^2 \left[D_1 + \frac{M}{x_0^3} \right] + q x_0 [D_2 g x_0^2 + D_3 (b - z_d)] + D_4 g^2 x_0^4 + D_5 (b - z_d)^2 + D_6 g x_0^2 (b - z_d) \right\}$$

donde $D_1 = \frac{1}{3}$, $D_2 = -\frac{5}{12}$, $D_3 = -1$, $D_4 = \frac{2}{15}$, $D_5 = 1$, $D_6 = \frac{2}{3}$.

Luego, el control óptimo de frontera del problema (P) , llamado q_{op} , y el estado óptimo continuo asociado a este control están dados por:

$$q_{op} = -\frac{D_2 g x_0^2 + D_3 (b - z_d)}{2x_0 \left(D_1 + \frac{M}{x_0^3} \right)}, \quad u_{q_{op}}(x, y) = -\frac{1}{2}g x^2 + (g x_0 - q_{op})x + b.$$

Se resalta que la importancia de las definiciones de las constantes D_i , $i = 1, \dots, 6$, se apreciarán en la siguiente sección cuando se considere el problema (P_α) .

Dada la simetría del dominio, resulta que la solución u del sistema (S) es independiente de la variable y . Entonces, aplicando un esquema en diferencias finitas y trabajando en forma similar al desarrollo hecho en (Bollati et al., 2017) se tiene la solución del sistema discreto (S_h) .

Sea $n \in \mathbb{N}$, se definen:

$$h = \frac{x_0}{n}, \quad x_i = (i-1)h, \text{ para } i = 1, \dots, n+1, \quad u_1 = b, \quad u_i \approx u(x_i, y) \text{ para } i = 2, \dots, n+1, \quad (8)$$

donde n es la cantidad de subintervalos a considerar en $[0, x_0]$, h es la amplitud constante de estos subintervalos y u_i es el valor aproximado de la función u evaluada en el punto $(x_i, y) \in \Omega$ para $i = 1, \dots, n+1$.

Lema 1: Sea la función

$$u_h(x, y) = (x_0 g - q - h g i)x + h^2 g \left(\frac{i^2 - i}{2} \right) + b, \quad (9)$$

definida $\forall x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, \dots, n$, e $y \in [0, y_0]$. Entonces, la solución continua $u(x, y)$ del sistema (S), puede aproximarse mediante la función discreta $u_h(x, y)$ en $\bar{\Omega}$. Además, para cada h se tiene que:

$$\|u_h - u\|_H \approx C_1 h, \quad C_1 = |g| \left(\frac{x_0^3 y_0}{12} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (10)$$

Demostración: Surge del método numérico utilizado y de la definición de norma en el espacio H .

Se define la función de costo discreta (ver 4) del siguiente modo:

$$J_h(q) = \frac{1}{2} \|u_h - z_d\|_H^2 + \frac{1}{2} M \|q\|_Q^2$$

donde la función u_h está dada en (9), h es el parámetro de la discretización en la variable espacial x y, como se dijo antes, el estado deseado z_d se supone constante. El control q también se considera constante. De la definición de norma en el espacio Q resulta:

$$J_h(q) = \frac{1}{2} y_0 \left\{ M q^2 x_0 + \sum_{i=1}^n \int_{x_i}^{x_{i+1}} [u_h(x, y) - z_d]^2 dx \right\}$$

y trabajando algebraicamente, se tiene:

$$J_h(q) = J(q) + \frac{x_0 y_0}{2} \left\{ h g x_0 \left[\frac{1}{3} q x_0 - \frac{5}{24} g x_0^2 - \frac{1}{2} (b - z_d) \right] + h^2 g \left[\frac{1}{36} x_0^2 g - \frac{1}{6} (b - z_d) + \frac{1}{12} q x_0 \right] + \frac{1}{24} g^2 x_0 h^3 + \frac{1}{180} g^2 h^4 \right\}.$$

Lema 2: Dados $q \in Q$ y $h > 0$, se tiene que

$$|J_h(q) - J(q)| \approx C_2 h \quad (11)$$

con $C_2 = \frac{1}{2} x_0^2 y_0 \left| g \left[\frac{1}{3} q x_0 - \frac{5}{24} g x_0^2 - \frac{1}{2} (b - z_d) \right] \right|$, constante independiente de h .

