

SISTEMAS ESTRUCTURALES SIMPLES SOMETIDOS A EXCITACIONES DE FRECUENCIA VARIABLE EN EL TIEMPO: ESTUDIO ANALÍTICO Y VALIDACIÓN CUALITATIVA EXPERIMENTAL

C. A. Rossit^{a,b}, S. La Malfa^{a,b} y P. A. A. Laura^a

^(a)Departamento de Ingeniería. Instituto de Mecánica Aplicada. Universidad Nacional del Sur.
Av. Alem 1253 (B8000CPB), Bahía Blanca, Argentina

^(b)Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)

e-mail: carossit@criba.edu.ar, slamalfa@criba.edu.ar, ima@criba.edu.ar.

Palabras clave: Vibraciones, frecuencia variable, amortiguamiento.

Resumen. La literatura técnico científica contiene una muy limitada cantidad de información sobre el comportamiento de sistemas mecánicos sometidos a fuerzas dinámicas con frecuencias dependientes del tiempo. Una de las excepciones la constituye un interesante trabajo de Suzuki (*J. Sound Vib.* 57, 59-64, (1978)), quien considera vibraciones transversales de una viga sometida a una carga distribuida del tipo:

$$f(t) = q_0 \operatorname{sen}(\omega_0 t^2)$$
 sin tener en cuenta el amortiguamiento.

En el presente estudio se presenta una reseña de resultados cualitativos obtenidos para los siguientes casos:

- sistema de un grado de libertad
- viga simplemente apoyada sometida a: I) carga dinámica uniformemente distribuida y II) fuerza concentrada
- placa rectangular simplemente apoyada, también sometida a I) carga dinámica uniformemente distribuida y II) carga concentrada.

En todos los casos la excitación externa varía de acuerdo con la ley $\operatorname{sen}(\omega_0 t^2)$.

Se desarrolló asimismo un modelo experimental, para el caso de la viga simplemente apoyada con el objeto de verificar los resultados analíticos en forma cualitativa. Como era de esperar, la respuesta experimenta un máximo cuando la excitación alcanza la frecuencia natural del sistema y luego decae.

De la comparación, se observa la importancia de tener en cuenta en el modelo el amortiguamiento del sistema (se considera un amortiguamiento de tipo viscoso), el que para las estructuras usuales asume un valor bajo, para analizar el comportamiento en estado de régimen del sistema.

En caso contrario, al igual que en el trabajo de Suzuki, 1978 el modelo analítico se desvía del comportamiento verificado experimentalmente, cuando la frecuencia de excitación supera al natural del sistema. Ello marca una importante diferencia conceptual con los sistemas sometidos a excitaciones de frecuencia constante, ya que cuando se estudia su comportamiento en estado de régimen, la incidencia del amortiguamiento, en general, puede no ser considerada, en una primera aproximación.

1! INTRODUCCIÓN

El estudio del comportamiento dinámico de elementos estructurales sometidos a fuerzas variables en el tiempo (vibración forzada) se efectúa habitualmente para el caso en que la frecuencia de variación de dichas solicitaciones es constante, es decir del tipo $P(t) = P \text{ sen } \omega_o t$.

En esos casos, es habitual al estudiar el estado de régimen de la estructura, no considerar en las fuerzas actuantes a la fuerza de amortiguamiento.

Basta citar la clásica obra de [Weaver, Timoshenko y Young, 1990](#), donde explícitamente se manifiesta que la influencia del amortiguamiento sólo debe ser considerada cuando la frecuencia de excitación coincide o es muy próxima a alguna frecuencia natural del sistema.

En virtud de ello, resulta natural, en primera instancia efectuar el análisis de un elemento estructural sometido a una fuerza que varía en el tiempo según una ley $\text{sen } \omega_o t^2$, sin tener en cuenta la fuerza de amortiguamiento.

2! SOLUCIÓN ANALÍTICA: ETAPA I

a) Sin considerar fuerza de amortiguamiento.

2.1! Sistema de un grado de libertad:

A los efectos de explicitar la metodología empleada en la resolución del problema, se estudiará en primer lugar el sistema de un grado de libertad.

La ecuación diferencial gobernante del sistema será:

$$\ddot{x} + \frac{k}{M} x = \frac{F_o}{M} \text{sen}(\omega_o t^2) \quad (1)$$

y las condiciones iniciales:

$$x(0) = \dot{x}(0) = 0 \quad (2)$$

La solución de (1) es:

$$x(t) = A \cos(\omega_n t) + B \text{sen}(\omega_n t) + x_p \quad (3)$$

donde $\omega_n = \sqrt{k/M}$ es la frecuencia natural del sistema.

