

ESTUDIO DE LA EFECTIVIDAD DE UN MÉTODO ANALÍTICO DE DETECCIÓN DE FISURAS BASADO EN MEDICIONES DE FRECUENCIA

STUDY OF THE EFFECTIVENESS OF AN ANALYTICAL CRACK DETECTION METHOD BASED ON FREQUENCY MEASUREMENTS

Marcos R. Carrizo^a y Javier L. Raffo^a

^a *Grupo de Mecánica Computacional, Facultad Regional Delta, Universidad Tecnológica Nacional,
San Martín 1171, 2804 Campana, Argentina, mcarrizo@frd.utn.edu.ar,
<http://www.frd.utn.edu.ar/grupo-de-mecanica-computacional>*

Palabras clave: vigas, detección de fisuras, vibraciones, solución analítica, incertidumbre.

Resumen. En este trabajo se presenta un método de detección de fisuras en vigas Euler Bernoulli que consiste en resolver el problema inverso de vibraciones naturales. Se considera una fisura superficial abierta que es modelada con una rótula elástica. Se realiza un análisis de la incertidumbre en la determinación del coeficiente de frecuencias para una cadena de medición con acelerómetros. El método analítico consiste en la solución exacta del problema de contorno de una viga con fisura. Se realiza un análisis de la incertidumbre y propagación de error aplicada a establecer el coeficiente de frecuencias con mediciones. Se presentan nuevos resultados que cuantifican el error asociado a la determinación de la posición y profundidad de la fisura. Se determina la capacidad teórica para la obtención de las propiedades de la fisura del método propuesto.

Keywords: Beams, crack detection, vibrations, close form solution, uncertainty.

Abstract. In this work an analytical Euler Bernoulli beam crack detection method is presented. The proposed method solves the inverse problem of natural vibration of the cracked beam. An open crack model that consists in an elastic rotational restraint is used. An analysis of the uncertainty in the determination of the frequency parameter taking into account a measurement system with accelerometers was done. A close form solution of the problem to solve the boundary value problem of the cracked beam is used. Many errors based on uncertainty analysis of the relation between the frequency parameter and the measured frequencies are proposed. New results of the error associated to the determination of the crack location and depth are presented. The theoretical capability to detect the proposed open crack properties is obtained.

1 INTRODUCCIÓN

El desarrollo de métodos de detección de fisura es de un gran interés en ingeniería. En particular, el estudio del problema inverso de determinación de la posición y profundidad de fisuras en vigas, a partir de valores medidos de frecuencias naturales.

Varios autores presentaron trabajos con modelos analíticos de vigas con la presencia de una fisura, donde la fisura se modela con la presencia de un resorte rotacional unido a ambos lados de los tramos de una viga (Ostachowicz y Krawezuk, 1991; Dimarogonas, 1996; Chondros y otros, 1997; Fernández-Sáez y Navarro, 2002; Ruotolo y Surace, 2004; Binici, 2005; Hsu, 2005; Quintana et al., 2010).

Por otra parte se presentaron varios trabajos donde se analiza el problema directo de obtener el coeficiente de frecuencias para diferentes posiciones y profundidades de fisura proponiendo técnicas de análisis que relacionan los valores teóricos con los de frecuencias medidas en vigas con fisura (Yang y otros, 2001; Thalapil y Maiti, 2014; Owolabi y otros, 2003). En particular, Karandikar y otros (2016) realizaron un análisis para determinar el coeficiente de frecuencia para diferentes posiciones y profundidades experimentalmente. Yu y Chua (2009) y Satpute y otros (2017) obtuvieron el coeficiente de frecuencias utilizando el complemento del método de elementos finitos. En uno de los trabajos mas recientes, Liu y Barkey (2017) proponen como método de análisis la minimización de una función de error dada por la diferencia entre el coeficiente de frecuencias medido y el obtenido analíticamente.

Si bien algunos trabajos hacen mención al error en la determinación de la profundidad y posición de la fisura, se observan pocos trabajos que analizaron el error del coeficiente de frecuencias con el error en la detección de la posición y profundidad de la fisura. Y en particular, no se observaron trabajos donde se analice la capacidad teórica del modelo y método propuesto para detectar la posición y profundidad de la fisura.