Demostración: A partir de la última expresión para $J_h(q)$, resulta que:

$$J_h(q) - J(q) = \frac{1}{2} x_0 y_0 h g \left\{ x_0 \left[\frac{1}{3} q x_0 - \frac{5}{24} g x_0^2 - \frac{1}{2} (b - z_d) \right] + h \left[\frac{1}{36} x_0^2 g - \frac{1}{6} (b - z_d) + \frac{1}{12} q x_0 \right] + \frac{1}{24} g x_0 h^2 + \frac{1}{180} g h^3 \right\}$$

de donde resulta (11).

Como la función $J_h(q)$ es una función polinómica de segundo grado en la variable q , es sencillo obtener la siguiente expresión analítica para la función J'_h :

$$J'_h(q) = \frac{1}{2} x_0^2 y_0 \left\{ 2 x_0 q \left(\frac{1}{3} + \frac{M}{x_0^3} \right) - \left[\frac{5}{12} g x_0^2 + (b - z_d) \right] + \frac{1}{3} g x_0 h + \frac{1}{12} g h^2 \right\}.$$

A partir de la condición de optimalidad y de trabajo algebraico, se obtiene el siguiente resultado:

Lema 3: Sea $h > 0$.

a) La expresión explícita para el control óptimo q_{op_h} está dada por :

$$q_{op_h} = q_{op} - A_1 g h - A_1 \frac{1}{4 x_0} g h^2, \quad A_1 = \frac{1}{6 \left(D_1 + \frac{M}{x_0^3} \right)}. \quad (12)$$

b) Además se tiene que valen las siguientes estimaciones de error:

$$i) \quad |q_{op_h} - q_{op}| \approx C_3 h \quad ii) \quad \left| J_h(q_{op_h}) - J(q_{op}) \right| \approx C_4 h$$

donde C_3 y C_4 son constantes independientes de h .

Demostración:

a) Se tiene a partir de la expresión para $J'(g)$.

b i) A partir de la expresión (12) con $C_3 = |g A_1|$.

b ii) A partir de las expresiones para $J(q)$ con $q = q_{op}$ y $J_h(q)$ con $q = q_{op_h}$, considerando (12) y trabajando algebraicamente, se tiene:

$$\begin{aligned} J_h(q_{op_h}) - J(q_{op}) &= \frac{1}{2} x_0 y_0 \left\{ x_0^2 A_1^2 g^2 \left(h^2 + \frac{1}{2 x_0} h^3 + \frac{1}{16 x_0^2} h^4 \right) \left(\frac{1}{3} + \frac{M}{x_0^3} \right) \right. \\ &+ h g x_0 \left[\frac{1}{3} q_{op} x_0 - \frac{5}{24} g x_0^2 - \frac{1}{2} (b - z_d) \right] + h^2 g \left[q_{op} \frac{x_0}{12} + A_1 g \frac{x_0^2}{3} + \frac{x_0^2}{36} - \frac{b - z_d}{6} \right] \\ &\left. + h^3 \frac{g^2 x_0}{6} \left(A_1 + \frac{1}{4} \right) + h^4 g^2 \left(\frac{A_1}{48} + \frac{1}{180} \right) \right\}, \end{aligned}$$

en consecuencia, se obtiene la tesis con $C_4 = \frac{1}{2} x_0^2 y_0 \left| g \left[\frac{1}{3} q_{op} x_0 - \frac{5}{24} g x_0^2 - \frac{1}{2} (b - z_d) \right] \right|$.

Lema 4: Sean $h > 0$, $u_{q_{op}}$ la solución de (1,2) para $q = q_{op}$ y $u_{h q_{op_h}}$ la solución discreta definida en (9) para cada valor de h donde $q = q_{op_h}$ es el control óptimo de (P_h) establecido en (12). Se verifica que:

$$(a) \quad \|u_{x h q_{op_h}} - u_{x q_{op}}\|_H \approx C_5 h, \quad (b) \quad \|u_{h q_{op_h}} - u_{q_{op}}\|_H \approx C_6 h,$$

donde las constantes C_5 y C_6 son independientes del parámetro h .

