

VIBRACIONES LIBRES DE VIGAS AFG SOBRE FUNDACIÓN PASTERNAK

FREE VIBRATIONS OF AFG BEAMS ON PASTERNAK FOUNDATION

Gonzalo J. Gilardi ^{a,b}, Carlos A. Rossit ^{a,b} y Diana V. Bambill ^{a,b}

^a *Departamento de Ingeniería (UNS), Instituto de Ingeniería-II-UNS (UNS-CIC), Universidad Nacional del Sur (UNS), Avenida Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina, <http://www.uns.edu.ar>*

^b *Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Argentina. gonzalo.gilardi@uns.edu.ar, carossit@criba.edu.ar, dbambill@criba.edu.ar*

Palabras clave: Viga AFG, Viga Bernoulli-Euler, Vibración de vigas, Rayleigh-Ritz, Fundación Pasternak.

Resumen. Se estudia la vibración transversal libre de vigas Bernoulli-Euler embebidas, en toda su longitud, en un medio elástico. El modelo, de carácter general, considera a una viga cantiléver de sección transversal variable, que está constituida por un material cuyas propiedades varían de forma gradual en la dirección axial (AFG, por sus siglas en inglés). Se emplea el modelo de Pasternak con dos parámetros para describir el comportamiento de la interacción entre la viga y el medio que la contiene. La solución al problema se obtiene mediante el método energético de Rayleigh-Ritz. Se evalúan varios ejemplos numéricos, variando las propiedades del material, la sección transversal de la viga y los parámetros que caracterizan a la fundación elástica. Los resultados obtenidos mediante el enfoque propuesto, son validados mediante su satisfactoria comparación con casos particulares del modelo de análisis disponibles en la literatura técnico-científica.

Keywords: AFG beams, Bernoulli-Euler beam, Vibration of beams, Rayleigh-Ritz, Pasternak foundation.

Abstract. Free transverse vibration of Bernoulli-Euler beams resting, along their entire length, on an elastic medium is studied. The general model considers a cantilever beam of variable cross section. It is constituted by a material whose properties vary gradually in the axial direction (AFG). Pasternak's model with two parameters is used to describe the behaviour of the interaction between the beam and the medium that contains it. The solution to the problem is obtained by means of the Rayleigh-Ritz energy method. Several numerical examples are evaluated, the properties of the material, the cross section of the beam and the parameters of the elastic foundation are varied. The results obtained with the present approach are validated through its satisfactory comparison with particular cases of the proposed model available in the technical-scientific literature.

1 INTRODUCCIÓN

El modelo estructural de una viga embebida en un medio elástico ha sido motivo de numerosos estudios debido a que tiene aplicaciones en variadas situaciones ingenieriles, tales como: edificios, carreteras, ferrocarriles, tuberías de soporte continuo, etc. (Selvadurai, 1979).

Obviamente, una componente importante en el diseño y análisis de estos elementos resistentes reside en el conocimiento de sus características dinámicas. Para ello, es menester establecer una representación de la interacción estructura-suelo. El modelo más simple fue introducido por Winkler (Winkler et al., 1867), el cual supone desplazamientos verticales en las vigas y considera una resistencia proporcional del suelo, representada por resortes lineales independientes. Su principal inconveniente radica en que no puede representar a suelos con cohesión o capacidad cortante. Sin embargo, existen muchos problemas en la ingeniería para los cuales representa una idealización adecuada y precisa (Aristazábal-Ochoa, 2004).

Prácticamente un siglo más tarde, surgen los modelos de dos parámetros. Estos modelos permiten incluir el efecto de continuidad y cohesión del suelo, como una versión modificada del modelo precursor. El modelo de Pasternak (Pasternak, 1954) incluye la cohesión del suelo mediante una capa de corte de espesor unitario, rígida verticalmente, que conecta los resortes de la fundación Winkler y solo resiste el corte transversal puro. Kerr (1964) demuestra que la fundación Pasternak es la extensión más natural del modelo Winkler para fundaciones homogéneas.

El análisis dinámico de vigas sobre fundaciones elásticas ha recibido especial atención, por parte de diferentes autores, debido a la importancia que reviste en el diseño de diferentes estructuras. Con respecto al estudio dinámico de vigas homogéneas esbeltas sobre fundaciones elásticas tipo Winkler-Pasternak, se destacan los trabajos de Eisenberger y Clastornik (1987); Yokoyama (1991); Franciosi y Masi (1993); Naidu y Rao (1995); De Rosa y Maurizi (1998); Chen et al. (2004); Civalek y Öztürk (2010); Obara (2014); Rahbar-Ranji y Shahbazzabar (2017); Bezerra et al. (2017), entre otros, quienes obtuvieron resultados implementando la teoría de vigas Bernoulli-Euler o bien como casos particulares de la teoría de Timoshenko.