2 SISTEMA MECÁNICO EN ESTUDIO

2.1 Problema de contorno y solución exacta propuesta

Sea una viga de longitud l , de dimensiones uniformes a lo largo de su eje, que tiene sus extremos restringidos elásticamente y tiene una posición intermedia restringida elásticamente con una rótula interna como se muestra en la Figura 1. La viga está compuesta por dos tramos, que corresponden a los intervalos $[0, \bar{c}]$ y $[\bar{c}, l]$ respectivamente. Se asume que los extremos y la rótula intermedia están restringidos elásticamente contra rotación y traslación. Las restricciones rotacionales están definidas por los parámetros r_1, r_2, r_c y las restricciones traslacionales por t_1, t_2, t_c . Adoptando valores adecuados de r_1, r_2 y t_1, t_2 se pueden generar todas las combinaciones posibles de restricciones de apoyo clásicas (empotrado, simplemente apoyado, libre). Por otra parte, utilizando t_c, r_c , se pueden considerar efectos de restricciones elásticas intermedias en el puntos intermedios $\bar{x} = \bar{c}$.

Para analizar el desplazamiento transversal de la viga en estudio, suponemos que la posición vertical de la viga en cualquier instante de tiempo t está descrita por la función $w = w(\bar{x}, t)$, $\bar{x} \in [0, l]$.

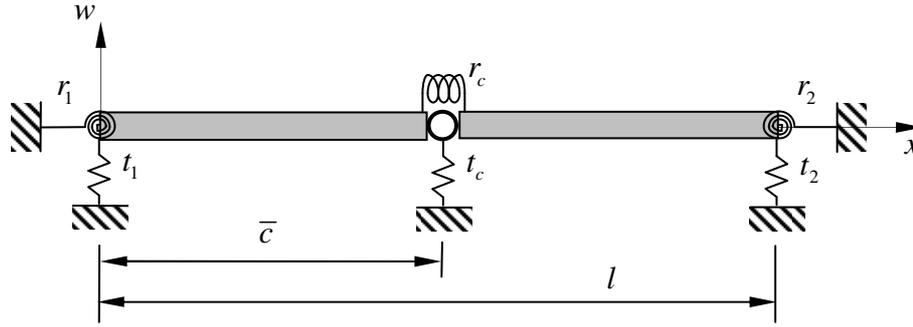


Figura 1: Sistema mecánico analizado.

La ecuación diferencial, las condiciones de contorno y de transición de la viga analizada se obtienen mediante el desarrollo del principio de Hamilton y el cálculo de variaciones, el cual está dado por (Raffo y Carrizo, 2013; 2014):

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left((EI)_i(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t) \right) + (\rho A)_i(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x,t) = 0, \quad (1)$$

$$\forall x \in \{(0,c), (c,1)\}, i = 1, 2.$$

$$R_1 \frac{\partial w}{\partial x}(0^+, t) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0^+, t), \quad (2)$$

$$T_1 w(0^+, t) = -\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(0^+, t), \quad (3)$$

$$w(c^-, t) = w(c^+, t), \quad (4)$$

$$R_c \left(\frac{\partial w}{\partial x}(c^+, t) - \frac{\partial w}{\partial x}(c^-, t) \right) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(c^-, t), \quad (5)$$

$$R_c \left(\frac{\partial w}{\partial x}(c^+, t) - \frac{\partial w}{\partial x}(c^-, t) \right) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(c^+, t), \quad (6)$$

$$T_c w(c, t) = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(c^-, t) - \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(c^+, t), \quad (7)$$

$$R_2 \frac{\partial w}{\partial x}(1^-, t) = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(1^-, t), \quad (8)$$

$$T_2 w(1^-, t) = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(1^-, t), \quad (9)$$

donde $t \geq 0$, $x = \bar{x}/l$, $c = \bar{c}/l$, $T_i = \frac{t_i l^3}{EI}$, $R_i = \frac{r_i l}{EI}$, $i = 1, 2$, $T_c = \frac{t_c l^3}{EI}$, $R_c = \frac{r_c l}{EI}$.

