

CASI BIFURCACIÓN EN SISTEMAS DISCRETOS DE COMPORTAMIENTO POSCRÍTICO INESTABLE SOMETIDOS A CARGAS DE PULSO

QUASI BIFURCATION OF DISCRETE SYSTEMS WITH UNSTABLE POST- CRITICAL BEHAVIOR UNDER PULSE LOADS

Mariano P. Ameijeiras^a y Luis A. Godoy^b

^aUniversidad Nacional de Córdoba, FCEFyN, Córdoba, Argentina, m.ameijeiras@unc.edu.com

^bInstituto de Estudios Avanzados en Ingeniería y Tecnología (IDIT UNC-CONICET) y FCEFyN,
Universidad Nacional de Córdoba, Argentina, luis.godoy@unc.edu.ar

Palabras clave: Pandeo, Dinámica no lineal, Cargas impulsivas.

Resumen. Se han identificado a las explosiones como los accidentes más frecuentes que afectan la industria petrolera. Del total de incidentes en los que participan tanques de almacenamiento, el 74% de los accidentes ocurrieron en refinerías o plantas de almacenamiento de petróleo. Las consecuencias económicas y ambientales propiciaron el estudio de cáscaras cilíndricas de pared delgada sometidas a ondas explosivas. Este trabajo analiza sistemas no lineales geométricos de 1 y 2 grados de libertad, de comportamiento poscrítico inestable, sometidos a cargas de muy corta duración respecto de sus períodos fundamentales. Se explora la aplicación del criterio de casi bifurcación de Lee. Por analogía con el caso estático se define el movimiento fundamental como la trayectoria dinámica que sigue un grado de libertad determinado a un determinado nivel de carga; cualquier trayectoria que, a partir de la anterior, y dada una perturbación en un instante dado, se aparte de la fundamental, se interpreta como una bifurcación al movimiento original y se le ha dado el nombre de casi bifurcación. La validez de la aplicación del criterio mencionado se complementa con la utilización de un indicador tipo Budiansky y Roth, ampliamente aceptado dentro de la temática de estudio.

Keywords: Buckling, Non-linear vibrations, Pulse loads.

Abstract. Explosions have been identified as the most frequent accidents that affect the oil industry. Of the total incidents involving storage tanks, 74% of the accidents occurred in refineries or oil storage plants. The economic and environmental consequences led to the study of thin-walled cylindrical shells subjected to explosive waves. This paper analyzes geometrically nonlinear systems with 1 and 2 degrees of freedom and unstable postcritical behavior subjected to loads of very short duration with respect to their fundamental periods. The application of the criterion of quasi-bifurcation of Lee is explored. By analogy with the static case, the fundamental motion is defined as the dynamic path that follows a certain degree of freedom at a given load level; any path that, from the previous one, and given a disturbance at a given moment, departs from the fundamental one, is interpreted as a bifurcation to the original movement and has been given the name of quasi-bifurcation. The validity of the application of the aforementioned criterion is complemented by the use of a Budiansky and Roth type indicator, which is widely accepted within the subject of study.

1 INTRODUCCIÓN

La ingeniería civil y mecánica ha prestado atención en la última década a efectos estructurales en láminas delgadas sometidas a efectos de explosiones. Aunque el estudio de explosiones no es un tema nuevo, sin embargo, la particularidad de las estructuras de pared delgada se encuentra en que pueden excederse límites de estabilidad, además de condiciones asociadas a resistencia. En esta investigación interesa la estabilidad de tanques de pared delgada (como se emplean en la industria del petróleo), utilizados para el almacenamiento de crudo o de fluidos combustibles.

Los estudios en esta área son bastante recientes; la evidencia empírica más importante fue obtenida por un grupo de la Universidad del Valle de Loire (Duong et al., 2012), quienes ensayaron modelos a escala reducida, rígidos y flexibles, bajo distintos niveles de explosión caracterizados por la distancia del foco a la estructura y la intensidad. Otros estudios se realizaron en la Universidad de Carolina del Norte en Charlotte (UNCC) en Estados Unidos, sobre un modelo rígido en el que se midieron presiones, distribución y duraciones de pulso (Weggel y Whelan, 2013). Evidencia sobre tanques reales han ocurrido asociados a incendios, en los que algún tanque explota y sus efectos causan deformaciones permanentes en tanques vecinos. Tanto en casos de observaciones como de ensayos los daños producidos están asociados a un nivel fijo de explosión, de modo que puede establecerse cotas en el mejor de los casos pero no se identifican umbrales realistas por debajo de los cuales la estructura funcionará de manera segura. Esto ocasiona una necesidad de modelar computacionalmente la respuesta estructural, y requiere de criterios de estabilidad bajo cargas impulsivas. En este trabajo se discuten posibilidades de establecer criterios de estabilidad, considerando no linealidad geométrica sobre sistemas simples.