Durante las últimas décadas, el uso de materiales con propiedades funcionalmente graduadas (FGM, por sus siglas en inglés) ha aumentado en el diseño de aplicaciones ingenieriles, debido a sus destacadas características de alta resistencia mecánica y térmica, así como de su distribución óptima del peso. Esta nueva clase de materiales avanzados, se obtienen de la combinación de dos o más materiales diferentes, cuyo contenido en porcentaje se hace variar mediante una ley distribución gradual, para obtener las propiedades requeridas en una o varias direcciones deseadas. De este modo, los FGM pueden superar algunas desventajas y debilidades de los materiales compuestos laminados, como lo son la delaminación y la concentración de esfuerzos, debido a que poseen una interfaz gradual en las propiedades del nuevo material (Koizumi, 1997).

La literatura técnico-científica evidencia que existen numerosos estudios sobre el análisis de vibración de las vigas que descansan sobre una base elástica, asumiendo distintos modelos de fundación. Sin embargo, sobre la fundación tipo Winkler-Pasternak todavía es limitado y para las vigas constituidas por FGM aún más. Sobre el estudio dinámico de vigas Bernoulli-Euler con FGM y propiedades variando en su espesor, aparecen los trabajos de Ying et al. (2008); Sahraee y Saidi (2009); Duy et al. (2014); Avcar y Mohammed (2018), entre otros.

Por otro lado, sobre elementos estructurales con propiedades variando en la dirección axial (AFG, por sus siglas en inglés), aparece el trabajo de Çetin y Şimşek (2011) sobre el estudio de vibración libre de una pila-columna AFG simplemente apoyada y embebida en medio elástico tipo Winkler-Pasternak y el estudio de Soltani (2019) sobre vigas AFG de sección

transversal variable, sobre esta misma fundación y para distintas condiciones de borde clásicas.

El presente trabajo analiza la vibración libre de vigas AFG cantiléver embebidas en una fundación Winkler-Pasternak, por ser las que menos atención han tenido en la bibliografía, considerando que la sección transversal puede ser variable. La solución al problema se obtiene por medio del método energético de Rayleigh-Ritz (Ilanko et al, 2014).

2 GENERALIDADES DEL MODELO

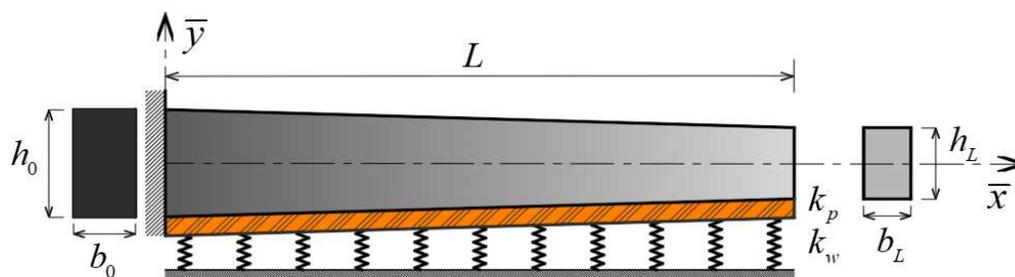


Figura 1: Viga Bernoulli-Euler AFG cantiléver de sección variable sobre fundación Winkler-Pasternak.

El modelo de viga Bernoulli-Euler AFG que se emplea para el desarrollo del presente análisis, se expone en la Figura 1. La sección transversal se considera variable en su longitud L y de doble simetría (rectangular), con ancho b y altura h . La viga se encuentra constituida por material funcionalmente graduado con propiedades variando en la dirección axial. Se emplea el modelo de Pasternak con dos parámetros para describir el comportamiento de la interacción entre la viga y el medio elástico que la contiene, donde k_w es el módulo de la fundación Winkler y k_p es el módulo del medio elástico Pasternak.

El movimiento oscilatorio de la viga se referencia respecto de un sistema de ejes coordenados. El eje \bar{x} coincide con el eje de flexión (en la posición sin deformar) y es normal al eje \bar{y} en el baricentro de la sección transversal inicial, donde ambos tienen origen. Cada parámetro geométrico y del material se identifica con un subíndice que indica el extremo al que se está haciendo referencia, “0” para el extremo izquierdo y “L” para el derecho.