Como el dominio del sistema con el cambio de variables considerado es $D = (0,1)$ que es un intervalo abierto, los extremos están dados por dos puntos, $\partial D = \{0,1\}$. Por lo tanto (2), (3), (8) y (9) corresponden a las condiciones de contorno. Las condiciones en la transición están dadas por (4) a (7) en c que es punto interior.

En este caso, es posible simular una viga con una fisura ubicada en diferentes posiciones si se considera una restricción rotacional intermedia $0 < r_{c_1} < \infty$, y $t_{c_2} = 0$.

Utilizando el método de separación de variables, se asume como solución de las ecuaciones diferenciales (1) las funciones dadas por

$$w_i(\bar{x}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_{i,n}(\bar{x}) \cos \omega t, \quad i=1,2, \quad (10)$$

donde $w_{i,n}$ son los n th modos de vibración natural. Las funciones $w_{i,n}$ están dadas por

$$w_{1,n}(x) = A_1 \cosh \lambda x + A_2 \sinh \lambda x + A_3 \cos \lambda x + A_4 \sin \lambda x, \quad \forall x \in [0, c], \quad (11)$$

$$w_{2,n}(x) = A_5 \cosh \lambda x + A_6 \sinh \lambda x + A_7 \cos \lambda x + A_8 \sin \lambda x, \quad \forall x \in [c, l], \quad (12)$$

donde el coeficiente de frecuencias está dado por

$$\lambda^4 = \frac{\rho A}{EI} \omega^2 l^4. \quad (13)$$

Al reemplazar las Ecs. (11)-(12) en las Ecs. (2)-(9), y se condiciona que el determinante del sistema de los coeficientes A_i debe ser igual a cero, se obtiene la ecuación de frecuencias

$$G(T_1, R_1, T_2, R_2, T_c, R_c, c, \lambda) = 0. \quad (14)$$

Para la implementación del modelo de fisura, se considera el modelo que Ostachowicz y Krawezuk (1991) propusieron formulado con herramientas fractomecánicas, basado en el factor de intensidad de tensiones para fisuras superficiales simples y abiertas (ver Figura 2a).

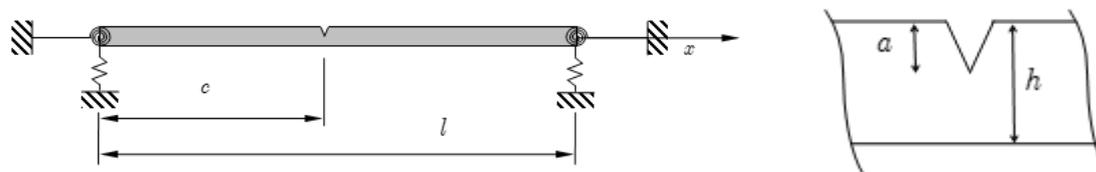


Figura 2: a) Viga con una fisura superficial a un solo lado. b) Esquema fisura superficial abierta.

Este modelo consiste en considerar a la sección de la viga donde se encuentra la fisura, como una rótula elástica donde la rigidez del resorte rotacional varía de la siguiente manera

$$R_c = \frac{l}{6\pi h \eta^2 f(\eta)}, \quad (15)$$

donde h es la altura de la sección rectangular, $\eta = a/h$ es la relación entre la profundidad de la fisura a y la altura de la viga (ver Figura 2b) y $f(\eta)$ está dada por

$$f(\eta) = 0.6384 - 1.035\eta + 3.7201\eta^2 - 5.1773\eta^3 + 7.553\eta^4 - 7.332\eta^5 + 2.4909\eta^6. \quad (16)$$

3 RELACIÓN ENTRE LA INCERTIDUMBRE DE LAS FRECUENCIAS NATURALES MEDIDAS Y LA INCERTIDUMBRE DEL COEFICIENTE DE FRECUENCIAS

La incertidumbre en la determinación experimental de las frecuencias naturales de vibración (u_f) está compuesta por la incertidumbre propia del ensayo (u_t), la incertidumbre del acelerómetro sensor (u_a), la incertidumbre del equipo adquirente de datos (u_e), tal que

$$u_f = \sqrt{u_t^2 + u_a^2 + u_e^2}. \quad (17)$$

Al considerar que los resultados del ensayo corresponden a una distribución normal de

probabilidades, para N mediciones de frecuencia $f_i, i = 1, \dots, N$, siendo su media \bar{f} , se obtiene que

$$u_t = \sqrt{\sum_{i=1}^N (f_i - \bar{f})^2 / N(N-1)}. \quad (18)$$

La incertidumbre del acelerómetro está dada por

$$u_a = \sqrt{u_k^2 + u_l^2 + u_r^2 + u_p^2}, \quad (19)$$

donde u_k es la incertidumbre de la sensibilidad, u_l incertidumbre debido a la sensibilidad transversal, u_r es la incertidumbre debido a la repuesta en frecuencia o no-linealidad y u_p la incertidumbre debido a la temperatura.