En lugar de trabajar directamente con geometrías de tanques metálicos, que es el objetivo último de esta línea de investigación, este trabajo se enfoca en sistemas de uno y dos grados de libertad (GDL), para los que pueden establecerse soluciones semi analíticas que pueden tratarse con programas de manipulación simbólica que mejoran la conceptualización del problema.

Para osciladores autónomos y lineales con rigidez positiva y amortiguamiento nulo o positivo, no hay inestabilidad dinámica en el sentido que los movimientos se mantienen acotados y la estabilidad o falta de ella (escape) debe analizarse para grandes desplazamientos (respuesta no lineal). De esta forma, si se busca analizar inestabilidad con amortiguamiento y rigidez positiva, los planteamientos surgen a partir de teorías no lineales que resultan en sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales.

2 UN CRITERIO ENERGÉTICO DE CARGA CRÍTICA

El criterio energético propuesto por Simites (1990), sirve para estimar el pandeo que ocurre como una forma de movimiento no acotado o búsqueda de otros centros de oscilación. Se puede enunciar que el pandeo dinámico ocurre cuando

$$T^D = V^M \quad (1)$$

donde V^M es la energía elástica del sistema evaluada en un estado crítico que se definirá (o tomará el valor de máximo o límite) y T^D es la energía cinética que se le imparte al sistema inicialmente y que se desconoce aún. Luego para un sistema aislado de una partícula

$$T^D = \frac{1}{2} m^t \dot{U}_0^2 \quad (2)$$

siendo \dot{U}_0 es la velocidad inicial impartida a un sistema de masa total m^t . Luego se busca

expresar la velocidad inicial como función de la carga de pico P_0 . La cantidad de movimiento P impartida al sistema será

$$P = m^t \dot{U}_0 \tag{3}$$

Por otra parte, el impulso Im^+ de la fase positiva de un pulso con decaimiento lineal (triangular) de duración t_0 está dado por

$$Im^+ = \int_0^{t_0} P_0 \left(1 - \frac{t}{t_0}\right) dt = \frac{P_0 t_0}{2} \tag{4}$$

Igualando (3) con (4), a través del teorema de impulso y conservación de cantidad de movimiento, se obtiene

$$\dot{U}_0 = \frac{P_0 t_0}{2m^t} \tag{5}$$

Se obtiene entonces la velocidad inicial como una función de la acción P_0 . Se incorpora (5) en (2) y el resultado en (1) y así se obtiene la carga "de pulso" a impartirle al sistema que produce inestabilidad dinámica

$$P^D = \frac{2\sqrt{2m^t V^M}}{t_0} \tag{6}$$

El desarrollo realizado posee la desventaja que se debe reconocer previamente "la forma" del campo de desplazamientos que produce la inestabilidad dinámica y de esa forma debe extraerse la energía necesaria V^M para poder vincularla con la acción.

2.1 Sistema de 1 GDL poscrítico inestable

Se analiza a continuación el sistema de la [Figura 1](#), de comportamiento estático poscrítico inestable y al que se somete a la acción de una carga impulsiva triangular $P(t)$.

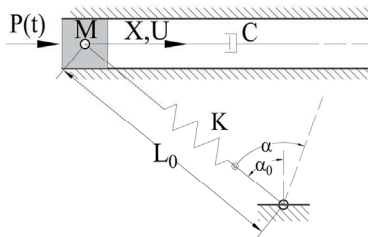


Figura 1: Modelo poscrítico inestable de 1 GDL.

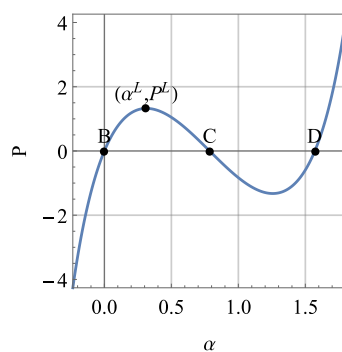


Figura 2: Trayectoria fundamental.

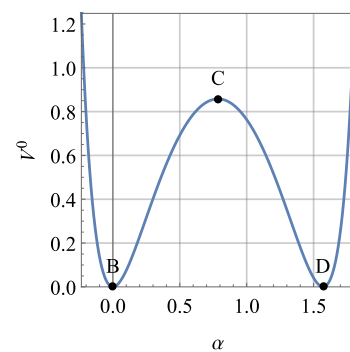


Figura 3: Energía interna para $P=0$.

Las ecuaciones de movimiento surgen del criterio energético de Lagrange

$$\text{para } i=1,2,\dots,n \tag{7}$$

donde T es la energía cinética, V es la energía potencial conservativa, D es la función de disipación de Rayleigh, Q_i^{nc} son las fuerzas generalizadas no conservativas que excluyen

amortiguamiento viscoso y q_i las coordenadas generalizadas. En el caso de 1 GDL que nos ocupa, se ha considerado $\alpha(t)$ como variable generalizada.