3 LEYES DE VARIACIÓN PARA EL MATERIAL Y LA GEOMETRÍA

El hecho de considerar que la viga este constituida por material AFG y posea características geométricas variables, requiere definir una expresión genérica que permita contemplar ambas variaciones. Se define así:

$$R(\bar{x}) = R_0 f_r(\bar{x}). \quad (1)$$

donde $R(\bar{x})$ representa una característica de la viga (geométrica o del material) que varía en su dirección axial, desde un valor inicial R_0 y según una distribución $f_r(\bar{x})$. En particular se puede escribir:

$$E(\bar{x}) = E_0 f_E(\bar{x}), \rho(\bar{x}) = \rho_0 f_\rho(\bar{x}), A(\bar{x}) = A_0 f_A(\bar{x}), I(\bar{x}) = I_0 f_I(\bar{x}); \quad (2)$$

donde E es el módulo de Young, ρ es la densidad de masa, A es el área de la sección transversal e I es el momento de inercia respecto al eje de flexión. Al ser la sección rectangular y maciza, $A_0 = b_0 \times h_0$ y $I_0 = (b_0 \times h_0^3) / 12$, en la Ec. (2).

4 MÉTODOS DE RAYLEIGH RITZ

De acuerdo con las ecuaciones diferenciales que gobiernan el problema de las vibraciones transversales libres de vigas, cuando la viga vibra según uno de sus modos normales, la energía del sistema puede expresarse a través del siguiente funcional:

$$J[\bar{V}(\bar{x})] = U_{m\acute{a}x} - T_{m\acute{a}x} \quad (3)$$

donde $U_{m\acute{a}x}$ y $T_{m\acute{a}x}$ son las energías máximas de deformación y cinética, respectivamente (Laura, 1995). En la Ec. (3), $\bar{V}(\bar{x})$ representa a la amplitud de la deflexión de la viga, en la dirección del eje \bar{y} , la cual tiene la siguiente forma:

$$v(\bar{x}, t) = \bar{V}(\bar{x}) \cos(\omega t) \quad (4)$$

con t como la variable temporal y ω la frecuencia natural circular de vibración transversal de la viga. Además, para el desarrollo de los cálculos, se asume que la coordenada espacial \bar{x} y la amplitud $\bar{V}(\bar{x})$ están adimensionalizadas con respecto a la longitud total L de la viga.

$$x = \frac{\bar{x}}{L}; \quad V(x) = \frac{\bar{V}(\bar{x})}{L}. \quad (5)$$

De esta manera, la expresión de la energía máxima de deformación $U_{m\acute{a}x}$, para la teoría de vigas de Bernoulli-Euler, en su forma adimensionalizada es:

$$U_{m\acute{a}x} = U_{m\acute{a}x(1)} + U_{m\acute{a}x(2)}. \quad (6)$$

El primer término es debido a la energía propia de la viga:

$$U_{m\acute{a}x(1)} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{E(x)I(x)}{L} \left(\frac{d^2V(x)}{dx^2} \right)^2 dx, \quad (7)$$

y el segundo es por considerar la presencia de la fundación elástica:

$$U_{m\acute{a}x(2)} = \frac{1}{2} k_w \int_0^1 L^3 (V(x))^2 dx + \frac{1}{2} k_p \int_0^1 L \left(\frac{dV(x)}{dx} \right)^2 dx. \quad (8)$$

La primera integral está asociada a la fundación Winkler y la segunda al efecto que introduce la fundación Pasternak sobre la anterior. En la Ec. (8) se evidencia que k_w y k_p se asumen constantes para toda la longitud L de la viga.

Por otra parte, la expresión de la energía cinética máxima $T_{m\acute{a}x}$, en su forma adimensionalizada e independizada de la variable temporal t , es:

$$T_{m\acute{a}x} = \frac{1}{2} \omega^2 \int_0^1 \rho(x) A(x) L^3 (V(x))^2 dx. \quad (9)$$

Seguidamente, para aplicar el método de Rayleigh-Ritz (Ilanko et al., 2014), resulta necesario aproximar la componente espacial de la solución de la siguiente manera:

$$V(x) \cong V_a(x) = \sum_{j=1}^{N_p} C_j \varphi_j(x) \quad (10)$$

donde C_j son las constantes arbitrarias que multiplican a las φ_j funciones coordenadas, y N_p es el número de términos a sumar. En particular, para las vigas en voladizo que se van a estudiar, las funciones coordenadas que se adoptan son:

$$\{\varphi_j\}_{j=1}^{N_p} = \{x^{j+1}\}_{j=1}^{N_p}, \tag{11}$$

que satisfacen las condiciones de borde esenciales $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$ en el empotramiento.