Finalmente, la incertidumbre del equipo adquirente de datos se lo aproxima por la del tiempo de respuesta del equipo.

Con el objetivo de cuantificar experimentalmente u_f , se realizaron 12 mediciones de las primeras 3 frecuencias naturales de una viga articulada en sus extremos. Se utilizó una cadena de medición compuesta por un acelerómetro IEPE marca Brüel & Kjaer tipo 4508 B 004 y un adquirente de datos de 4 canales NI-9234. Cada componente de incertidumbre y la incertidumbre del acelerómetro se resumen en la [Tabla 1](#). La incertidumbre de cada componente y la total obtenida en la determinación de cada frecuencia natural se resume en la [Tabla 2](#).

u_k	u_l	u_r	u_p	u_a
0.50%	0.03%	2.00%	0.12%	2.07%

Tabla 1: Valores de u_k, u_l, u_r y u_p obtenidos experimentalmente y u_a calculado.

Modo	\bar{f}	u_t	u_a	u_e	u_f
1	67.711	0.10%	2.07%	0.34%	2.10%
2	270.844	0.02%	2.07%	0.11%	2.07%
3	609.399	0.06%	2.07%	0.05%	2.07%
Promedio		0.06%	2.07%	0.17%	2.08%

Tabla 2: Valores obtenidos para calcular la incertidumbre de las frecuencias naturales.

Por otra parte, de (13) se observa la relación existente entre el coeficiente de frecuencias con el valor de la frecuencia medida, y utilizando la regla para la potencia de la teoría de propagación de errores, considerando como única fuente de error a la frecuencia medida, la relación entre la incertidumbre en la determinación del coeficiente adimensional de frecuencias y la incertidumbre en la determinación de las frecuencias está dado por

$$u_f = 2 u_\lambda \quad (20)$$

donde u_λ es la incertidumbre propagada del coeficiente de frecuencias. Por lo tanto, para el caso en que $u_f = 2.08\%$, es $u_\lambda = 1.04\% \approx 1\%$.

4 METODO INVERSO PROPUESTO

El método consiste en determinar en forma exacta mediante resultados numéricos el valor del coeficiente de frecuencias con fisura λ_{CF} , de los tres primeros modos variando η y c desde 0.01 a 0.99 con paso 0.01. En la Figura 3 se presentan estos resultados para una viga articulada en sus extremos.

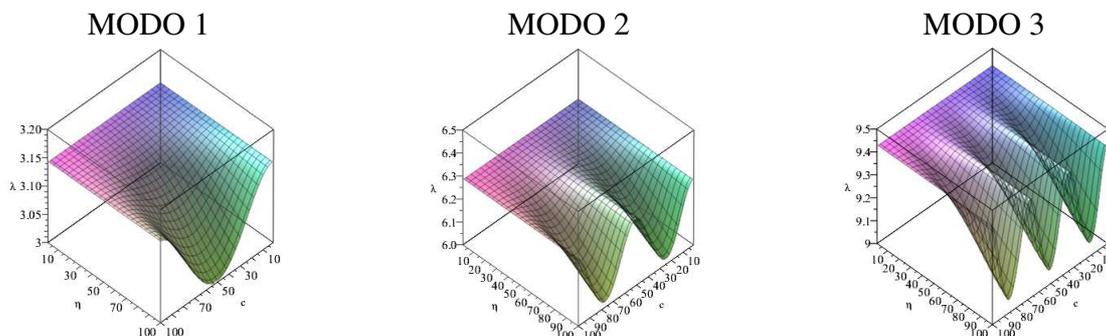


Figura 3: Resultados de los primeros tres valores de λ_{CF} , para η y c desde 0.01 a 0.99 con paso 0.01.