La solución particular $x_p(t)$ puede ser determinada utilizando el procedimiento de variación de parámetros, [Wylie, 1960](#) según el cual:

$$x_p = u_1 x_1 + u_2 x_2 \quad (4)$$

con $x_1 = \cos \omega_n t$ y $x_2 = \text{sen } \omega_n t$ soluciones de la ecuación diferencial homogénea y u_1 y u_2 dados por:

$$u'_1 = -\frac{x_2}{x_1 x'_2 - x_2 x'_1} \frac{F_o}{M} \text{sen}(\omega_o t^2) \quad (5 \text{ a})$$

$$u'_2 = \frac{x_1}{x_1 x'_2 - x_2 x'_1} \frac{F_o}{M} \text{sen}(\omega_o t^2) \quad (5 \text{ b})$$

Reemplazando x_1 y x_2 en (5 a,b) e integrando tenemos:

$$u_1 = -\frac{F_o}{M\omega_n} \int \text{sen}(\omega_n t) \text{sen}(\omega_o t^2) dt \quad (6 \text{ a})$$

$$u_2 = \frac{F_o}{M\omega_n} \int \text{cos}(\omega_n t) \text{sen}(\omega_o t^2) dt \quad (6 \text{ b})$$

Por lo tanto, reemplazando según (6) en (4) y en (3) y teniendo en cuenta las condiciones (2) se llega a:

$$x(t) = \frac{F_o}{M\omega_n} \left[\text{sin}(\omega_n t) \int_0^t \text{cos}(\omega_n t) \text{sen}(\omega_o t^2) dt - \text{cos}(\omega_n t) \int_0^t \text{sin}(\omega_n t) \text{sen}(\omega_o t^2) dt \right] \quad (7)$$

Debe hacerse notar que $x(t) = x_p(t)$ ya que resulta $A=B=0$ en (3), pues x_p cumple con las condiciones (2) por construcción.

Integrando por partes para resolver (7) se llega a:

$$x(t) = \frac{F_o}{M\omega_n} \sqrt{\frac{\pi}{2\omega_o}} \left[\text{cos}(\omega_n t) S\left(\sqrt{\frac{2\omega_o}{\pi}} t\right) + \omega_n \int_0^t S\left(\sqrt{\frac{2\omega_o}{\pi}} t\right) \text{sen}(\omega_n t) dt + \right. \\ \left. + \text{sen}(\omega_n t) S\left(\sqrt{\frac{2\omega_o}{\pi}} t\right) + \omega_n \int_0^t S\left(\sqrt{\frac{2\omega_o}{\pi}} t\right) \text{cos}(\omega_n t) dt \right] \quad (8)$$

donde $S(z)$ es la integral de Fresnel definida por:

$$S(z) = \int_0^z \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} t^2\right) dt$$

La Figura 1 muestra la variación del desplazamiento adimensional $\left(\frac{x_o}{F_o/k}\right)$ como función del parámetro adimensional de tiempo: $(\omega_n t)$ para un valor arbitrario de la relación

$\frac{\omega_0}{\omega_n^2} = 0.007$. Asimismo se indica el tiempo cuando la frecuencia externa alcanza la frecuencia

natural del sistema ω_n :
$$\left(\omega_n t = \frac{1}{2\omega_0/\omega_n^2} - \pi \right)$$

También es superpuesta en el gráfico la variación de la fuerza externa

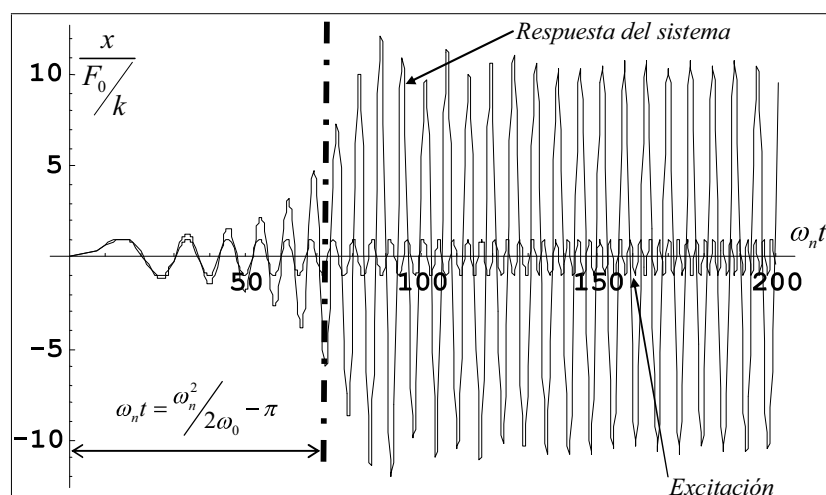


Figura 1: Respuesta del sistema de un grado de libertad sin amortiguamiento sometido a una fuerza excitadora:

$$F_0 \text{ sen}[\omega_0 t^2] \text{ para una relación } \frac{\omega_0}{\omega_n^2} = 0.07$$

2.2! Viga simplemente apoyada con carga concentrada: $P(x, t) = P_0 \delta(x - x_0) \text{ sen}(\omega_0 t^2)$

A continuación se detalla el desarrollo de este caso a los efectos de su comparación con ensayos experimentales.

La ecuación diferencial gobernante se expresa

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \rho A_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = P_0 \delta(x - x_0) \text{ sen}(\omega_0 t^2) \quad (9)$$

donde v , E , I , A_0 y ρ son la deflexión, módulo de Young, momento de inercia, área de la sección transversal y densidad de la viga, respectivamente. A su vez δ es la función delta de Dirac y x_0 es el punto de aplicación de la carga

La solución puede expresarse en términos de los modos normales de la viga:

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L} x\right) T_n(t) \quad (10)$$

Resulta conveniente desarrollar la carga concentrada en la forma:

$$P_0 \delta(x-x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \frac{2}{L} P_0 \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x_0\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (11)$$

Reemplazando (11) y (10) en (9) se obtiene:

$$\ddot{T}_n(t) + \omega_n^2 T_n(t) = \frac{2}{L} \frac{P_0}{\rho A_0} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x_0\right) \operatorname{sen}(\omega_0 t^2) \quad (12)$$

donde $\omega_n = n^2 \frac{\pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A_0}} = n^2 \omega_1$ son las frecuencias naturales de la viga.