Luego, considerando las Ecs. (2), (7), (8) (9) y (10), el funcional de energía (Ec. (3)) puede escribirse como:

$$J[V_a] = \frac{E_0 I_0}{2L} \int_0^1 f_E f_I (V_a'')^2 dx + \frac{k_w L^3}{2} \int_0^1 V_a^2 dx + \frac{k_p L}{2} \int_0^1 (V_a')^2 dx - \frac{\omega^2 \rho_0 A_0 L^3}{2} \int_0^1 f_\rho f_A V_a^2 dx \tag{12}$$

con $V_a' = dV_a / dx$ y $V_a'' = d^2V_a / dx^2$. Multiplicando ambos miembros de la Ec.(12) por $(2L)/(E_0 I_0)$ y reagrupando términos, se obtiene:

$$\frac{2L}{E_0 I_0} J[V_a] = \int_0^1 f_E f_I (V_a'')^2 dx + K_w \int_0^1 (V_a)^2 dx + K_p \int_0^1 (V_a')^2 dx - \Omega^2 \int_0^1 f_\rho f_A (V_a)^2 dx \tag{13}$$

donde $K_w = (k_w L^4)/(E_0 I_0)$ y $K_p = (k_p L^2)/(E_0 I_0)$ son los parámetros de las fundaciones Winkler y Pasternak, y $\Omega = \omega L^2 \sqrt{(\rho_0 A_0)/(E_0 I_0)}$ son los coeficientes de frecuencia naturales.

A continuación, el funcional J es minimizado respecto de cada constante arbitraria

$$\partial J[V_a] / \partial C_j = 0 \quad , \quad j = 1, 2, \dots, N_p; \tag{14}$$

dando origen a un sistema de ecuaciones lineales, que escrito en forma simbólica es:

$$\mathbf{R}\{C_j\} = \{0\} \text{ con } \mathbf{R} = \mathbf{K} - \Omega^2 \mathbf{M}. \tag{15}$$

Donde \mathbf{K} y \mathbf{M} son las matrices de rigidez y de masa, respectivamente; las cuales están expresadas en función de los elementos k_{ij} y m_{ij} ; que para la viga AFG Bernoulli-Euler sobre fundación Winkler-Pasternak adoptan las siguientes formas:

$$k_{ij} = \int_0^1 f_E(x) f_I(x) \varphi_i'' \varphi_j'' dx + K_w \int_0^1 \varphi_i \varphi_j dx + K_p \int_0^1 \varphi_i' \varphi_j' dx, \tag{16}$$

$$m_{ij} = \int_0^1 f_\rho(x) f_A(x) \varphi_i \varphi_j dx.$$

Para que el movimiento vibratorio sea posible, es necesario y suficiente cumplir con la condición de no-trivialidad, es decir, que el determinante de \mathbf{R} (Ec. (15)) sea igual a cero. De esta manera el problema de autovalores queda expresado como:

$$|\mathbf{KM}^{-1} - \Omega^2 \mathbf{I}| = |\mathbf{B} - \beta \mathbf{I}| = 0 \tag{17}$$

con $\beta = \Omega^2$ como los autovalores de la matriz \mathbf{B} e \mathbf{I} la matriz identidad.

5 RESULTADOS NUMÉRICOS

Para el estudio se considera un material AFG compuesto por dos materiales constitutivos “a” y “b”. Las propiedades del material resultante varían mediante la siguiente ley asimétrica:

$$R(x) = R_a + (R_b - R_a)x^n \quad \text{con } n \geq 0 \quad \text{y } x \in [0,1], \quad (18)$$

donde el exponente n es el parámetro de heterogeneidad. Se observa que en $x=0$ la sección transversal estará totalmente constituida por el material “a”, $R_0 = R_a$; mientras que en el extremo libre ($x=1$) lo estará por el material “b”. El contenido porcentual del material “a” en cada sección transversal incrementa en la medida que n aumenta. Debe tenerse presente que cualquier valor de n fuera del rango $[1/3; 3]$ no es deseado (Nakamura et al., 2000), ya que el material AFG contendría demasiado de uno de los materiales constituyentes.

Respecto a la geometría se contemplan 4 situaciones: viga de sección constante $b = b_L = b_0$ y $h = h_L = h_0$ (Caso A), viga de ancho variable $b(x) = b_0(1 - \alpha x)$ y altura constante $h = h_L = h_0$ (Caso B), viga de ancho constante $b = b_L = b_0$ y altura variable $h(x) = h_0(1 - \alpha x)$ (Caso C), y viga de ancho y altura variable: $b(x) = b_0(1 - \alpha x)$, $h(x) = h_0(1 - \alpha x)$ (Caso D).