Demostración:

$$a) \quad \|u_{x h q_{op_h}} - u_{x q_{op}}\|_H^2 = y_0 \sum_{i=1}^n \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[(q_{op_h} - q_{op}) - h g i + g x \right]^2 dx = \frac{1}{3} x_0 y_0 \left\{ h^2 g^2 (3 A_1^2 - 3 A_1 + 1) + h^3 \frac{3 A_1 g^2}{2 x_0} \left(A_1 - \frac{1}{2} + \frac{A_1 h}{8 x_0} \right) \right\}$$

definiendo $C_5 = |g| \left| x_0 y_0 \left(A_1^2 + A_1 + \frac{1}{3} \right) \right|^{\frac{1}{2}}$, se obtiene el resultado deseado.

b) Utilizando la definición de u_h dada en (9), se tiene que: para $i = 1, \dots, n$

$$u_{h, q_{op_h}} - u_{q_{op}} = (q_{op_h} - q_{op} - g i h)x + g \frac{i^2 - i}{2} h^2 + \frac{1}{2} g x^2, \quad \forall x \in [x_i, x_{i+1}].$$

Entonces, de la definición de norma en el espacio H , resulta

$$\begin{aligned} & \|u_{h, q_{op_h}} - u_{q_{op}}\|_H^2 = \\ & = x_0 y_0 h^2 \left\{ \frac{A_1^2 g^2 x_0^2}{3} \left(1 + \frac{h}{4x_0}\right)^2 + \frac{g^2}{12} \left(x_0^2 + 5x_0 h + \frac{23h^2}{5}\right) - \frac{A_1 g^2 x_0}{3} \left(1 + \frac{h}{4x_0}\right) \left(x_0 + \frac{h}{4}\right) \right\} \end{aligned}$$

de donde se obtiene el orden deseado tomando $C_6 = |g| \left| x_0^3 y_0 \left(\frac{A_1^2}{3} + \frac{A_1}{3} + \frac{1}{12} \right) \right|^{\frac{1}{2}}$.

3. DISCRETIZACIÓN DE (S_α) - (P_α)

Considerando el dominio Ω y su frontera como en la Sección 2, en (Bollati et al., 2017) se mostró que la solución u_α del sistema (S_α) dado por la ecuación variacional (1,3) es de la forma:

$$u_\alpha(x, y) = -\frac{1}{2} g x^2 + (g x_0 - q)x + \frac{1}{\alpha} (g x_0 - q) + b \quad \forall (x, y) \in \Omega.$$

Asumiendo, además, que el estado deseado z_d es constante en la expresión (5), se tiene que la función de costo cuadrático se escribe como:

$$\begin{aligned} J_\alpha(q) = & \frac{x_0 y_0}{2} \left[q^2 x_0^2 \left(D_{1\alpha} + \frac{M}{x_0^3} \right) + q x_0 \left(D_{2\alpha} g x_0^2 + D_{3\alpha} (b - z_d) \right) \right. \\ & \left. + D_{4\alpha} g^2 x_0^4 + D_{5\alpha} (b - z_d)^2 + D_{6\alpha} g x_0^2 (b - z_d) \right] \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} D_{1\alpha} &= \frac{1}{3} + \frac{1}{\alpha x_0} + \frac{1}{\alpha^2 x_0^2} & D_{2\alpha} &= -\frac{5}{12} - \frac{5}{3\alpha x_0} - \frac{2}{\alpha^2 x_0^2} & D_{3\alpha} &= -1 - \frac{2}{\alpha x_0} \\ D_{4\alpha} &= \frac{2}{15} + \frac{2}{3\alpha x_0} + \frac{1}{\alpha^2 x_0^2} & D_{5\alpha} &= 1 = D_5 & D_{6\alpha} &= \frac{2}{3} + \frac{2}{\alpha x_0} \end{aligned}$$

y entonces, el control óptimo de frontera del problema (P_α) , llamado q_{op_α} , y por ende el estado óptimo continuo asociado a este control están dados por:

$$q_{op_\alpha} = -\frac{D_{2\alpha} g x_0^2 + D_{3\alpha} (b - z_d)}{2x_0 \left(D_{1\alpha} + \frac{M}{x_0^3} \right)}, \quad u_{q_{op_\alpha}}(x, y) = -\frac{1}{2} g x^2 + (g x_0 - q_{op_\alpha})x + \frac{1}{\alpha} (g x_0 - q_{op_\alpha}) + b.$$