Se utilizan los siguientes datos: $\alpha_0=\pi/4$, $L_0=\sqrt{2}\text{m}$, $K=10\text{MN/m}$ y $M=1\text{MN}^2/\text{m}$. El período fundamental resulta $T_n=2.81\text{s}$ y se propone una duración de la fase positiva de P , $t_0=0.05\text{s}$ ($t_0/T_n=0.018<0.25$). Se considera un amortiguamiento del 1% del crítico.

Inicialmente se establece numéricamente la trayectoria fundamental. Se determina, además, la curva de energía interna bajo carga $P=0$. Para ello, se desarrolla un código orientado a funciones en [Wolfram Mathematica](#). Los resultados se muestran en la [Figura 2](#).

En la [Figura 2](#) se observa que la carga límite previa al salto brusco (*snap through*) es $P^L=1.33\text{MN}$; este límite se obtiene para un valor de $\alpha^L=0.314$. En este caso no pueden aparecer bifurcaciones porque hay un solo grado de libertad. En la [Figura 3](#) existen dos posibles puntos de equilibrio estable bajo $P=0$ (sistema sometido a impulso): uno para $\alpha=0$ y otro para $\alpha=\pi/2$. Esto indica dos centros neutralmente estables. Además, la [Figura 3](#), muestra que la energía potencial máxima bajo $P=0$ es $V^M=0.858\text{MNm}$ y se da para $\alpha^M=\alpha^D=0.785$. El valor de α^D que produce inestabilidad dinámica es muy superior al de inestabilidad estática α^L . Además, la energía potencial para el punto límite estático es $V^L=0.426\text{MNm}$.

Luego con la ecuación (6) y V^M se aproxima a la carga de pico impulsiva que produce inestabilidad dinámica en el sistema $P^D\approx 52.4\text{MN}$. Luego, se analiza la ecuación de movimiento (7) con un valor de carga impulsiva de pico (P_0) menor y dos valores distintos y mayores a la carga crítica dinámica determinada. Para la solución de la ecuación de movimiento se utiliza el código implícito IDA del paquete [SUNDIALS \(2005\)](#), que está disponible en el software [Wolfram Mathematica](#). Los resultados pueden verse en la [Figura 4](#) y la [Figura 5](#).

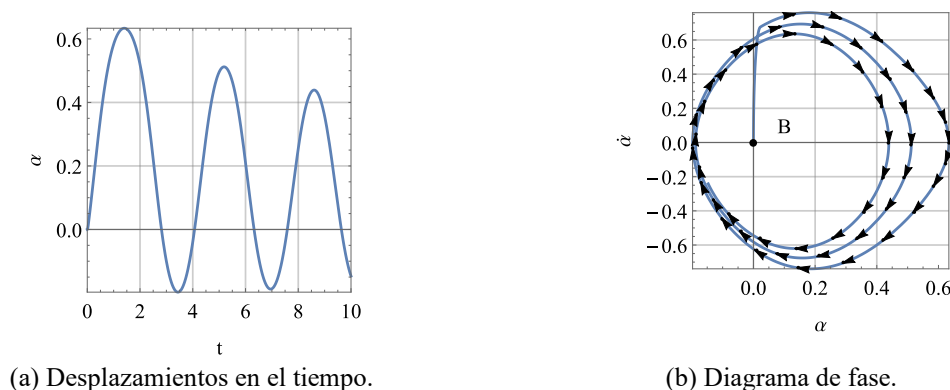


Figura 4: Carga tipo detonación $P_0=52\text{MN}$.

Si la carga de pico es menor a la carga dinámica, $P_0 < P^D$, entonces el sistema oscila asintóticamente estable alrededor de su posición inicial ([Figura 4](#)). Si el impulso inicial impartido al sistema hace que este pase por sobre el punto de energía potencial máxima bajo $P=0$ ($V^M=0.858\text{MNm}$) existirán dos centros neutralmente estables en $\alpha=0$ y otro en $\alpha=\pi/2$ que coinciden, como es de esperar, con los puntos de energía elástica mínima bajo $P=0$ de la [Figura 3](#). La carga crítica debe ser levemente mayor a la mínima necesaria debido a la disipación viscosa considerada ($P^D\approx 53.5$). De aquí se observa que el amortiguamiento, para los casos analizados en este trabajo, tiene efectos estabilizantes.

Además, de la [Figura 4](#), el sistema puede pasar por sobre puntos y desplazamientos estáticos límite o de bifurcación ($\alpha > 0.314$) y aun así sigue siendo estable en el sentido de que no hay un salto hacia otros puntos de mayor estabilidad.