Siguiendo el procedimiento descrito para el sistema de un grado de libertad se obtiene:

$$v(x,t) = \frac{2}{L} \frac{P_0}{\rho A_0} \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{1}{\omega_n} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x_0\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cdot \left(\operatorname{sen}(\omega_n t) \int_0^t \cos(\omega_n t) \operatorname{sen}(\omega_0 t^2) dt - \cos(\omega_n t) \int_0^t \operatorname{sen}(\omega_n t) \operatorname{sen}(\omega_0 t^2) dt \right) \quad (13)$$

La figura 2 muestra los desplazamientos adimensionales en el centro de la viga $\left[\frac{v EI}{P_0 L^3} \right]_{x=L/2}$ en función del tiempo adimensional $(\omega_1 t)$, cuando la fuerza concentrada está ubicada en esa misma sección

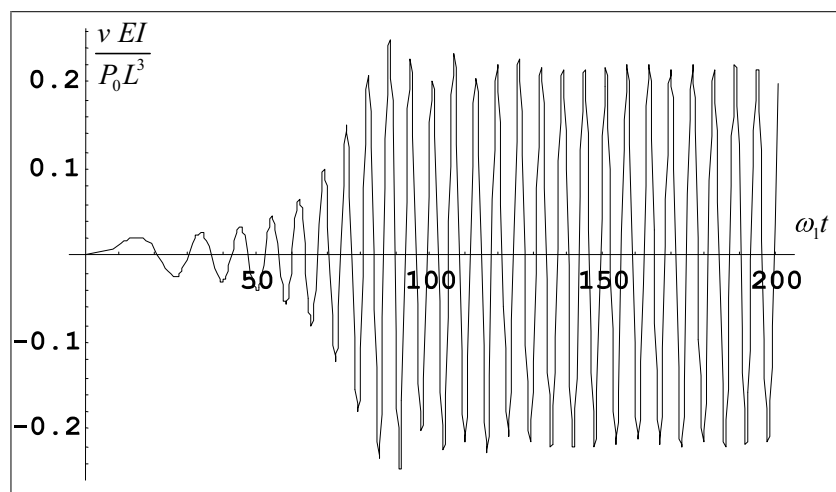


Figura2: Desplazamiento adimensional en el centro de una viga simplemente apoyada para una fuerza: $F_0 \operatorname{sen}[\omega_0 t^2]$ ubicada en la misma sección para una relación $\omega_0 / \omega_n^2 = 0.007$

La variación del desplazamiento en el tiempo que evidencia la Figura 2, es similar a la que obtiene Suzuki en el trabajo mencionado.

3! FASE EXPERIMENTAL DE LA INVESTIGACIÓN

Fue evaluado el comportamiento de una viga de acero simplemente apoyada, con sección transversal rectangular ($L = 58$ cm.; $b = 1.6$ cm.; $h = 0.35$ cm) a la que se adosó en su sección media una masa concentrada de 180 gr. con el objeto de disminuir su frecuencia fundamental.

La frecuencia fundamental del sistema ensayado es de $f_1 = 12.85$ Hz.

La señal de excitación parte de un generador de funciones senoidales, luego es amplificada y por ultimo enviada a un parlante cuyo cono posee un elemento de prolongación encargado de realizar el contacto puntual sobre la viga. La frecuencia es variada, de manera aproximada, con el cuadrado de la variable temporal.

La Figura 3 muestra, esquemáticamente, el dispositivo experimental empleado para esta fase de la investigación.

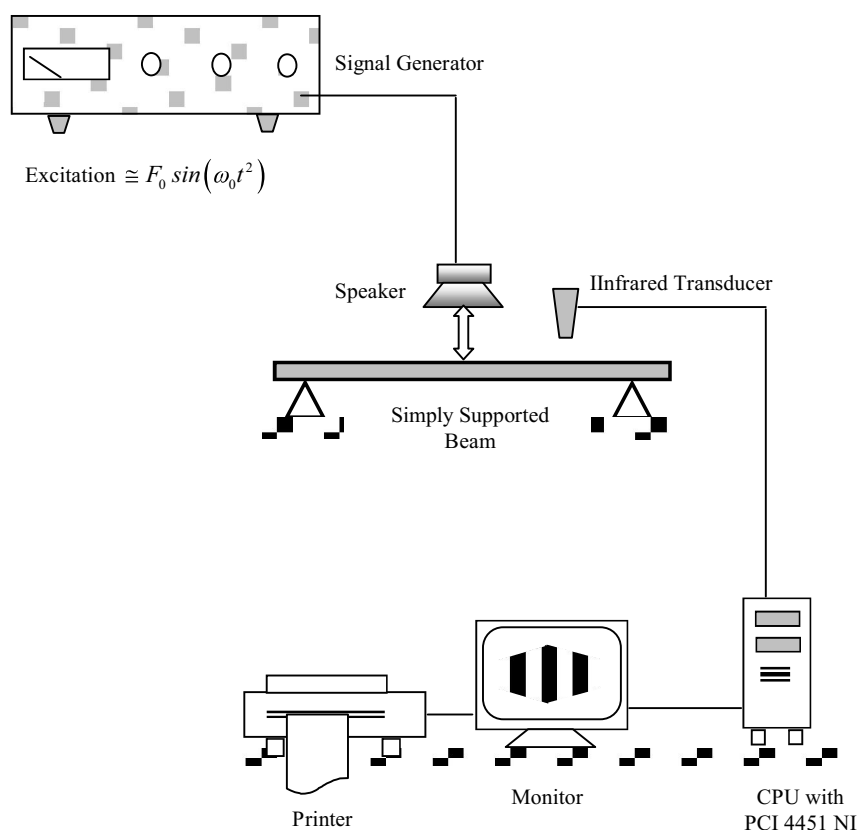


Figura 3: Dispositivo experimental

En la Figura 4 , se indica un registro típico de la respuesta detectada en la viga, por el transductor infrarrojo IMA , [La Malfa,1999](#) y procesada a través de la tarjeta adquisidora de datos PCI 4451 de National Instruments.