5.1 Casos de comparación

El primer caso de comparación corresponde a una viga cantiléver homogénea que descansa sobre una fundación elástica Winkler-Pasternak. Los primeros dos coeficientes de frecuencia calculados para distintas combinaciones de parámetros de fundación K_w y K_p , se contrastan en la [Tabla 1](#) con los obtenidos por Wang et al. (1998), implementando el método de parámetros iniciales con funciones de Green.

Ω	$K_w = 0$		$K_w = 100$		Solución
	K_p / π^2		K_p / π^2		
	0	2,5	0	2,5	
Ω_1	3,51602	9,91309	10,6001	14,0808	M.R-Ritz
	3,51600	9,91305	–	–	Wang et al.(1998)
Ω_2	22,0345	35,0896	24,1975	36,4867	M.R-Ritz
	–	–	24,1975	36,4864	Wang et al.(1998)

Tabla 1: Coeficientes de frecuencia de viga cantiléver homogénea embebida en fundación Winkler-Pasternak.

El segundo caso de comparación corresponde a una viga AFG en voladizo de sección transversal ahusada (Caso B). La viga AFG está compuesta por zirconia (ZrO_2) y aluminio (Al), cuyas propiedades (Ec. (19)) varían con la ley asimétrica de la Ec. (18) y con $n = 2$.

$$ZrO_2: E_0 = 200 \text{ GPa}, \rho_0 = 5700 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad \text{y} \quad \text{Al}: E_L = 70 \text{ GPa}, \rho_L = 2702 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}. \quad (19)$$

Los primeros tres coeficientes de frecuencia para este caso, los obtuvieron Šalinić et al. (2018) implementando el método simbólico-numérico de parámetros iniciales (SNMIP, sus siglas en inglés). La [Tabla 2](#) muestra coeficientes de frecuencia calculados en comparación con los obtenidos por estos autores.

α	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Solución
0,20	4,57215	23,7147	62,3311	M.R-Ritz
	4,57215	23,7146	62,3315	Šalinić et al.(2018)
0,50	5,20240	24,7990	63,4839	M.R-Ritz
	5,20241	24,7989	63,4844	Šalinić et al.(2018)
0,70	5,88827	26,0601	64,9406	M.R-Ritz
	5,88827	26,0600	64,9411	Šalinić et al.(2018)

Tabla 2: Coeficientes de frecuencia de viga cantiléver AFG (ZrO₂-Al) ahusada.

En general, se puede apreciar que la correlación es muy buena para los dos casos comparados. La precisión se obtiene de usar $N_p = 20$ términos de polinomios.

5.2 Casos propuestos

Se estudia el comportamiento dinámico de vigas AFG en voladizo ahusadas sobre un medio elástico Pasternak. Los parámetros de la fundación elástica que se emplean corresponden a los implementados por Yokoyama (1991). Dependiendo de la rigidez en la fundación Winkler, el comportamiento de la viga puede clasificarse como rígida para $K_w < 10$, semi-rígida para $10 \leq K_w < 1000$ y flexible para $K_w \geq 1000$ (Selvadurai, 1979). Notar que cuando $K_p = 0$ el modelo de Pasternak se corresponde con el modelo de Winkler.

El material a emplear es el propuesto por Su et al. (2013), el cual está constituido por alúmina (Al₂O₃) y acero (Ac), y cuyas propiedades son:

$$\text{Alum: } E_0 = 390 \text{ GPa}, \rho_0 = 3960 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \text{ y Ac: } E_L = 210 \text{ GPa}, \rho_L = 7800 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}. \quad (20)$$

Los coeficientes fundamentales para distintas combinaciones de K_w y K_p , se exponen en las Tablas 3 y 4 para las vigas homogéneas, y en las Tablas 5 y 6 para las vigas AFG. Para las vigas AFG, las propiedades del material varían con la ley asimétrica de la Ec. (18), de forma lineal, es decir, con $n = 1$.