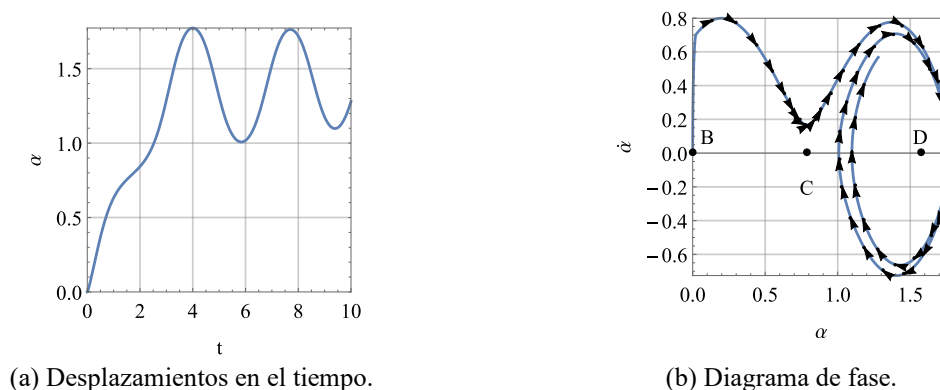


Figura 5: Carga tipo detonación $P_0=54\text{MN}$.

La Figura 5 muestra que cuando $P > P^D$ el sistema recorre una trayectoria inestable y los dos puntos estables ($\alpha=0$ y $\alpha=\pi/2$) se convierten en focos estables que compiten como atractores y el espacio de fase se divide en dos, cuyas partes conducen a uno u otro punto asintóticamente estable.

2.2 Sistemas de 2 GDL poscrítico inestable

Se analiza a continuación el sistema de la Figura 6, de comportamiento poscrítico inestable y al que se somete a la acción de una carga impulsiva $P(t)$ de decaimiento lineal. Se consideran $\alpha(t)$ y $\beta(t)$ como grados de libertad generalizados.

Se utilizan los siguientes datos: $\alpha_0=\beta_0=0.2\text{rad}$, $L_0=1\text{m}$, $K_f=1\text{MN/m}$, $K_m=1000\text{MN/m}$ y $M=10\text{MN}\cdot\text{s}^2/\text{m}$. Estos mismos datos se utilizaron en Ameijeiras y Godoy (2018). Se determinan los períodos naturales de vibración: $T_1=6.71\text{s}$, $T_2=2.22\text{s}$ y $t_0=0.05\text{s}$ ($t_0/T_1=0.0075 < 0.25$). El sistema se analiza sin y con amortiguamiento viscoso $C=0.1\text{MN}\cdot\text{s}/\text{m}$.

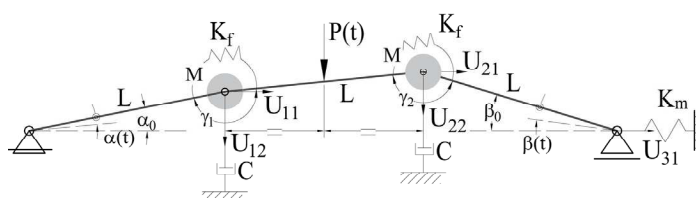


Figura 6: Modelo poscrítico inestable de 2 GDL.

Del mismo modo que en el caso de 1GDL se grafica y analiza la superficie de energía interna bajo carga $P=0$. Se desarrolla, además, un modelo numérico para estudiar la bifurcación (Abaqus, LBA) y la trayectoria fundamental (Abaqus, Riks, GNA). Esto último se analiza teniendo en cuenta imperfecciones iniciales en el sistema que se definen por:

$$\xi = \frac{|\alpha_0 - \beta_0|}{\beta_0} \tag{8}$$

La Figura 7 muestra la superficie de energía potencial para $P=0$ (sistema con impulso). En la Figura 8 se hace la misma representación, pero a través de superficies de nivel. Notar que existen dos posibles puntos de equilibrio estable (mínimos locales). Uno en $\alpha=\beta=0$, $V_0=0$, y otro en $\alpha=\beta=0.4$, $V_0=0.16\text{MN}\cdot\text{m}$ (puntos 0 y D). También existen tres máximos locales no estables: (i) punto A, $\alpha=0.2$ y $\beta=0.2$ ($V_0=0.84\text{MN}\cdot\text{m}$), (ii) punto B, $\alpha=0.4$ y $\beta=0.2$

($V_0=0.18\text{MNm}$) y (iii) punto C $\alpha=0.2$ y $\beta=0.4$ ($V_0=0.18\text{MNm}$).

La energía necesaria para llegar de O hasta A, garantiza un movimiento de escape de la oscilación en el origen. Energías menores pueden producir una trayectoria de escape (por ejemplo, por $\alpha=0.4$ y $\beta=0.2$ o por $\alpha=0.2$ y $\beta=0.4$), pero no está garantizada la ocurrencia de inestabilidad. Estos puntos, que garantizan o pueden producir inestabilidad, se refieren en la literatura como MGCL (del inglés, *Minimum Guaranteed Critical Load*) y MPCL (del inglés, *Minimum Possible Critical Load*) respectivamente. Aquí es útil advertir que la aplicación de (6) es ambigua por cuanto se debería conocer por donde llega el sistema a inestabilidad para determinar P^D . Para la MGCL la carga crítica dinámica sin amortiguamiento basada en (6) es $P^D=231.9\text{MN}$ y para MPCL, $P^D=107.3\text{MN}$.