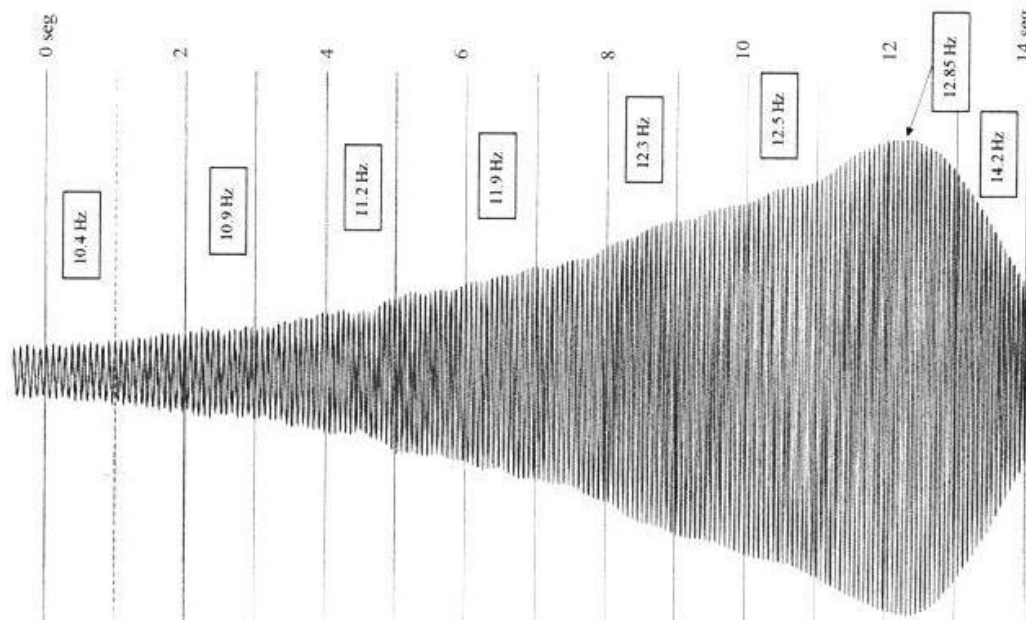


Figura 4: Respuesta hallada en el centro de la viga a través del dispositivo esquematizado en Figura 3

Como era de esperar, una vez que la frecuencia fundamental es sobrepasada la respuesta decae.

El modelo analítico planteado, prescindiendo de la fuerza de amortiguamiento, muestra su falencia al no poner en evidencia esta característica lógica del comportamiento dinámico del sistema.

Cabe aclarar, en esta instancia, que el objetivo esencial de la experimentación, ha sido el de efectuar una corroboración meramente cualitativa de la respuesta de un sistema elástico ante una excitación dinámica cuya frecuencia varía en el tiempo.

4! SOLUCIÓN ANALÍTICA: ETAPA II.

En virtud de la falta de convergencia del modelo analítico planteado en primera instancia hacia el comportamiento real de los sistemas, se analizan a continuación distintos sistemas estructurales sometidos a excitaciones dinámicas cuya frecuencia es variable en el tiempo, tomando en consideración el amortiguamiento del sistema, el que, dado el carácter cualitativo del estudio, se adopta por simplicidad como viscoso

Al igual que en el caso anterior, se comienza con el sistema de un grado de libertad,

4.1. Sistema de un grado de libertad.

La ecuación diferencial gobernante es ahora:

$$\frac{\ddot{x}}{m} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\text{sen}(\omega_0 t^2) \quad (14)$$

Aplicando el procedimiento descrito en 2.1), en este caso serán:

$$x_1 = e^{(-p+iq)t} \quad x_2 = e^{(-p-iq)t} \quad (15)$$

donde:

$$p = \frac{c}{2m} = \omega_n \frac{c}{c_{cr}} \quad , \quad q = \sqrt{\omega_n^2 - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} = \omega_n \sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_{cr}}\right)^2} \quad \text{con} \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{M}} \quad \text{y} \quad c_{cr} = 4 km$$

con lo que reemplazando en (5a) y (5b) se obtiene:

$$u'_1 = -\frac{i e^{(p-iq)t}}{2q} \frac{F_0}{M} \text{sen}(\omega_0 t^2) \quad (16 a)$$

$$u'_2 = \frac{i e^{(p+iq)t}}{2q} \frac{F_0}{M} \text{sen}(\omega_0 t^2) \quad (16 b)$$

