

MODELACIÓN DE ESTRUCTURAS LONGITUDINALES ENTERRADAS SOMETIDAS A SISMOS UTILIZANDO ELEMENTOS EMBEBIDOS DE VIGA

SEISMIC BEHAVIOR OF BURIED LONGITUDINAL STRUCTURES MODELED BY MEANS OF EMBEDDED BEAM ELEMENTS

Diego F. Turello^{a,b,d}, Franco P. Soffietti^{b,c} y Federico Pinto^{a,e}

^a*Depto. Estructuras, FCEFyN-UNC, CP:5000, Casilla de Correo 916, Córdoba, Argentina.
diegoturello@gmail.com.ar*

^b*Universidad Católica de Córdoba, FI, Av. Armada Argentina 3555 (X5016DHK), Córdoba, Argentina*

^c*Instituto de Estudios Avanzados en Ingeniería y Tecnología, UNC-CONICET, Av. Vélez Sarsfield 1611,
Córdoba, Argentina*

^d*GIMNI, UTN-FRSF, Lavaisse 610, CP: 3000, Santa Fe, Argentina.*

^e*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET).*

Palabras clave: Comportamiento longitudinal, Elementos de viga embebidos, Interacción cinemática, Interacción suelo-estructura.

Resumen. El comportamiento sísmico de estructuras longitudinales enterradas difiere del de estructuras en superficie ya que los efectos de la interacción dinámica son despreciables frente a la interacción cinemática. Por ello la demanda sísmica surge principalmente debido al patrón de desplazamientos que el medio sólido impone sobre la estructura. La modelación numérica de estos problemas requiere la representación de dos sub-dominios: el suelo y la estructura. En este trabajo se compara el desempeño numérico de un túnel sometido a una onda de corte mediante elementos finitos de vigas embebidos en sólidos con un modelo tridimensional completo de elementos finitos de sólido, a fin de desarrollar conclusiones respecto a la posibilidad de modelar estructuras longitudinales enterradas con este tipo de formulación.

Keywords: Longitudinal behavior, embedded beam elements, kinematical interaction, soil-structure interaction.

Abstract. The seismic behavior of buried longitudinal structures is different from the one of shallow structures. While the inertial effects in dynamic interaction is negligible, the kinematical interaction effects become more relevant. In these kind of structures, the seismic demand is the result of the displacement pattern imposed on the structure by the soil. The numerical modelling of soil-structures problems requires the discretization of both domains, i.e., the soil and the structure. In this paper, the numerical performance of the embedded beam formulation is presented as well as a comparison with a full 3D FEM model of the problem. Finally, some conclusions are presented regarding the suitability of these kind of formulation in the modelling of buried longitudinal structures.

1. INTRODUCCIÓN

Históricamente se consideró que las estructuras enterradas no necesitaban diseñarse para resistir esfuerzos sísmicos ya que, debido a su menor masa en comparación con la del suelo circundante, las mismas se mueven con el terreno (Bobet (2012)). Luego de numerosas investigaciones de daños sísmicos en estructuras subterráneas (Dowding y Rozan (1978); Owen et al. (1981); Sharma y Judd (1991); Yu et al. (2017); Jaramillo (2017)) se desarrollaron métodos de cálculo, estudios detallados y recomendaciones técnicas específicas. El diseño de estructuras longitudinales enterradas involucra verificaciones tanto en sentido axial como en sentido transversal. El comportamiento sísmico sobre el eje longitudinal considera el paso de ondas de corte o de compresión. Un análisis preliminar de la respuesta sísmica longitudinal se puede llevar a cabo ignorando la presencia física del túnel, asumiendo que este tendrá la misma deformación que el terreno en campo libre. Sin embargo, dependiendo de la rigidez relativa entre el suelo y la estructura, este método de análisis puede arrojar una muy pobre predicción de los resultados (Hashash et al. (1998)). La rigidez relativa entre el suelo y la estructura es una propiedad del sistema que controla las deformaciones estructurales durante un terremoto. Si la estructura es significativamente más rígida que el terreno, los esfuerzos están controlados por la rigidez del suelo, mientras que para estructuras flexibles el terreno circundante no tiene mayor influencia sobre los esfuerzos, por lo tanto, la presencia de una estructura más rígida que el suelo circundante limita las deformaciones del suelo (Bobet (2012)). Los métodos habitualmente utilizados en la práctica consideran la hipótesis de Euler–Bernoulli (EB) para el comportamiento flexional y deformaciones de corte puro para el comportamiento transversal, introduciendo aproximaciones inconsistentes entre sí. Estas soluciones además ignoran la interacción dinámica, despreciando la masa estructural. Numerosos autores obtuvieron expresiones analíticas teniendo en cuenta la interacción suelo–estructura (ISE) considerando modelos de vigas tipo EB apoyadas sobre fundaciones elásticas, las cuales se modelan a través de la teoría de Winkler con resortes longitudinales independientes (St John y Zahrah (1987); Wang y Munfakh (2001); Hashash et al. (2001); Anastasopoulos et al. (2007); Yu et al. (2018)). Una mejora en los modelos fue implementar modelos de viga tipo Timoshenko (TI), permitiendo considerar y obtener deformaciones de corte constantes en la sección transversal a través de modelos continuos.