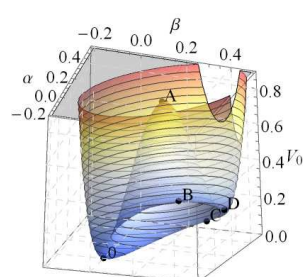


Figura 7: Energía potencial con $P=0$, 3D.

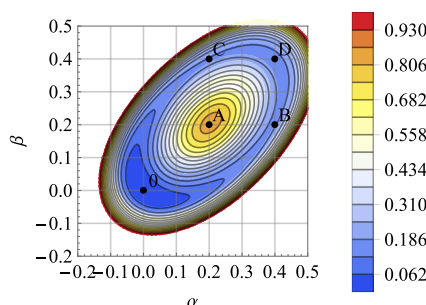


Figura 8: Energía potencial con $P=0$, superficies de nivel.

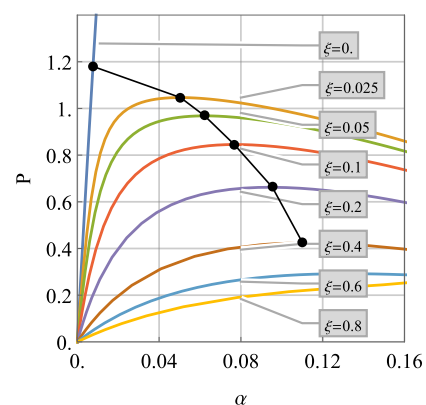


Figura 9: Trayectorias fundamentales perfectas e imperfectas.

Con un modelo del MEF/Abaqus de pandeo lineal, se obtiene la carga de bifurcación $P^B=1.18$, que se produce con una configuración $\alpha^B=\beta^B=0.00764$. Luego, con un algoritmo de Riks/Abaqus, avanzando sobre la trayectoria fundamental se llega a una carga límite $P^L=6.23$ en una configuración desplazada $\alpha^L=\beta^L=0.0857$. Sin embargo, esa carga límite carece de interés porque el sistema estático ya alcanzó inestabilidad por bifurcación para una carga menor. La Figura 9 muestra lo indicado en conjunto con las trayectorias estáticas imperfectas.

Para este caso, la energía potencial mínima posible bajo $P=0$ para que se produzca escape ($V_0=0.18\text{MNm}$) se da para valores de α y β muy superiores a los límites estáticos.

3 DESARROLLO DE UN CRITERIO DE CARGA LÍMITE DINÁMICA

Como se ha mencionado, el criterio de energía límite aplicado a sistemas de uno y dos grados de libertad requiere del conocimiento previo de la configuración crítica. De este modo, se explora e implementa en este apartado un criterio novedoso a partir de la ampliación del criterio de Lee (1977). La validez del método propuesto se realiza para los sistemas previamente estudiados.

Lee demostró que, a partir de la respuesta perturbada de un sistema dado, este pasa en un tiempo dado, t_{cr} , sobre una configuración inestable cuando la proyección del vector aceleración perturbada, $\ddot{\zeta}_r(t)$, sobre el desplazamiento perturbado, $\zeta_r(t)$, es positiva, esto es

$$\ddot{\zeta}_r(t)\zeta_r(t) > 0, \quad t = t_{cr} \text{ (suma en } r, r=1, 2, \dots, n) \quad (9)$$

y es estable en caso contrario, siendo n el número de GDL.

Para el sistema de un grado de libertad, se determina la respuesta para una carga de pulso

inferior a la dinámica con amortiguamiento ($P_0=52$) para un caso sin perturbación inicial y otro caso dando una perturbación a la posición inicial de $\Delta\alpha=-0.02$. Los resultados del movimiento en el tiempo para las trayectorias sin perturbar (α) y perturbada (α_p) y la aplicación del criterio de Lee, proyección de la perturbación del movimiento perturbado sobre la aceleración perturbada, esto es del producto $\ddot{\zeta}_r(t)\zeta_r(t)$, se muestran en la **Figura 10**.

Se observa que aún con el campo restitutivo en la misma dirección al desplazamiento, $\ddot{\zeta}_r(t)\zeta_r(t) > 0$ (**Figura 10b**), el movimiento se mantiene acotado, esto es, la trayectoria sin perturbar se mantiene cercana a la que posee una perturbación inicial. Esto demuestra que el indicador de Lee no es suficiente para asegurar que la trayectoria se bifurque en algún instante.

Del mismo modo, se analiza el sistema partiendo de un impulso muy próximo al crítico con amortiguamiento ($P_0=53.4$) al que se lo analiza con y sin la perturbación especificada. En la **Figura 11a** se observa como una perturbación con el impulso cercano al crítico produce una casi bifurcación en la trayectoria perturbada ($t \approx 1.5s$). Por otro lado, y como es de esperar, tal bifurcación queda evidenciada en los valores positivos del producto de Lee (**Figura 11b**).

De lo anterior se concluye que el coeficiente de Lee es un indicador necesario, pero no suficiente para alcanzar inestabilidad dinámica.