Por otra parte, en la Figura 4 se presentan los resultados de un valor de coeficiente de frecuencia hipotéticamente medido λ_M , el cual incluye un error inducido y representa el valor medido en una viga que se desconoce la posición y profundidad de la fisura. Estos resultados se los superpone con los presentados en la Figura 3, y se normaliza respecto al valor del coeficiente de frecuencia de la viga sin fisura, λ_{SF} .

Para hallar la solución del problema inverso, se obtienen los valores de χ , que para cada c y η está dado por

$$\chi = \sum_{m=1}^3 \left(\frac{\lambda_{CF}}{\lambda_{SF}} - \frac{\lambda_M}{\lambda_{SF}} \right)^{-1} = \sum_{m=1}^3 \frac{\lambda_{SF}}{\lambda_{CF} - \lambda_M}, \quad (21)$$

donde $m = 1, 2, 3$ indica el modo considerado. Las coordenadas (c, η) donde se encuentra el valor máximo de χ indican la posición y profundidad de la fisura para el caso de una viga articulada en sus extremos, con una fisura ubicada en $c = 0.15$ y con una profundidad dada por $\eta = 0.5$ (ver Figura 5).

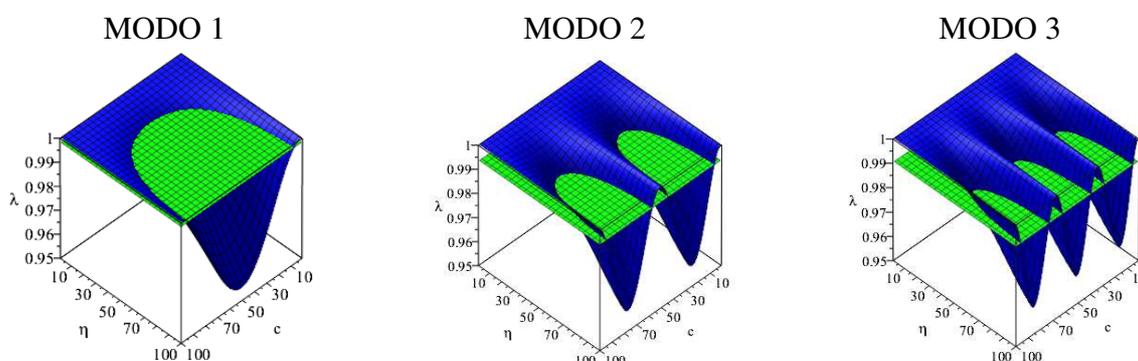


Figura 4: Primeros tres valores de $\lambda_{CF}/\lambda_{SF}$ (superficie azul) y valores de λ_M/λ_{SF} (superficie verde) para una viga articulada en sus extremos con $c = 0.15$ y $\eta = 0.5$.

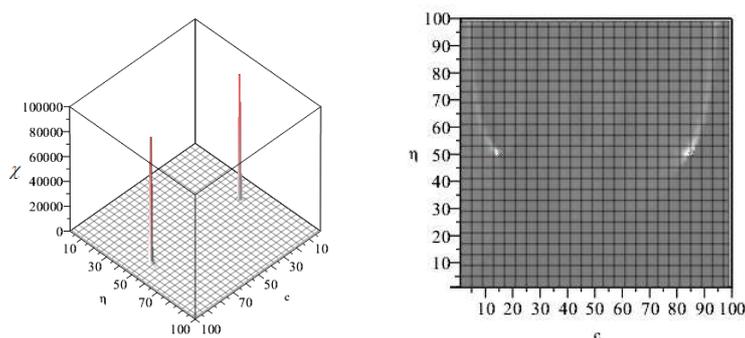


Figura 5: Valores de χ para una viga articulada en sus extremos con $c = 0.15$ y $\eta = 0.5$.