De (4) y (16) se llega a:

$$x = x_p = \frac{F_0}{M} \left[e^{(-p+iq)t} \int_0^t -\frac{i e^{(p-iq)t}}{2q} \text{sen}(\omega_0 t^2) dt + e^{(-p-iq)t} \int_0^t \frac{i e^{(p+iq)t}}{2q} \text{sen}(\omega_0 t^2) dt \right] \quad (17)$$

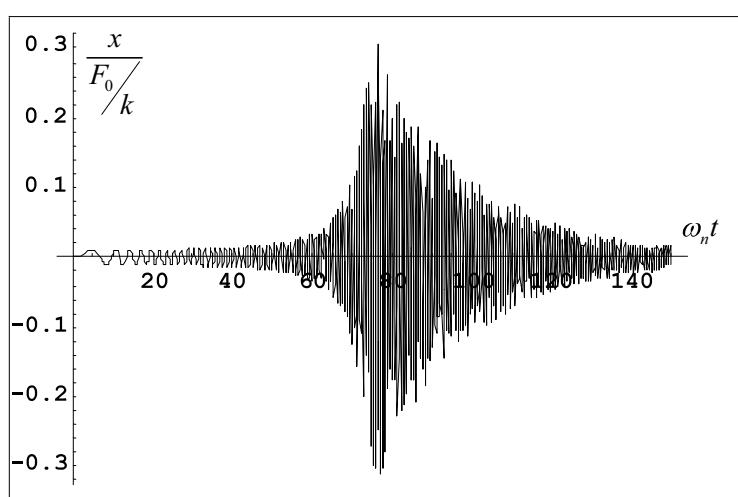


Figura 5: Respuesta del sistema de un grado de libertad con amortiguamiento viscoso sometido a una fuerza excitadora: $F_0 \text{sen}[\omega_0 t^2]$ para una relación $\frac{\omega_0}{\omega_n^2} = 0.07$ y $\frac{c}{c_r} = 0.04$

En la Figura 5, se muestra la variación del desplazamiento adimensional $\left(\frac{x}{F_0/k}\right)$ en función del tiempo adimensional para los valores $\frac{c}{c_{cr}} = 0.004$ y $\frac{\omega_0}{\omega_n} = 0.007$ adoptados arbitrariamente.

Se observa ahora que, al tener en cuenta el amortiguamiento, la respuesta del sistema una vez superada su frecuencia natural decae.

A continuación serán considerados con el mismo enfoque los siguientes sistemas estructurales.

4.2. Viga simplemente apoyada.

Se analizarán dos estados de carga:

4.2 a) Carga distribuida uniforme: $q = q_0 \text{ sen}(\omega_0 t^2)$

En este caso la ecuación gobernante viene dada por.

$$EI \frac{\partial^4 v}{dx^4} + c \frac{\partial v}{\partial t} + \rho A_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = q_0 \text{ sen}(\omega_0 t^2) \quad (18)$$

Como es sabido, la respuesta puede expresarse en términos de las autofunciones de la viga.

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) T_n(t) \quad (19)$$

Desarrollando la carga:

$$q_0 = \frac{4}{\pi} q_0 \sum_{n=1,3}^{\infty} \frac{1}{n} \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (20)$$

Reemplazando en (8) según (19) y (20) resulta:

$$\sum_{n=1,3}^{\infty} \left[\left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 EI T_n(t) + c \dot{T}_n + \rho A_0 \ddot{T}_n - \frac{4}{\pi} q_0 \frac{1}{n} \text{sen}(\omega_0 t^2) \right] \text{sen}\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = 0 \quad (21)$$

Por lo tanto:

$$\ddot{T}_n + \frac{c}{\rho A_0} \dot{T}_n + \omega_n^2 T_n = \frac{4}{\pi} \frac{q_0}{\rho A_0} \frac{1}{n} \text{sen}(\omega_0 t^2) \quad (22)$$

resultando así una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden no homogénea en $T_n(t)$.

Su solución, de acuerdo con el procedimiento descrito para el sistema de un grado de libertad es:

$$T_n(t) = \frac{4}{\pi} \frac{q_0}{\rho A_0} \frac{1}{n} \left[e^{(-p+iq_n)t} \int_0^t -\frac{i}{2} \frac{e^{(p-iq_n)t}}{q_n} \text{sen}(\omega_0 t^2) dt + e^{(-p-iq_n)t} \int_0^t \frac{i}{2} \frac{e^{(p+iq_n)t}}{q_n} \text{sen}(\omega_0 t^2) dt \right] \quad (23)$$

donde ahora:

$$p = \frac{c}{2\rho A_0} \quad q_n = \sqrt{\omega_n^2 - \left(\frac{c}{2\rho A_0}\right)^2} \quad \omega_n = n^2 \frac{\pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A_0}} = n^2 \omega_1$$

Reemplazando (23) en (19) se obtiene la respuesta en toda sección de la viga.