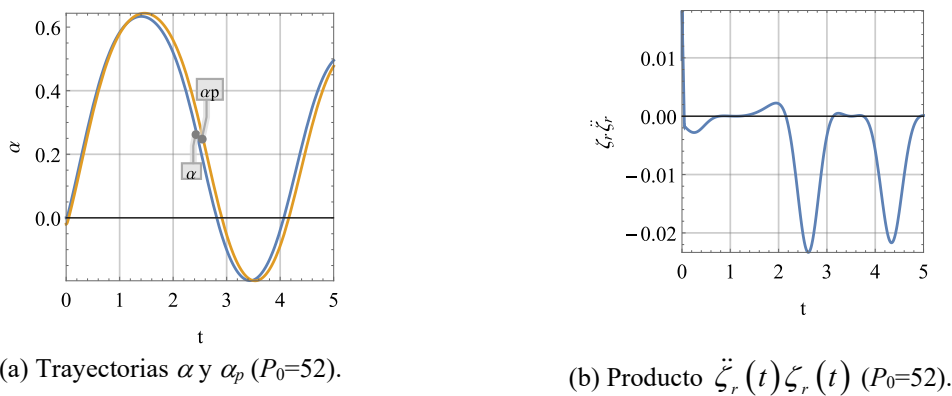


Figura 10: Determinación de trayectorias con y sin perturbación y del coeficiente de Lee para $P_0 < P^D$ (1 GDL)

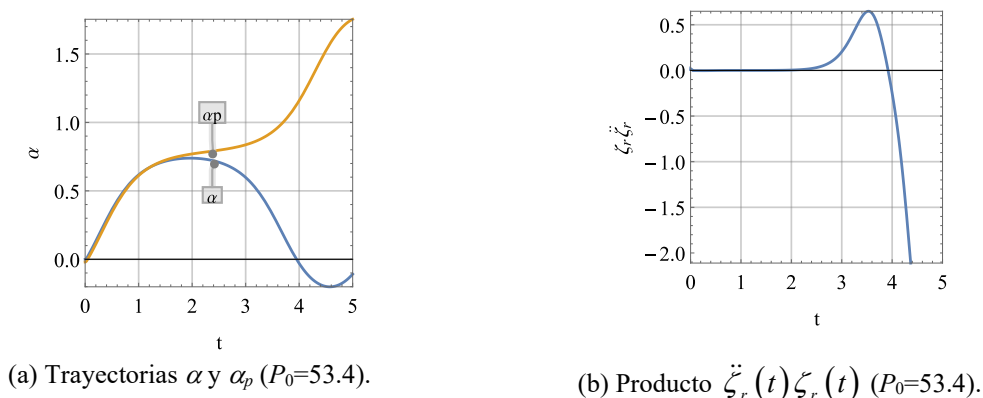


Figura 11: Determinación de trayectorias con y sin perturbación y del coeficiente de Lee para $P_0 \approx P^D$ (1 GDL)

Se puede apreciar, observando la **Figura 10b** y la **Figura 11b**, que en términos integrales, el área bajo la curva de valores positivos es mucho mayor para el caso cercano al crítico. Se

propone entonces extender el indicador de Lee del siguiente modo

$$C_e = \int_t \ddot{\zeta}_r(t) \zeta_r(t) dt \tag{10}$$

donde C_e se denomina *coeficiente de estabilidad dinámica* y mide el área positiva bajo la curva $\ddot{\zeta}_r(t) \zeta_r(t)$.

A continuación, el criterio sugerido de estabilidad se utilizará para predecir la carga crítica del sistema de 1GDL en estudio.

Se consideran entonces incrementos sucesivos de la carga impulsiva P_0 con y sin perturbación. Luego se miden, para esos casos: las diferencias entre el movimiento sin perturbar y perturbado ($\alpha - \alpha_p = \Delta\alpha$), el producto de Lee, $\ddot{\zeta}_r(t) \zeta_r(t)$ y el coeficiente de estabilidad C_e (10) propuesto en este trabajo. Notar (Figura 12) que la diferencia entre la trayectoria fundamental y perturbada aumenta a medida que la carga se aproxima a la crítica. En la Figura 13 se ha representado el producto de Lee y se observa por un lado que la positividad no indica casi bifurcación y, además, que el área bajo el sector positivo de la curva aumenta a medida que se acerca a la carga crítica.

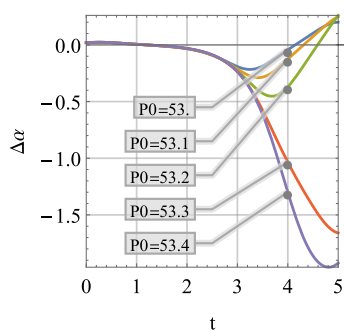


Figura 12: Trayectorias $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_p$.