La técnica de elementos finitos, si bien es adecuada para la resolución acoplada de estos problemas de interacción suelo-estructura, lleva consigo un costo computacional elevado si se pretende modelar mediante elementos sólidos el suelo y las estructuras lineales, dado que en general resultan modelos tridimensionales (3D) con un gran número de Grados de Libertad (GDL), ya que el tamaño de malla se ve influenciado por el tamaño de los elementos estructurales a modelar mediante elementos finitos. El uso de la técnica de elementos de contorno (Pinto y Prato (2006)) reduce el número de grados de libertad necesarios para modelar la interacción. Sin embargo, esta técnica posee ciertas limitaciones para problemas no lineales. Para resolver las limitaciones de los modelos de elementos finitos, originalmente Sadek y Shahrour (2004) plantearon Elementos de Viga Embebidos (EVE) en sólidos, donde los elementos de viga interactúan directamente con elementos de sólido en un contexto 3D a través de restricciones a nivel del problema discreto, lo que genera una inconsistencia mecánica en la formulación que resulta en soluciones numéricas que no convergen a las soluciones de referencia para tamaños de malla decrecientes Turello y Pinto (2011). Para solucionar la inconsistencia mecánica de los EVEs originales Turello et al. (2016a) desarrollaron un elemento de viga embebido en sólidos dotados de una superficie de interacción finita sobre la cual se verifican restricciones cinemáticas que establecen la compatibilidad entre el campo de desplazamientos de sólidos y de vigas.

A su vez, estos autores han desarrollado una interfaz no-lineal para dotar a estos EVEs de la capacidad de modelar los desplazamientos no-lineales debido a las deformaciones plásticas que se desarrollan en el suelo en el entorno del pilote (Turello et al. (2016b); Turello et al. (2019)). En este trabajo se utilizan los elementos de vigas embebidos en sólidos para analizar la respuesta sísmica de un túnel horizontal donde se evidencian las bondades de este tipo de formulación, la cual es capaz de capturar mecanismos de interacción suelo-estructura a un costo computacional menor.

2. ELEMENTOS DE VIGAS EMBEBIDOS EN ELEMENTOS DE SÓLIDOS

2.1. Generalidades

A través de este trabajo las letras minúsculas y mayúsculas se usan para identificar objetos a nivel elemental o global (ensamblado), respectivamente. Las letras en negrita se utilizan para definir vectores y matrices. El tipo de caligrafía itálica se asocia a cinemática de vigas, mientras que el tipo normal a cinemática convencional de sólidos. Finalmente, el símbolo de sombrero sobre las variables implica que se trata de variables nodales y el símbolo de barra sobre las variables implica que se trata de variaciones cinemáticamente admisibles de las variables.

2.2. Resumen de la formulación EVE

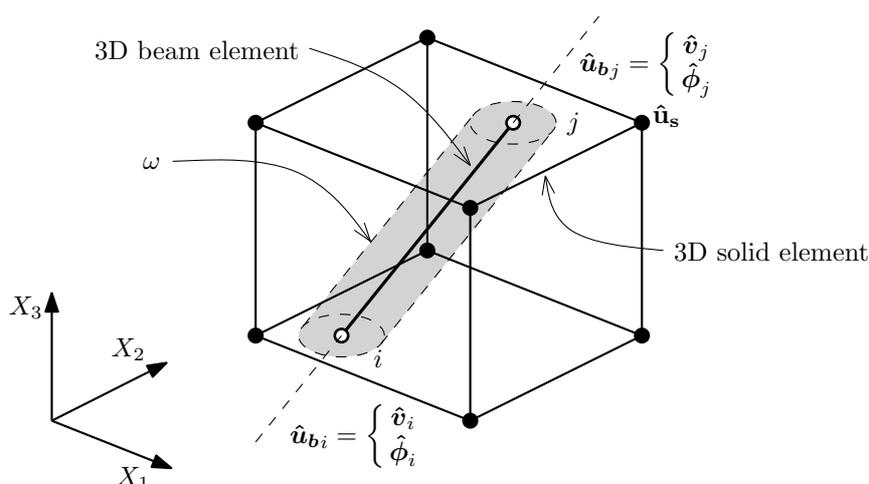


Figura 1: Esquema del elemento de viga embebido en sólidos.