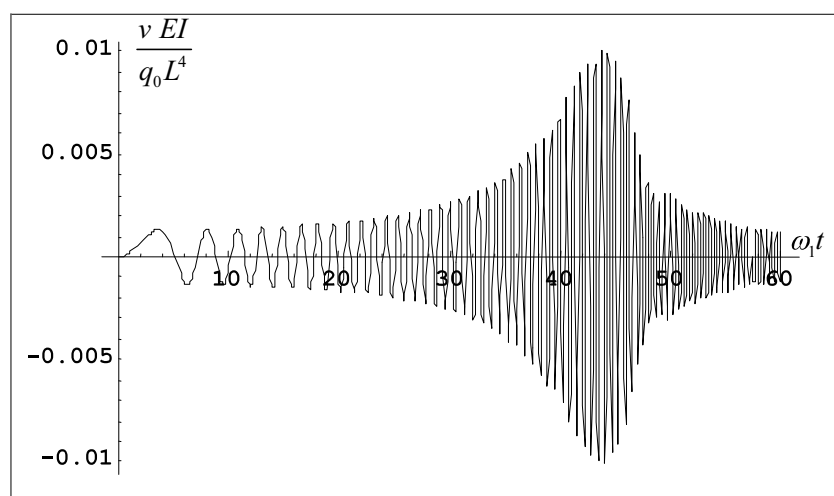


Figura 6: Desplazamiento adimensional en el centro de una viga simplemente apoyada sometida a una carga excitadora uniforme: $q_0 \text{sen}[\omega_0 t^2]$ para una relación $\omega_0/\omega_n^2 = 0.12$ y $c/2\rho A_0 \omega_1 = 0.06$

La figura 6 muestra la respuesta dinámica en el centro de la viga en función del tiempo adimensional $(\omega_1 t)$.

4.2.b: Viga simplemente apoyada sometida a carga concentrada $P_0 \text{sen}(\omega_0 t^2)$

La ecuación que gobierna el problema:

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + c \frac{\partial v}{\partial t} + \rho A_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = P_0 \delta(x - x_0) \text{sen}(\omega_0 t^2) \quad (24)$$

Nuevamente, la expresión (19) indicará la respuesta del sistema:

En este caso, la carga quedará expresada:

$$P_0 \delta(x - x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{sen} \frac{n\pi}{L} x = \frac{2P_0}{L} \sum_1^{\infty} \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x_0 \right) \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) \quad (25)$$

Resultando así el desplazamiento de la viga:

$$v(x, t) = \frac{2P_0}{\rho A_0 L} \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x_0 \right) \text{sen} \left(\frac{n\pi}{L} x \right) \cdot \left[e^{(-p+iq_n)t} \int_0^t \frac{ie^{(p-iq_n)t}}{2q_n} \text{sen}(\omega_0 t^2) dt + e^{(-p-iq_n)t} \int_0^t \frac{ie^{(p+iq_n)t}}{2q_n} \text{sen}(\omega_0 t^2) dt \right] \quad (26)$$

En la Figura 6b, se muestra el corrimiento adimensional el centro de la viga $\left(\frac{v(L/2)}{P_0 L^3 / EI} \right)$ cuando la carga concentrada se halla ubicada en el mismo punto en función del tiempo adimensional $(\omega_1 t)$.

Nuevamente la respuesta decae luego de que la frecuencia de la fuerza excitadora supera la primera frecuencia natural.

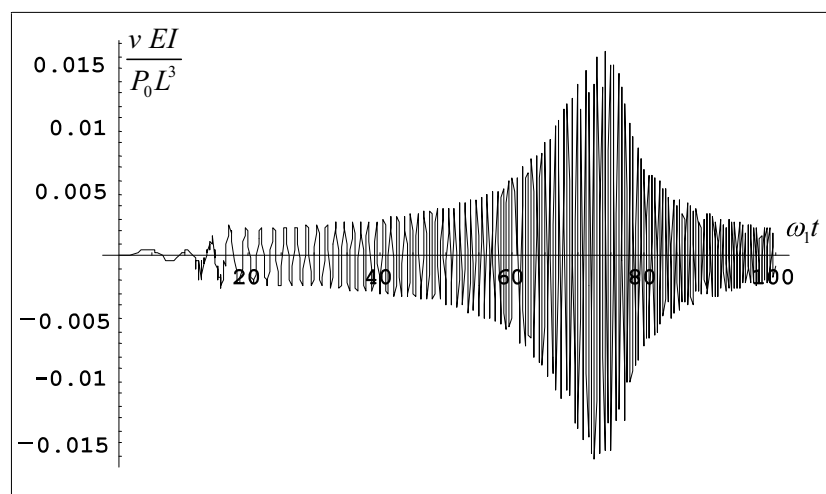


Figura 7: Desplazamiento adimensional en el centro de la viga simplemente apoyada sometida a una carga

excitadora: $P_0 \text{sen}[\omega_0 t^2]$ ubicada en esa sección para una relación $\frac{\omega_0}{\omega_n^2} = 0.07$ y $\frac{c}{2\rho A_0 \omega_1} = 0.06$

A los efectos de una mejor comparación cualitativa, con la respuesta evaluada experimentalmente (Fig. 4) en la Figura 8 se muestra el tramo de la respuesta analítica entre los tiempos adimensionales $\omega_n t = 30$ y $\omega_n t = 80$.