5 RESULTADOS Y COMENTARIOS

Se continúa el análisis de la viga articulada en sus extremos con una fisura ubicada en $c = 0.15$ y con $\eta = 0.50$. Para el valor de λ_M , se adopta un error aleatorio que varía $\pm 1\%$ y se aplica a los primeros tres valores exactos del coeficiente de frecuencias. En la [Tabla 3](#) se presentan los errores inducidos en cada modo, el valor obtenido con el método inverso propuesto en este trabajo y los errores relativos porcentuales e_c y e_η , respecto al valor exacto en la determinación de la posición y profundidad de la fisura respectivamente. El caso 1 corresponde al resultado sin error inducido, los casos 2 a 9 corresponden a todas las combinaciones de los valores extremos del error inducido y del caso 10 en adelante corresponden a un error inducido aleatoriamente.

Se observa que e_c es máximo para el caso 7 que corresponde a una de las combinaciones del error máximo inducido en los tres primeros modos y e_η es máximo para el caso 2.

Caso	Error inducido en λ_M			Método inverso			
	Modo 1	Modo 2	Modo 3	c	η	e_c	e_η
1	0.0%	0.0%	0.0%	0.15	0.50	0.0%	0.0%
2	1.0%	1.0%	1.0%	0.01	0.01	93.3%	98.0%
3	1.0%	1.0%	-1.0%	0.07	0.98	53.3%	96.0%
4	1.0%	-1.0%	1.0%	0.29	0.63	93.3%	26.0%
5	1.0%	-1.0%	-1.0%	0.17	0.67	13.3%	34.0%
6	-1.0%	1.0%	1.0%	0.38	0.57	153.3%	14.0%
7	-1.0%	1.0%	-1.0%	0.50	0.54	233.3%	8.0%
8	-1.0%	-1.0%	1.0%	0.30	0.64	100.0%	28.0%
9	-1.0%	-1.0%	-1.0%	0.18	0.68	20.0%	36.0%
10	0.0%	0.2%	-0.7%	0.07	0.90	53.3%	80.0%
11	0.0%	0.0%	-0.7%	0.07	0.92	53.3%	84.0%
12	-0.3%	-0.9%	0.0%	0.23	0.59	53.3%	18.0%
13	-0.4%	0.0%	0.5%	0.23	0.43	53.3%	14.0%
14	0.0%	0.2%	1.0%	0.30	0.39	100.0%	22.0%
15	0.0%	-0.8%	0.1%	0.23	0.58	53.3%	16.0%
16	-0.2%	0.6%	0.0%	0.50	0.37	233.3%	26.0%

Tabla 3: Análisis de sensibilidad para viga A-A con fisura en $c = 0.15$ y profundidad de $\eta = 0.50$.

En la [Tabla 4](#) se repite el análisis para una viga articulada en sus extremos con una fisura ubicada en $c = 0.35$ y con $\eta = 0.80$.

Caso	Error inducido en λ_M			Método inverso			
	Modo 1	Modo 2	Modo 3	c	η	e_c	e_η
1	0.0%	0.0%	0.0%	0.35	0.80	0.0%	0.0%
2	1.0%	1.0%	1.0%	0.37	0.64	5.7%	20.0%
3	1.0%	1.0%	-1.0%	0.43	0.61	22.9%	23.8%
4	1.0%	-1.0%	1.0%	0.29	0.82	17.1%	2.5%
5	1.0%	-1.0%	-1.0%	0.26	0.79	25.7%	1.3%
6	-1.0%	1.0%	1.0%	0.38	0.91	8.6%	13.8%
7	-1.0%	1.0%	-1.0%	0.40	0.88	14.3%	10.0%
8	-1.0%	-1.0%	1.0%	0.34	0.98	2.9%	22.5%
9	-1.0%	-1.0%	-1.0%	0.34	0.98	2.9%	22.5%
10	0.0%	0.2%	-0.7%	0.36	0.79	2.9%	1.3%
11	0.0%	0.0%	-0.7%	0.35	0.80	0.0%	0.0%
12	-0.3%	-0.9%	0.0%	0.32	0.88	8.6%	10.0%
13	-0.4%	0.0%	0.5%	0.36	0.84	2.9%	5.0%
14	0.0%	0.2%	1.0%	0.35	0.80	0.0%	0.0%
15	0.0%	-0.8%	0.1%	0.32	0.84	8.6%	5.0%
16	-0.2%	0.6%	0.0%	0.38	0.80	8.6%	0.0%

Tabla 4: Análisis de sensibilidad para viga A-A con fisura en $c = 0.35$ y profundidad de $\eta = 0.80$.