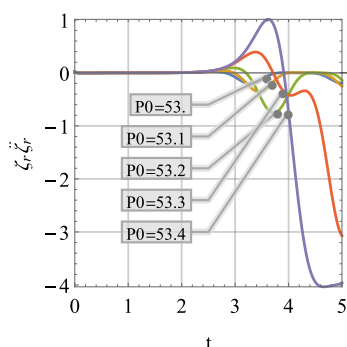


Figura 13: Producto $\ddot{\zeta}_r(t) \zeta_r(t)$.

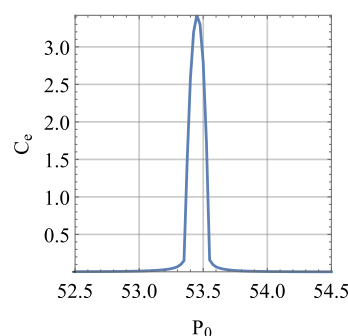


Figura 14: Coeficiente de estabilidad C_e para $52.5 \leq P_0 \leq 54.5$ (1 GDL).

En la Figura 14 se ha graficado el coeficiente de estabilidad propuesto en este trabajo en función de un rango de valores que incluyen la carga crítica dinámica. El máximo de esa curva (mayor valor de la Ec. 10), indica la carga crítica dinámica sin ambigüedad.

Se analiza a continuación la aplicación del criterio para el sistema de 2 GDL. Se determina la respuesta para una carga de pulso inferior y otra cercana a la dinámica crítica, con valores $P_0=70$ y $P_0=101$, respectivamente, de un sistema sin amortiguamiento ($C=0$) y perfecto ($\xi=0$) para un caso sin perturbación inicial y otro caso dando tres perturbaciones iniciales $(\Delta\alpha, \Delta\beta)=(0.001, 0)$, $(\Delta\alpha, \Delta\beta)=(0.0005, 0)$ y $(\Delta\alpha, \Delta\beta)=(0.0001, 0)$. Los resultados del movimiento en el tiempo para las trayectorias sin perturbar (α, β) y perturbada (α_p, β_p) y la aplicación del criterio de Lee, proyección de la perturbación del movimiento perturbado sobre la aceleración perturbada, esto es la sumatoria $\ddot{\zeta}_r(t) \cdot \zeta_r(t)$ ($r=1,2$), se muestran en la Figura 15 y la Figura 16.

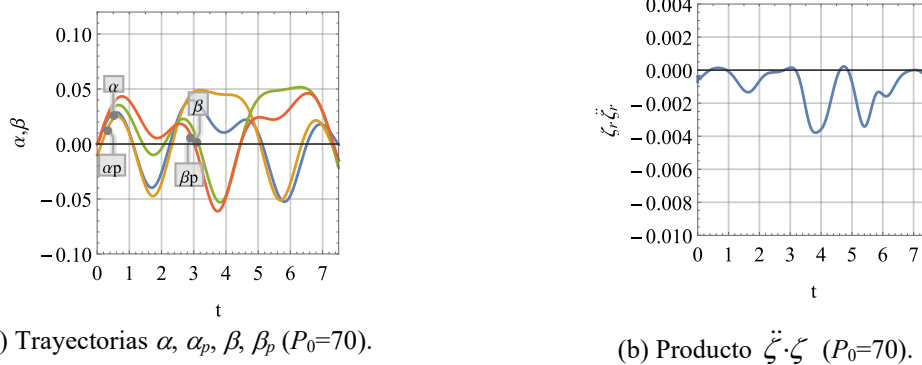


Figura 15: Determinación de trayectorias con y sin perturbación y del coeficiente de Lee para $P_0 < P^D$ (2 GDL)

De la Figura 15 se observa que aún con el campo restitutivo en la misma dirección al desplazamiento, $\ddot{\zeta}_r(t)\zeta_r(t) > 0$ (Figura 15b), el movimiento se mantiene acotado. Esto demuestra que el indicador de Lee no es condición suficiente para asegurar que la trayectoria se bifurque en algún instante. En la Figura 16a se observa como una perturbación con el impulso cercano al crítico produce una casi bifurcación en la trayectoria perturbada (para un tiempo $t \approx 3s$). Por otro lado, y como es de esperar tal bifurcación queda evidenciada en los valores positivos del producto de Lee (Figura 16b).

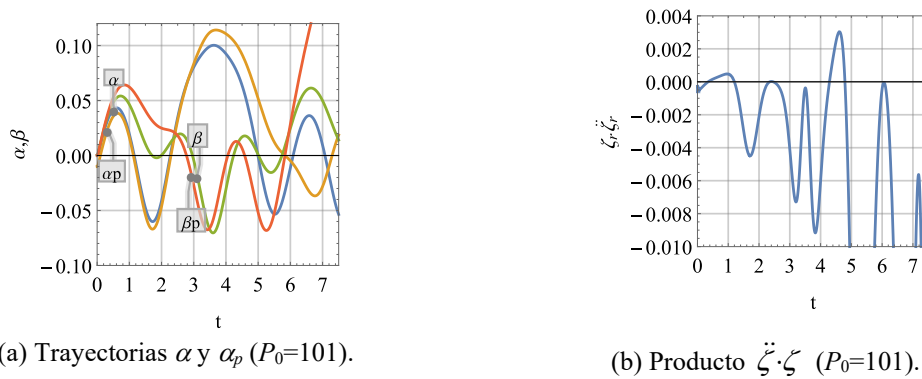


Figura 16: Determinación de trayectorias con y sin perturbación y del coeficiente de Lee para $P_0 \approx P^D$ (1 GDL)

De lo anterior también se concluye que el coeficiente de Lee es un indicador necesario, pero no suficiente.