Observación: Notar que $D_{i\alpha} \rightarrow D_i$ cuando $\alpha \rightarrow \infty$ ($i = 1, \dots, 6$).

Como antes, en lo que sigue, se trabaja con un problema unidimensional. Por lo tanto, considerando la discretización descrita en la Sección 2 y aplicando el método de diferencias finitas al sistema (S_α) descrito por las ecuaciones (1 y 3), se obtiene el sistema lineal de ecuaciones discretas $(S_{h\alpha})$

$$B_\alpha \bar{v} = T$$

donde $\bar{v} = (u_i)_{i=1, \dots, n+1}$ es el vector de las incógnitas en \mathbb{R}^{n+1} , B_α es la matriz de coeficientes tridiagonal de orden $n + 1$ de la forma:

$$B_\alpha = \begin{pmatrix} -(1 + \alpha h) & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ \vdots & \dots & \dots & & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

y el vector T , de orden $n + 1$, está dado por: $T = (-\alpha b h, -gh^2, \dots, -gh^2, -q h)^t$.

Puede verse que la matriz cuadrada B_α es inversible y por lo tanto el sistema de ecuaciones admite una única solución que es de la forma:

$$u_{\alpha, i} = \left(b + \frac{g x_0 - q}{\alpha}\right) + (i - 1) \left(g x_0 - q - \frac{g}{\alpha}\right) h - g \frac{i(i - 1)}{2} h^2, \quad i = 1, \dots, n + 1.$$

Lema 5:

a) Sea la función

$$u_{h\alpha}(x, y) = (x_0 g - q - h g i)x + \left(b + \frac{g x_0 - q}{\alpha} - \frac{g h}{\alpha} + \frac{i^2 - i}{2} g h^2\right), \quad (13)$$

definida $\forall x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, \dots, n$, e $y \in [0, y_0]$. Entonces, la solución continua $u_\alpha(x, y)$ del sistema (S_α) , puede aproximarse mediante la función discreta $u_{h\alpha}(x, y)$ en $\bar{\Omega}$.

b) Si u_α es la solución del sistema (S_α) y $u_{h\alpha}$ es la función dada en (13) para cada h , se tiene que:

$$\|u_{h\alpha} - u_\alpha\|_H \approx C_{1\alpha} h, \quad C_{1\alpha} = |g| \left[x_0 y_0 \left(\frac{x_0^2}{12} + \frac{x_0}{2\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Demostración:

Del método numérico utilizado surge a). Mientras que b) resulta a partir de la definición de norma en el espacio H y de las funciones u_α y $u_{h\alpha}$.

En forma similar a lo realizado en la Sección 2, se define la función de costo discreta $J_{h\alpha}$ (ver (5)) como sigue:

$$J_{h\alpha}(q) = \frac{1}{2} \|u_{h\alpha} - z_d\|_H^2 + \frac{1}{2} M \|q\|_Q^2$$

donde $u_{h\alpha}$ es el estado discreto solución del sistema $(S_{h\alpha})$ establecido en (13).