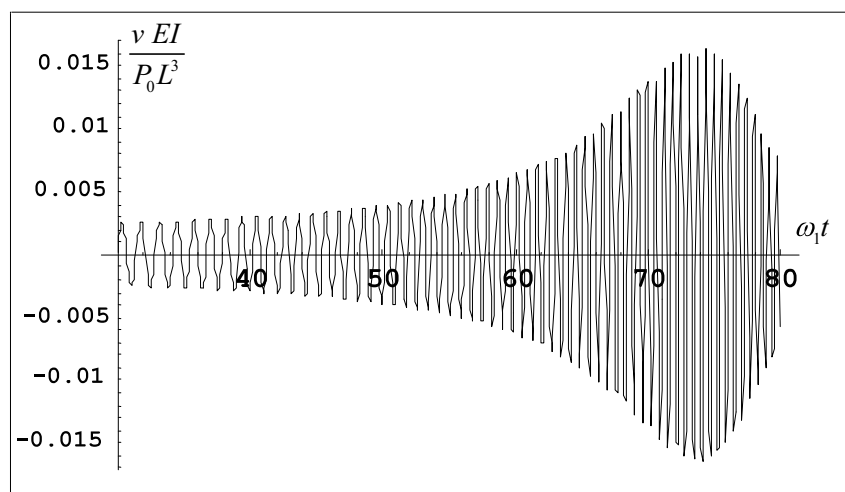


Figura 8: Respuesta de la viga evaluada entre $\omega_1 t = 30$ y $\omega_1 t = 80$

Se observa la concordancia en el aspecto de la respuesta que se logra al tener en cuenta el amortiguamiento.

4.3. Placas rectangulares simplemente apoyadas.

Se analizarán placas bajo los estados de carga:

4.3.a): Carga distribuida uniforme $q_0 \text{sen}(\omega_0 t^2)$.

A continuación se realizará el estudio de una placa rectangular de lados a , b simplemente apoyada sometida a la acción de una carga dinámica distribuida, y cuyo valor, uniforme en toda la placa, varía según la ley: $q_0 \text{sen}(\omega_0 t^2)$.

La ecuación diferencial gobernante es:

$$D\nabla^4 w + c \frac{\partial w}{\partial t} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q_0 \text{sen}(\omega_0 t^2) \quad (27)$$

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ rigidez a flexión de la placa de espesor h y μ es el coeficiente de Poisson.

$w(x, y, t)$ es la deflexión del plano medio de la placa y, como es sabido, en este caso puede expresarse:

$$w(x, y, t) = \sum_{n=1,3}^{\infty} \sum_{m=1,3}^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right) T_{nm}(t) \quad (28)$$

Conviene desarrollar la carga uniforme:

$$q_0 = \frac{16}{\pi^2} q_0 \sum_{n=1,3}^{\infty} \sum_{m=1,3}^{\infty} \frac{1}{nm} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \quad (29)$$

Reemplazando (29) y (28) en (27) se llega a:

$$\sum_{n=1,3}^{\infty} \sum_{m=1,3}^{\infty} \left\{ D \left[\left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 \right]^2 T_{nm} + c \dot{T}_{nm} + \rho h \ddot{T}_{nm} - \frac{16}{\pi^2} \frac{q_0}{nm} \operatorname{sen}(\omega_0 t^2) \right\} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi}{b}y\right) = 0 \quad (30)$$

y debe ser:

$$\ddot{T}_{nm} + \frac{c}{\rho h} \dot{T}_{nm} + \omega_{nm}^2 T_{nm} = \frac{16}{\pi^2} \frac{q_0}{\rho h} \frac{\operatorname{sen}(\omega_0 t^2)}{nm} \quad (31)$$

Aplicando como en los casos anteriores el método de variación de parámetros se tiene:

$$w(x, y, t) = \frac{16}{\pi^2} \frac{q_0}{\rho h} \sum_{n=1,3}^{\infty} \sum_{m=1,3}^{\infty} \frac{1}{nm} \left(\operatorname{sen} \frac{n\pi}{a} x \right) \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi}{b} y \right) \left[e^{(-p+iq_{nm})t} \int_0^t \frac{ie^{(p-iq_{nm})t}}{2q_{nm}} \operatorname{sen}(\omega_0 t^2) dt + e^{(-p-iq_{nm})t} \int_0^t \frac{ie^{(p+iq_{nm})t}}{2q_{nm}} \operatorname{sen}(\omega_0 t^2) dt \right] \quad (32)$$

donde, en este caso:

$$p = \frac{c}{2\rho h} \quad q_{nm} = \sqrt{\omega_{nm}^2 - \left(\frac{c}{2\rho h} \right)^2} \quad \omega_{nm} = \pi^2 \sqrt{\frac{D}{\rho h} \left[\left(\frac{n}{a} \right)^2 + \left(\frac{m}{b} \right)^2 \right]}$$

4.3 b): Carga concentrada $P_0 \operatorname{sen}(\omega_0 t^2)$ en (x_0, y_0)

Ecuación gobernante:

$$D\nabla^4 w + c \frac{\partial w}{\partial t} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = P_0 \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \text{sen}(\omega_0 t^2) \quad (33)$$

Considerando la solución (28) y desarrollando $P_0 \delta(x - x_0) \delta(y - y_0)$ en serie doble de Fourier, la respuesta de la placa es:

$$w(x, y, t) = \frac{4}{ab} \frac{P_0}{\rho h} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \text{sen}\left(\frac{n\pi}{a} x_0\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi}{b} y_0\right) \text{sen}\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \text{sen}\left(\frac{m\pi}{b} y\right) \quad (34)$$

$$\left[e^{(-p+iq_{nm})t} \int_0^t \frac{i e^{(p-iq_{nm})t}}{2q_{nm}} \text{sen}(\omega_0 t^2) dt + e^{(-p-iq_{nm})t} \int_0^t \frac{i e^{(p+iq_{nm})t}}{2q_{nm}} \text{sen}(\omega_0 t^2) dt \right]$$

Las figuras 9 y 10 muestran la vibración de una placa cuadrada $a = b$.