El criterio de estabilidad sugerido se utiliza para predecir la carga crítica del sistema de 2GDL en estudio. Se consideran incrementos sucesivos de la carga impulsiva P_0 con y sin perturbación. En la Figura 17 se observa que la diferencia $\Delta\alpha$ entre la trayectoria fundamental y perturbada aumenta a medida que la carga se aproxima a la crítica. Para valores cercanos al crítico esa diferencia diverge. En la Figura 18 se ha representado el producto de Lee; se observa por un lado que la positividad no indica casi bifurcación y, además, que el área bajo el sector positivo de la curva aumenta a medida que se acerca a la carga crítica. Por último, en la Figura 19 se ha graficado el coeficiente de estabilidad dinámica propuesto en este trabajo en función de un rango de valores que incluyen la carga crítica dinámica. Notar que el máximo de esa curva señala la carga crítica dinámica.

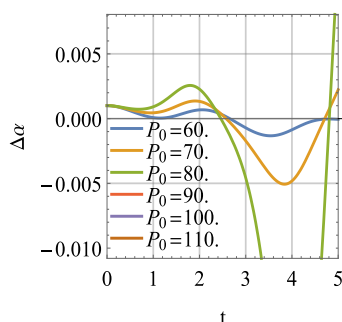


Figura 17: Trayectorias $\Delta\alpha = \alpha - \alpha_p$.

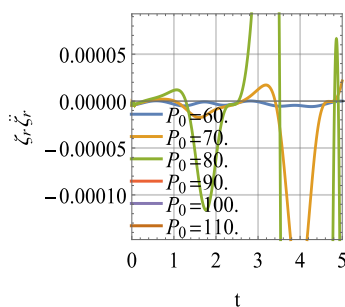


Figura 18: Producto $\zeta_r \ddot{\zeta}_r(t) \zeta_r(t)$.

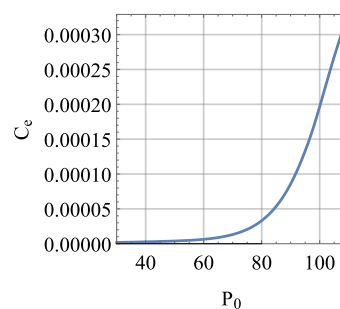


Figura 19: Coeficiente de estabilidad C_e (2 GDL).

4 CONCLUSIONES

La carga de pandeo dinámica por pulso es muy superior a la estática límite y además el desplazamiento límite sobre la trayectoria fundamental está muy por debajo del de escape de movimiento. Se ha mostrado que el criterio de Lee puede dar condiciones necesarias, pero no suficientes para la carga límite de pandeo dinámico. Si bien necesita ser explorado en sistemas de más grados de libertad y en sistemas continuos, el criterio de límite dinámico propuesto por los autores muestra un camino general y con buenos resultados para los sistemas analizados en este trabajo.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo de SeCyT-UNC.

REFERENCIAS

- Ameijeiras M.P., Godoy L.A., On quasi-bifurcation of simple shell-like systems under impulsive loads. *Rev. Int. Desastres Naturales, Accidentes e Infraestructura Civil*, 18(1-2), 2018.
- Duong, D.H., Hanus, J.L., Bouazaoui, L., Penner, O., Moriceau, J., Prod'homme, G., Reimeringer, M., Response of a tank under blast loading – Part I: Experimental characterization. *European J. of Environmental and Civil Eng.*, 16(9): 1023-1041, 2012.
- Hindmarsh, A.C., Brown, P.N., Grant, K.E., Lee, S.L., Serban, R., Shumaker, D.E., Woodward, C.S., SUNDIALS: Suite of Nonlinear and Differential/Algebraic Equation Solvers. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 31(3): 363-396, 2005.
- Lee, L.H.N., Quasi-bifurcation in dynamics of elastic-plastic continua. *J. of Applied Mechanics*, 413-418, 1977.
- Simitses, G. J., Dynamic stability of suddenly loaded structures. Springer-Verlag, 1990.
- Weggel, D., Whelan M. J. (2013). Rigid tank blast testing summary and procedures for estimating blast overpressure distribution on a cylindrical tank surface (*Technical Report, Infrastructure Security and Emergency Responder Research and Training Facility*). UNC Charlotte, NC, USA: Department of Civil and Environmental Engineering, 2013.
- Wolfram Research, Inc., Mathematica (2018). Champaign, IL.