Finalmente, en la [Figura 6](#) y [Figura 7](#) se presentan los resultados de los errores relativos porcentuales e_c y e_η , realizando un análisis similar al de la [Tabla 3](#) para vigas con fisura variando η y c desde 0.01 a 0.99 con paso 0.01 considerando una incertidumbre $u_f = 2\%$. En la [Figura 6](#) se presenta el error máximo obtenido en el caso de valores extremos del error inducido y en la [Figura 7](#) se presenta el error máximo de 8 casos de error aleatorio inducido.

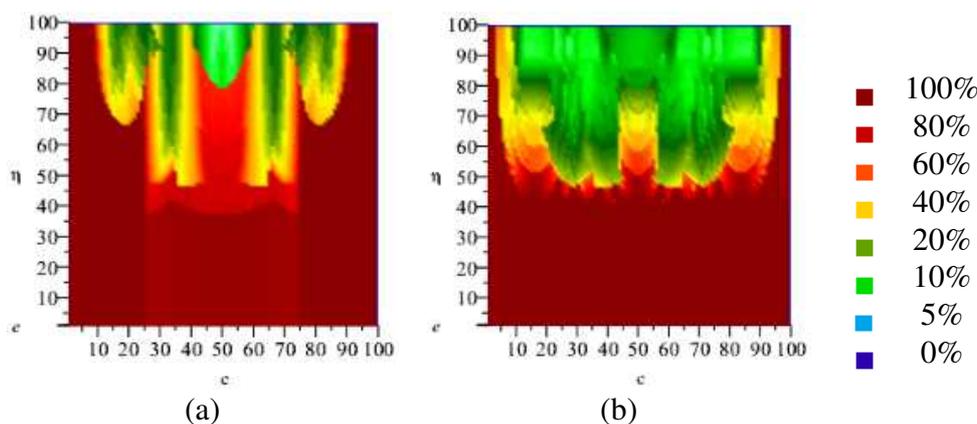


Figura 6: Valores de e_c (a) y e_η (b) para una viga con fisura articulada en sus extremos para $u_f = 2\%$. Se presenta el mayor error obtenido para los casos de errores extremos inducidos.

Las [Figuras 6a](#) y [7a](#) representan la probabilidad de detección de la ubicación de la fisura según cada caso. Las [Figuras 6b](#) y [7b](#) representan la probabilidad de detección de la profundidad de la fisura. De esta manera se logró conformar la capacidad teórica del método según las hipótesis trabajadas. En la práctica, esto permitirá dar una idea de la probabilidad de detectar la ubicación y profundidad de la fisura al utilizar los presentes modelos de viga y fisura analizando los primeros modos de vibrar que es tan ampliamente utilizado en trabajos

científicos a la fecha.

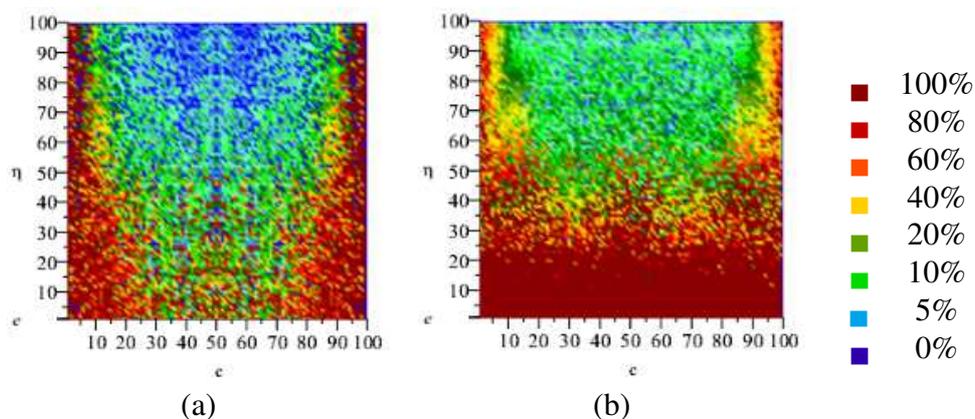


Figura 7: Valores de e_c (a), e_η (b) para una viga con fisura articulada en sus extremos para $u_f = 2\%$. Se presenta el mayor error obtenido para 8 casos de errores aleatorios inducidos.