En la Figura 9 se muestra el desplazamiento adimensional en el centro de la placa ($x = y = a/2$) en función del parámetro de tiempo adimensional ($\omega_0 t$) cuando la excita una fuerza distribuida uniforme -caso a)- .

En la Figura 10 ilustra la deflexión en el centro de la placa para una fuerza concentrada actuando en el mismo punto ($x_0 = y_0 = a/2$), -caso b)-.

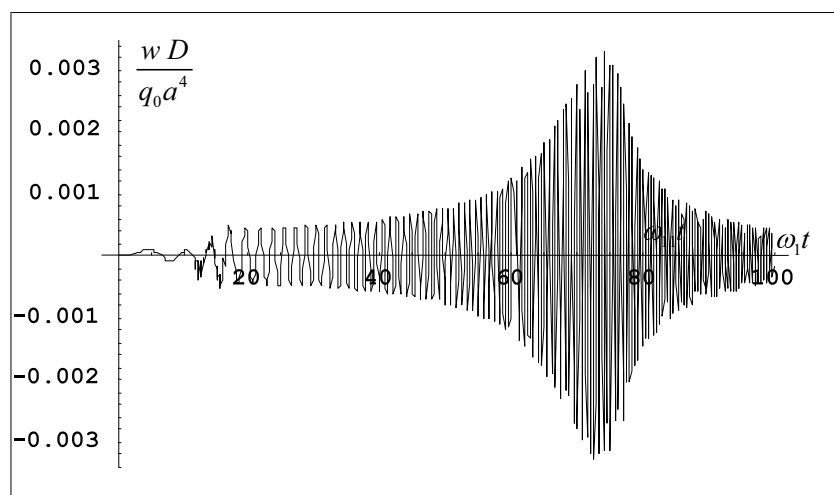


Figura 9: Desplazamiento adimensional en el centro de la placa cuadrada simplemente apoyada sometida a una carga uniforme excitadora: $q_0 \text{sen}[\omega_0 t^2]$ para una relación $\omega_0 / \omega_n^2 = 0.07$ y $c / 2\rho h \omega_{11} = 0.06$

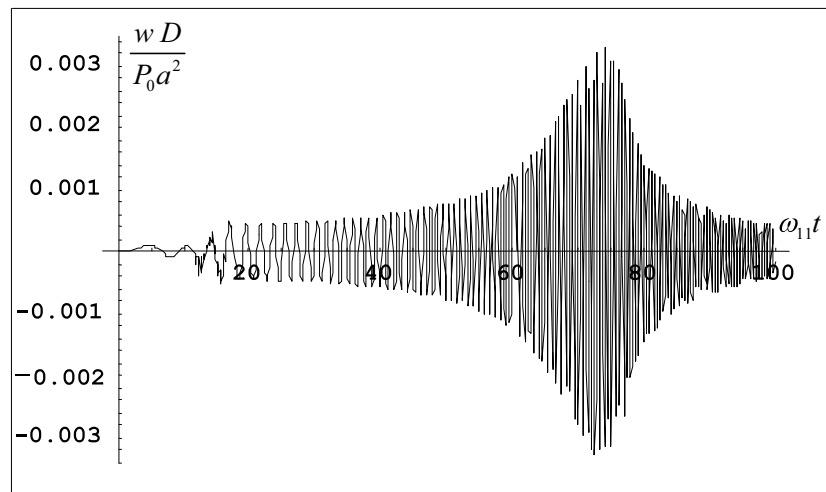


Figura 10: Desplazamiento adimensional en el centro de la placa cuadrada simplemente apoyada sometida a una carga: $P_0 \text{ sen}[\omega_0 t^2]$ ubicada en ese punto para una relación $\omega_0/\omega_n^2 = 0.07$ y $c/2\rho h\omega_{11} = 0.06$

5! CONCLUSIONES:

En el trabajo se ha obtenido analíticamente la respuesta de distintos sistemas elásticos simples cuando son sometidos a una fuerza excitadora cuya frecuencia varía con el tiempo. Se utilizó un procedimiento unificado para los distintos casos tratados, resolviendo la ecuación diferencial mediante el clásico método de variación de parámetros. El software Matemática[®] resultó de gran utilidad en la evaluación de las expresiones

Los resultados analíticos obtenidos comparan cualitativamente en forma satisfactoria con los resultados experimentales, cuando en el modelo analítico se incluye la fuerza de amortiguamiento, aún del tipo más simple como lo es el viscoso.

6! AGRADECIMIENTOS.

El presente trabajo ha sido auspiciado por la Secretaría General de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional del Sur, el CONICET y la CIC de la Provincia de Buenos Aires.

Los autores agradecen la contribución del Sr. Osvaldo Alvarez (Técnico de la CIC) en la preparación de los modelos experimentales y sus valiosas sugerencias

REFERENCIAS:

- S. La Malfa. Some recent applications of the IMA Infrared Transducer in the analysis of vibrating mechanical systems *Journal of Sound and Vibration*, 220(4) 757-764, 1999.
 S.I. Suzuki. Dynamic behavior of a beam subjected to a force of time-dependent frequency. *Journal of Sound and Vibration* 57, 59-64, 1978.

W. Weaver Jr., S.P. Timoshenko, D.H. Young. *Vibration Problems in Engineering*. John Wiley and Sons. New York, 1990.

C. R. Wylie, Jr. *Advanced Engineering Mathematics*. Mc Graw-Hill Book Company, Inc. New York, N.Y., 1960.