Trabajando algebraicamente, se tiene que puede re-escribirse como:

$$J_{h\alpha}(q) = J_\alpha(q) + \frac{1}{2} x_0 y_0 g h \left\{ \left(\frac{q x_0^2}{3} - \frac{5 g x_0^3}{24} - \frac{(b - z_d) x_0}{2} + \frac{3 x_0 q}{2\alpha} - \frac{7 g x_0^2}{6\alpha} - \frac{2(b - z_d)}{\alpha} + \frac{2(q - g x_0)}{\alpha^2} \right) \right. \\ \left. h \left(\frac{x_0^2 g}{36} - \frac{(b - z_d)}{6} + \frac{q x_0}{12} + \frac{2 g x_0 - q}{6\alpha} + \frac{g}{\alpha^2} \right) + h^2 g \left(\frac{x_0}{24} - \frac{1}{6\alpha} \right) + \frac{1}{180} g h^3 \right\}.$$

Lema 6: Dados $q \in Q$ y $h > 0$, se tiene que

i)

$$|J_{h\alpha}(q) - J_\alpha(q)| \approx C_{2\alpha} h$$

con $C_{2\alpha} = \frac{1}{2} x_0^2 y_0 \left| g \left(\frac{q x_0}{3} - \frac{5 g x_0^2}{24} - \frac{(b - z_d)}{2} + \frac{3 q}{2\alpha} - \frac{7 g x_0}{6\alpha} - \frac{2(b - z_d)}{x_0 \alpha} + \frac{2(q - g x_0)}{x_0 \alpha^2} \right) \right|$, constante independiente de h .

ii) La expresión explícita para el control óptimo $q_{op_{h\alpha}}$ está dada por:

$$q_{op_{h\alpha}} = q_{op\alpha} - ghA_{1\alpha} - A_{1\alpha} \frac{1}{4x_0} h^2 g, \quad A_{1\alpha} = \frac{\frac{1}{6} + \frac{3}{4\alpha x_0}}{D_{1\alpha} + \frac{M}{x_0^3}}. \quad (14)$$

Demostración:

A partir de la expresión para $J_{h\alpha}(q)$, surge inmediatamente i). Mientras que ii) se demuestra al igual que en el lema 3 de la Sección anterior.

Observación: Se puede observar fácilmente que $A_{1\alpha} \rightarrow A_1$, cuando $\alpha \rightarrow \infty$.

Lema 7: Dado $h > 0$ se tiene que valen las siguientes estimaciones de error:

$$i) \quad |q_{op_{h\alpha}} - q_{op\alpha}| \approx C_{3\alpha} h \quad ii) \quad \left| J_h(q_{op_{h\alpha}}) - J(q_{op\alpha}) \right| \approx C_{4\alpha} h$$

donde $C_{3\alpha}$ y $C_{4\alpha}$ son constantes independientes de h .

Demostración:

i) Obvia a partir de (14) con $C_{3\alpha} = |gA_{1\alpha}|$.

ii) Trabajando algebraicamente, la expresión para $J_{h\alpha}(q_{op_{h\alpha}}) - J_\alpha(q_{op\alpha})$ se obtiene el orden deseado con

$$C_{4\alpha} = \frac{x_0 y_0}{2} \left| q_{op\alpha} g \left(\frac{x_0^2}{3} + \frac{3x_0}{2\alpha} \right) + g^2 \left(\frac{-5x_0^3}{24} - \frac{7x_0^2}{6\alpha} - \frac{2x_0}{\alpha^2} \right) + g \left[- \left(\frac{x_0}{2} + \frac{2}{\alpha} \right) (b - z_d) + \frac{2q}{\alpha^2} \right] \right|.$$

Lema 8: Sean $h > 0$, $u_{q_{op\alpha}}$ la solución de (1,3) para $q = q_{op\alpha}$ y $u_{h q_{op_{h\alpha}}}$ la solución discreta definida en (13) para cada valor de h donde $q = q_{op_{h\alpha}}$ es el control óptimo de $(P_{h\alpha})$ establecido en (14). Se verifica que:

$$a) \quad \|u_{h q_{op_{h\alpha}}} - u_{q_{op\alpha}}\|_H \approx C_{5\alpha} h, \quad \text{donde} \quad C_{5\alpha} = |g| \left[x_0 y_0 \left(A_{1\alpha}^2 + A_{1\alpha} + \frac{1}{3} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$b) \quad \|u_{h q_{op_{h\alpha}}} - u_{q_{op\alpha}}\|_H \approx C_{6\alpha} h, \quad \text{donde}$$

$$C_{6\alpha} = \left\{ x_0 y_0 \left[x_0^2 \left(\frac{A_{1\alpha}^2}{3} + \frac{A_{1\alpha}}{3} + \frac{1}{12} \right) + \frac{g^2 x_0}{\alpha} \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} A_{1\alpha} \right) + \frac{g^2}{\alpha^2} (1 + A_{1\alpha})^2 \right] \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Demostración: Surge de manera análoga a las demostraciones anteriores.