6 CONCLUSIONES

Se presentó el valor obtenido de la incertidumbre en la determinación del coeficiente de frecuencias para un ensayo de análisis modal experimental y aplicando la teoría de propagación de errores e incertidumbres. Se determinó la relación existente entre la incertidumbre de la frecuencia natural de vibrar medida y el coeficiente de frecuencias.

Se desarrolló un método analítico de detección de fisuras en vigas que permitió determinar en forma analítica la capacidad de detectar una fisura. El mismo consistió en resolver el problema inverso de obtener la posición y profundidad de la fisura a partir de conocer los 3 primeros valores del coeficiente de frecuencias combinado con el uso de un parámetro especial χ .

Los resultados presentados permiten determinar para el caso de una viga doblemente articulada con fisura, la capacidad teórica de detectar la fisura para cualquier ubicación y profundidad en el caso de tener una incertidumbre máxima de la medición de la frecuencia del 2%.

REFERENCIAS

- Binici, B., Vibration of beams with multiple open cracks subjected to axial force. *Journal of Sound and Vibration*, 287:277–295, 2005.
- Chondros, T. G., Dimarogonas, A. D. y Yao, J., A consistent cracked bar vibration theory. *Journal of Sound and Vibration*, 200: 303-313, 1997.
- Dimarogonas A. D., Vibration of cracked structures: a state of the art review. *Engineering Fracture Mechanics*, 55: 831-857, 1996.
- Fernández-Sáez, J. y Navarro, C., Fundamental frequency of cracked beams in bending vibrations: an analytical approach. *Journal of Sound and Vibration*, 256:17-31, 2002.
- Hsu, M-H, Vibration analysis of edge-cracked beam on elastic foundation with axial loading using the differential quadrature method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194:1-17, 2005.
- Karandikar, P., Vivek, V. y Ganesh, D., Experimental Investigation of Crack detection of Cantilever Beam-FFT Analyser, *IOSR Journal of Mechanical and Civil Engineering*, 13:12-

- 17, 2016.
- Liu, W. y Barkey, M., Frequency error based identification of cracks in beam-like structures, *Journal of Mechanical Science and Technology*, 10:4657-4667, 2017.
- Ostachowicz, W. M. y Krawczuk, M., Analysis of the effect of cracks on the natural frequencies of a cantilever beam, *Journal of Sound and Vibration*, 150:191-201, 1991.
- Owolabi, G.M., Swamidas, A.S.J. y Seshadri, R., Crack detection in beams using changes in frequencies and amplitudes of frequency response functions, *Journal of Sound and Vibration*, 265:1-22, 2003.
- Quintana M. V., Raffo, J. L. y Grossi, R. O., Eigenfrequencies of generally restrained Timoshenko beams with an internal hinge. *Mecánica Computacional*, 24:2499-2516, 2010.
- Raffo, J. L. y Carrizo, M. R., Método Analítico de Detección de Fisuras en Vigas Vibrantes. *IV Congreso Argentino Ingeniería Mecánica*, 2014.
- Raffo, J. L. y Carrizo, M. R., Vibraciones de vigas y pórticos ante la presencia de fisuras. Implementación del problema inverso. *Mecánica Computacional*, 32:1715-1735, 2013.
- Ruotolo, R. y Surace, C., Natural frequencies of a bar with multiple cracks. *Journal of Sound and Vibration*, 272:301-316, 2004.
- Satpute, D., Baviskar, P., Gandhi, P., Chavanked, M. y Aher, T., Crack Detection in Cantilever Shaft Beam Using Natural Frequency, *Materials Today: Proceedings*, 4:1366-1374, 2017.
- Thalapil, J. y Maiti, S.K., Detection of longitudinal cracks in long and short beams using changes in natural frequencies, *International Journal of Mechanical Sciences*, 83:38-47, 2014.
- Yang, X. F., Swamidas, A. S. J. y Seshadri R., Crack identification in vibrating beams using the energy method, *Journal of Sound and Vibration*, 244(2): 339-357, 2001.
- Yu, Z. y Chua, F., Identification of crack in functionally graded material beams using the p-version of finite element method, *Journal of Sound and Vibration*, 325:69-84, 2009.