Caso	α	$K_w = 0$			$K_w = 1$			$K_w = 10$		
		K_p / π^2			K_p / π^2			K_p / π^2		
		0	1	2,5	0	1	2,5	0	1	2,5
A	0	3,51602	7,13598	9,91309	3,65546	7,20570	9,96340	4,72889	7,80526	10,4053
B	0,25	3,83643	7,90059	10,9533	3,99643	7,97867	11,0094	5,22014	8,64972	11,5021
	0,50	4,31517	8,99478	12,4237	4,50572	9,08477	12,4880	5,95167	9,85758	13,0518
	0,75	5,14571	10,7411	14,7239	5,38845	10,8497	14,8005	7,21005	11,7812	15,4722
C	0,25	3,63624	7,80320	10,8486	3,80490	7,88221	10,9052	5,07657	8,56052	11,4022
	0,50	3,82378	8,74262	12,1847	4,03955	8,83493	12,2501	5,61932	9,62569	12,8233
	0,75	4,17659	10,2528	14,3253	4,48468	10,3655	14,4035	6,63049	11,3281	15,0883
D	0,25	3,95671	8,61740	11,9645	4,15078	8,70569	12,0275	5,60227	9,46317	12,5798
	0,50	4,62515	10,8651	15,1031	4,92449	10,9822	15,1848	7,06198	11,9829	15,9000
	0,75	5,82307	14,6288	20,2265	6,38363	14,7897	20,3349	9,95181	16,1530	21,2807

Tabla 3: Coeficiente fundamental de viga cantiléver homogénea embebida en fundación Winkler-Pasternak.

Caso	α	$K_w = 10^2$			$K_w = 10^3$			$K_w = 10^4$		
		K_p / π^2			K_p / π^2			K_p / π^2		
		0	1	2,5	0	1	2,5	0	1	2,5
A	0	10,6001	12,2850	14,0808	31,8176	32,4179	33,1401	100,062	100,254	100,490
B	0,25	11,8310	13,6513	15,5940	35,4988	36,0149	36,7257	108,565	109,145	109,781
	0,50	13,6360	15,5924	17,7222	40,0663	40,6811	41,4896	116,038	116,853	117,969
	0,75	16,5780	18,6097	20,9951	44,7620	46,2281	47,6566	123,569	124,606	124,710
C	0,25	11,7745	13,5929	15,5188	35,4747	35,9772	36,6839	108,350	108,970	109,654
	0,50	13,5288	15,4305	17,5450	39,5692	40,4382	41,3269	115,273	116,169	117,384
	0,75	16,2825	18,2453	20,6723	43,3138	45,2806	47,0651	121,834	123,078	124,767
D	0,25	13,1338	15,0634	17,1462	39,0529	39,6318	40,4108	114,820	115,629	116,711
	0,50	17,1594	19,2194	21,7453	45,8421	47,7790	49,5312	127,008	128,287	130,046
	0,75	22,0389	25,4177	28,7704	52,7147	55,7739	59,1601	138,797	140,614	143,103

Tabla 4: Coeficiente fundamental de viga cantiléver AFG (Alum-Ac) embebida en fundación Winkler-Pasternak.

Caso	α	$K_w = 0$			$K_w = 1$			$K_w = 10$		
		K_p / π^2			K_p / π^2			K_p / π^2		
		0	1	2,5	0	1	2,5	0	1	2,5
A	0	4,78428	10,1928	14,2636	4,99363	10,2947	14,3373	6,58450	11,1693	14,9843
B	0,25	5,22115	11,3124	15,8128	5,46235	11,4269	15,8953	7,28203	12,4097	16,6196
	0,50	5,88112	12,9330	18,0343	6,17029	13,0658	18,1294	8,33282	14,2050	18,9639
	0,75	7,05186	15,5766	21,5980	7,42507	15,7389	21,7129	10,1827	17,1294	22,7202
C	0,25	4,92094	11,1711	15,6766	5,17582	11,2871	15,7599	7,06748	12,2813	16,4902
	0,50	5,13855	12,5813	17,7352	5,46806	12,7177	17,8318	7,83272	13,8844	18,6791
	0,75	5,56319	14,9291	21,1076	6,04374	15,0974	21,2247	9,30230	16,5341	22,2502
D	0,25	5,35403	12,3722	17,3551	5,64865	12,5023	17,4480	7,81550	13,6172	18,2632
	0,50	6,21673	15,7830	22,2141	6,68007	15,9578	22,3363	9,91456	17,4513	23,4072
	0,75	7,78268	21,7393	30,4439	8,69023	21,9856	30,6109	14,2757	24,0772	32,0707

Tabla 5: Coeficiente fundamental de viga cantiléver AFG (Alum-Ac) embebida en fundación Winkler-Pasternak.