Observación: Se tiene que las constantes obtenidas para todas las estimaciones verifican: $C_{i\alpha} \rightarrow C_i$, cuando $\alpha \rightarrow \infty$, para $i = 1, \dots, 6$.

4. RESULTADOS NUMÉRICOS

En esta sección, se obtienen algunos resultados numéricos para los problemas de control óptimo de frontera planteados en (6 y 7) y para los sistemas (S) y (S_α) definidos en (1,2) y (1,3).

Se consideran los siguientes datos: $\Omega = [0, 1]^2$, $b = 30^\circ\text{C}$, $q = 12^\circ\text{C}/m$. Además, $g = 10^\circ\text{C}/m^2$, $z_d = 40^\circ\text{C}$ el estado deseado y $M = 1$. El coeficiente de transferencia de calor convectivo $\alpha = 1000$ y para el mallado se suponen $h = 1/n$ para n entre 5 y 30.

Entonces, en la Figura 1 se aprecia el comportamiento de la familia de controles óptimos discretos $\{q_{op_h}\}$ cuando el parámetro $h = 1/n$ toma distintos valores para n entre 5 y 30. Puede

verse que la familia converge a q_{op} cuando $h \rightarrow 0$ que es la solución del problema de control óptimo de borde continuo (P) definido en (6) como se demostró en la Sección 2. Se nota que esta convergencia es en forma creciente.

En la Figura 2, se observa la familia de soluciones discretas $\{u_{h,q_{op,h}}\}_h$, donde el estado $u_{h,q_{op,h}}$ es la solución del sistema discreto (S_h) definido en (1,3) asociado al control óptimo $q_{op,h}$, para los distintos valores del parámetro h utilizados en la confección de la figura anterior. Se tiene nuevamente convergencia de $\{u_{h,q_{op,h}}\}_h$ a la solución exacta u_{op} del sistema (1,2) para $q = q_{op}$ como se vio en el Lema 4b. En este caso, la convergencia se da en forma decreciente, es decir que $u_{h,q_{op,h}} \geq u_{op} \quad \forall h > 0$.

Además, en la Figura 3 se observa un comportamiento análogo al descrito en la Figura 1 la familia de controles óptimos de borde discretos $\{q_{op,h,\alpha}\}$, definida en (14). Es decir, que esta familia converge como se ve en el Lema 7 y en forma decreciente al control óptimo continuo q_{op} establecido en (7).

En la Figura 4, la familia de soluciones discretas $\{u_{h,q_{op,h,\alpha}}\}_h$ del sistema discreto ($S_{h,\alpha}$) definido en (1,3), para los distintos valores del parámetro h utilizados en la confección de las figuras anteriores. Se tiene nuevamente convergencia de $\{u_{h,q_{op,h,\alpha}}\}_h$ a la solución exacta $\{u_{op,\alpha}\}$ del sistema (1,2) como se mostró en el Lema 8b. En este caso, la convergencia se da en forma decreciente, es decir que $u_{h,q_{op,h,\alpha}} \geq u_{op,\alpha} \quad \forall h > 0$.

5. CONCLUSIONES

En conclusión, utilizando los resultados previos, se cumplió el objetivo del trabajo. Es decir:

- i) se hallaron las soluciones de las familias de los sistemas discretos (S_h), ($S_{h,\alpha}$) y de los problemas de control óptimo de borde discretos (P_h) y ($P_{h,\alpha}$) en forma explícita,
- ii) se obtuvieron estimaciones para el error al aproximar las soluciones continuas de (S), ($S_{h,\alpha}$) y (P), ($P_{h,\alpha}$), respectivamente, mediante las soluciones discretas, tanto para el estado como para el control óptimo y la función de costo propuestos en un dominio rectangular en el plano,
- iii) se compararon los resultados teóricos con resultados numéricos para distintos valores del paso espacial h cuando h tiende a cero.

Estas soluciones discretas explícitas podrían ser utilizadas para chequear cálculos numéricos en condiciones de dominios generales.

6. AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido parcialmente subsidiado por los proyectos PIP No 0275 de CONICET - Univ. Austral, Rosario, Argentina y AFOSR - SOARD Grant FA 9550-14-1-0122.

REFERENCIAS

- Bollati J., Gariboldi C., y Tarzia D.A. Soluciones explícitas de problemas de control óptimo distribuido, frontera y distribuido-frontera. *VI MACI 2017, G. Soto, N. Acosta (Eds.), Matemática Aplicada, Computacional e Industrial*, 6:521–524, 2017.
- Crank J. *Free and moving boundary problems*. Clarendon Press, 1984.
- Gariboldi C. y Tarzia D.A. Convergence of boundary optimal control problems with restrictions in mixed elliptic stefan-like problems. *Advances in Differential Equations and Control Processes*, 1:113–132, 2008.

Kinderlehrer D. y Stampacchia G. *An introduction to variational inequalities and their applications*. SIAM, Philadelphia, 2000.

Lions J. *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*. Dunod, Paris, 1968.

Tarzia D.A. Sur le problème de stefan à deux phases. *C.R. Acad. Sc. Paris, Serie A*, 288:941–944, 1979.

Tarzia D.A. Double convergence of a family of discrete distributed mixed elliptic optimal control problems with a parameter. *in Proceedings of the 27th IFIP TC 7 Conference on System Modeling and Optimization, CSMO 2015, IFIP AICT 494, L. Bociu and J.-A. Desideri and A. Habbal (Eds.), Springer, Berlin, páginas 493–504, 2016.*

Tröltzsch F. *Optimal control of partial differential equations: Theory, methods and applications*. Amer. Math. Soc., Providence, 2010.

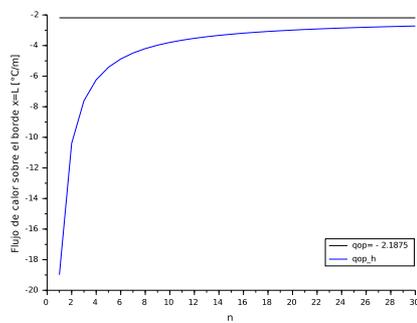


Figura 1: Convergencia de $\{q_{op_h}\}_h$, $h = \frac{1}{n}$

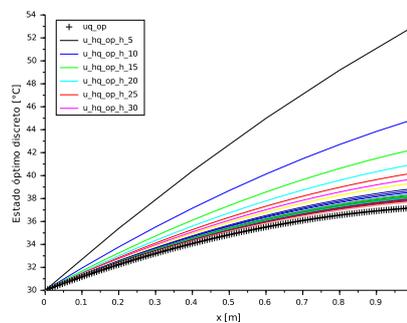


Figura 2: Comparación entre la solución exacta y diferentes soluciones aproximadas

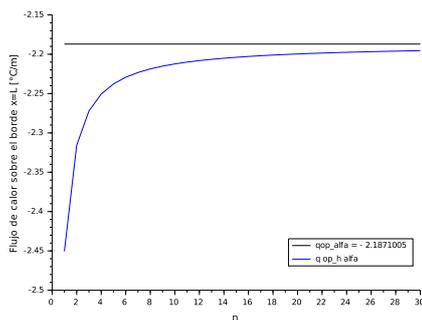


Figura 3: Convergencia de $\{q_{op_h, \alpha}\}_h$, $h = \frac{1}{n}$

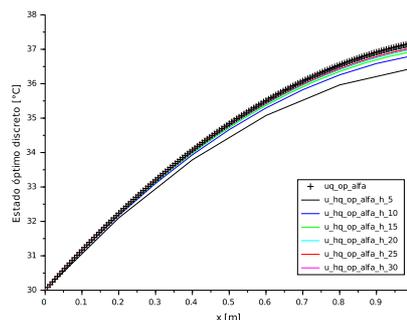


Figura 4: Comparación entre la solución exacta y diferentes soluciones aproximadas