Caso	α	$K_w = 10^2$			$K_w = 10^3$			$K_w = 10^4$		
		K_p / π^2			K_p / π^2			K_p / π^2		
		0	1	2,5	0	1	2,5	0	1	2,5
A	0	15,0744	17,6709	20,3483	45,1977	46,5524	47,8960	140,264	141,519	142,823
B	0,25	16,8770	19,7026	22,6194	50,9354	52,1841	53,4865	159,406	160,415	161,369
	0,50	19,5690	22,6359	25,8675	59,2029	60,1021	61,3241	183,903	184,347	185,352
	0,75	24,1263	27,3392	31,0173	68,9343	70,7429	72,4831	201,175	202,638	204,647
C	0,25	16,7759	19,6235	22,5256	50,8576	52,1535	53,4488	159,233	160,350	161,328
	0,50	19,3816	22,4297	25,6559	59,1133	59,9894	61,2165	183,404	184,652	185,169
	0,75	23,7932	26,9066	30,6420	67,2389	69,9232	72,0185	199,400	201,164	203,456
D	0,25	18,7836	21,8318	24,9928	57,1809	58,2103	59,4602	179,957	180,245	180,650
	0,50	24,9744	28,2881	32,1860	71,2336	73,7099	75,7121	208,726	210,554	212,980
	0,75	33,2333	38,5449	43,7615	84,0850	89,0801	94,2049	232,446	235,378	239,299

Tabla 6: Coeficiente fundamental de viga cantiléver AFG (Alum-Ac) embebida en fundación Winkler-Pasternak.

Los coeficientes de frecuencia obtenidos para las vigas AFG, están referenciados a una viga patrón homogénea de acero (Ac), de sección transversal constante con: $A = A_0 = b_0 \times h_0$ y $I = I_0 = (b_0 \times h_0^3) / 12$.

$$\Omega = \omega L^2 \sqrt{\rho_{Ac} A_0 / E_{Ac} I_0} . \quad (21)$$

La precisión de los resultados se obtiene de implementar $N_p = 20$ términos de polinomios.

6 CONCLUSIONES

En general se puede apreciar que al considerar las vigas embebidas en un medio elástico, los coeficientes de frecuencias naturales aumentan. Esto se debe a que la fundación elástica aporta energía de deformación al sistema. Por lo cual, en la medida que los parámetros elásticos de la fundación K_w y K_p aumenten, los coeficientes de frecuencia también lo harán.

De las Tablas 3 a 6, puede notarse que el efecto de rigidizar la fundación se hace más significativo, en cuanto al incremento de los coeficientes de frecuencia, para valores de $K_w \geq 100$. Además, se evidencia que el efecto de la fundación Pasternak es más notable para valores pequeños de K_w , ya que cuando la fundación Winkler es más rígida ($K_w \rightarrow \infty$) el efecto de K_p se vuelve despreciable (se obtienen los mismos coeficientes de frecuencia).

De las Tablas 3 a 6, el efecto de la geometría que emerge claramente es que cuando la sección se ahúsa hacia el extremo libre, los coeficientes fundamentales aumentan. Esto se debe a que la masa inercial se reduce en las zonas de mayor desplazamiento, y por ende, la energía cinética disminuye. El mayor efecto se logra cuando se hacen variar al ancho b y la altura h (Caso D). Comparando los Casos B y C, si bien el momento de inercia I y el área A de la sección transversal disminuyen, la energía de deformación desciende más cuando varía h que cuando varía b , pues h varía al cubo en I . En el área A el efecto es lineal, por lo que la energía cinética se reduce de igual manera en ambos casos. Por ende en el balance energético, tiene mayor efecto de rigidización dinámica disminuir el ancho b que disminuir la altura h .

En cuanto a la rigidización lograda de implementar el material AFG, los coeficientes fundamentales evidencian un aumento del 33% al 67%, dado que estos se incrementan con el ahusamiento ($b_L \rightarrow 0$ y $h_L \rightarrow 0$) y con la rigidización de la fundación elástica ($K_w \rightarrow \infty$).

Quedó demostrado que el método de Rayleigh-Ritz es una herramienta precisa y eficiente para obtener resultados en esta clase de problemas.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el patrocinio del presente trabajo a la Universidad Nacional del Sur (UNS), al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) y a la Comisión de Investigaciones Científicas de la Provincia de Buenos Aires (CIC). El mismo se llevó a cabo en el Departamento de Ingeniería y en el Instituto de Ingeniería de la UNS.

REFERENCIAS

- Avcar, M. y Mohammed, W.K.M., Free vibration of functionally graded beams resting on Winkler-Pasternak foundation. *Arabian Journal of Geosciences*, 11(10), 2018.
- Aristazábal-Ochoa J.D., Estructuras de vigas sobre suelos elásticos de rigidez variable. *Rev. Int. de Desastres Naturales, Accidentes e Infraestructura Civil*, 3(2): 157–174, 2004.
- Bezerra, W.K.S., Soares L.S. y Hoefel, S. S., Free vibration analysis for Euler-Bernoulli beam

- on Pasternak foundation. *24th ABCM International Congress of Mechanical Engineering (COBEM)*, 1–9, 2017.
- Çetin, D. y Şimşek, M., Free vibration of an axially functionally graded pile with pinned ends embedded in Winkler-Pasternak elastic medium. *Struct. Eng. Mech.*, 40(4): 583–594, 2011.
- Chen, W.Q., Lü, C.F. y Bian, Z.G., A mixed method for bending and free vibration of beams resting on a Pasternak elastic foundation. *Appl. Math. Modelling*, 28:877–890, 2004.
- Civalek, Ö. y Öztürk, B., Free vibration analysis of tapered beam-column with pinned ends embedded in Winkler-Pasternak elastic foundation. *Geom. Eng.*, 2:45–56, 2010.
- Duy, H.T., Van, T.N. y Noh, H.C. Eigen analysis of functionally graded beams with variable cross-section resting on elastic supports and elastic foundation. *Structural Engineering and Mechanics*, 52:1033–1049, 2014
- Eisenberger, M. y Clastornik, J., Beams on variable two-parameter elastic foundation. *ASCE J. Eng. Mech.*, 113(EM10): 1454–1466, 1987.
- Franciosi, C. y Masi, A., Free vibrations of foundation beams on two-parameter elastic soil. *Computers and Structures*, 47: 419–26, 1993.
- Ilanko, S., Monterrubio, L.E. y Mochida, Y., *The Rayleigh-Ritz Method for Structural Analysis*. Wiley & Sons, 2014.
- Kerr, A.D., Elastic and viscoelastic foundation models. *J. Appl. Mech.*, 31:491–498, 1964.
- Koizumi M., FGM activities in Japan. *Composites Part B*, 28:1–4, 1997.
- Laura, P.A.A., Optimization of Variational Methods. *Ocean Eng.*, 22(3):235–250, 1995.
- Naidu, N.R. y Rao, G.V., Vibrations of initially stressed uniform beams on a two-parameter elastic foundation. *Computers and Structures*, 57:941–943, 1995.
- Nakamura, T., Wang, T. y Sampath, S., Determination of properties of graded materials by inverse analysis and instrumented indentation. *Acta Materialia*, 48:4293–4306, 2000.
- Obara, P., Vibrations and stability of Bernoulli-Euler and Timoshenko beams on two-parameter elastic foundation. *Archives of Civil Engineering*, 60:421–440, 2014.
- Pasternak, P.L., On a new method of analysis of an elastic foundation by means of two foundation constants. Gos. Izd. Lip. po Strait i Arkh. Moscow, (in Russian) 1954.
- Rahbar-Ranji, A. y Shahbazzadeh A., Free vibration analysis of beams on a Pasternak foundation using Legendre polynomials and Rayleigh-Ritz method. *Odessa Polytechnic University*, 3(53): 20–31, 2017.
- Sahraee, S. y Saidi, A.R., Free vibration and buckling analysis of functionally graded deep beam-columns on two-parameter elastic foundations using the differential quadrature method. *Proc. IME, Part C: J. Mech. Eng. Sci.*, 223:1273–1284, 2009.
- Soltani, M. y Asgarian, B., New hybrid approach for free vibration and stability analyses of axially functionally graded Bernoulli-Euler beams with variable cross-section resting on uniform Winkler-Pasternak foundation. *L.A.J.S.S.*, 16(3) e173:1–25, 2019.
- Su, H., Banerjee, J.R. y Cheung, C.W., Dynamic stiffness formulation and free vibration analysis of functionally graded beams. *Composite Structures*, 106:854–862, 2013.
- Selvadurai, A.P.S., *Elastic Analysis of Soil-Foundation Interaction*. Developments in Geotechnical Engineering, Vol. 17, Elsevier Science, 1979.
- Wang, C.M., Lam, K.Y. y He, X.Q., Exact Solutions for Timoshenko Beams on Elastic Foundations Using Green's Functions. *Mech. Struct. & Mach.*, 26:(1):101–113, 1998.
- Winkler, E., *Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit*. H. Dominicus, Prague, 1867.
- Ying, J., Lü, C.F. y Chen, W.Q., Two-dimensional elasticity solutions for functionally graded beams resting on elastic foundations. *Composite Structures*, 84:209–219, 2008.
- Yokoyama, T., Vibrations of Timoshenko beam-columns on two-parameter elastic foundations. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 20:355–370, 1991.