La formulación EVE propuesta por Turello et al. (2016a) vincula dos tipos de elementos finitos con diferente aproximación cinemática, los elementos de sólido y de vigas, en un elemento de viga embebido que compatibiliza los desplazamientos de sólidos y de vigas sobre la superficie de interacción, ω , entre el túnel y el suelo (Figura 1). Esta superficie de interacción, se incorpora en el modelo para representar adecuadamente la mecánica del problema y evitar la falta de convergencia que exhibe el modelo EVE propuesto por Sadek y Shahrouf (2004) cuando la malla es refinada (Turello y Pinto (2011); Turello et al. (2018)). Para el caso elástico, los Grados de Libertad (GDL) de vigas se condensan totalmente en los GDL de sólido para estos elementos embebidos, quedando de esta forma expresado solo en función de estos últimos. En la formulación mecánica de estos EVEs se puede introducir un término adicional que modela constitutivamente el salto de desplazamiento en la superficie de interacción, lo que permite modelar los saltos de desplazamientos o desplazamientos relativos entre los elementos estructu-

rales y el suelo en las inmediaciones del elemento estructural debidos a deformaciones plásticas en el suelo. Siguiendo la línea del artículo presentado en Turello et al. (2016b), el sistema de ecuaciones no-lineales que se deben resolver de forma iterativa resulta:

$$\begin{cases} -\mathbf{K}_s \hat{\mathbf{U}}_s + \hat{\mathbf{P}}_{es} + \mathbf{A} \mathbf{B}^{-1} \hat{\mathbf{T}}_d = 0 \\ -\mathbf{K}_b \hat{\mathbf{U}}_b + \hat{\mathbf{P}}_{eb} - \hat{\mathbf{T}}_d = 0 \end{cases} \quad (1)$$

donde las variables con sombrero indican valores nodales, y las letras mayúsculas indican que son variables a nivel global del problema, $\hat{\mathbf{P}}_{es}$ son las fuerzas externas en sólidos, $\hat{\mathbf{P}}_{eb}$ son las cargas externas aplicadas al problema de vigas y las matrices \mathbf{A} y \mathbf{B}^{-1} son matrices que embeben la cinemática de los elementos de vigas en los elementos de sólidos como se describe en Turello et al. (2016a). En esta ecuación se distingue el acople que producen las cargas de interacción $\hat{\mathbf{T}}_d$ que se desarrollan en la interfaz y las que se expresan en función del salto de desplazamiento.

El sistema de ecuaciones de la Ec. 1 está sujeto a la restricción cinemática entre los desplazamientos de vigas y de sólidos en la superficie de interacción y que a nivel global se escribe como:

$$[[\hat{\mathbf{U}}]] = \hat{\mathbf{U}}_b - \mathbf{B}^{-T} \mathbf{A}^T \hat{\mathbf{U}}_s \quad (2)$$

Esta es la descripción general del modelo EVE con interfaz propuesto por los autores. Sin embargo, en este trabajo se adopta adherencia perfecta entre el suelo y el túnel, por lo que se adopta para la interfaz una rigidez alta con respecto a la del suelo de forma que el salto de desplazamientos no contribuya en la respuesta mecánica.

2.3. Implementación numérica

En este trabajo la implementación numérica se realiza para un elemento finito hexaédrico de sólido de 8 nodos (H8), con interpolación bi-lineal e interpolación reducida de los términos de corte.

Se implementa un elemento finito de viga de 2 nodos (V2). Este elemento de viga incorpora las deformaciones de corte tipo Timoshenko (TI) con una interpolación lineal, tanto de los desplazamientos transversales como de los giros asociados al comportamiento flexional. Asimismo, los desplazamientos axiales y torsionales se interpolan de forma lineal. Los términos de la matriz de rigidez asociados al corte se integran numéricamente con integración reducida (Oñate, 2013).

Los elementos embebidos que surgen de combinar los elementos finitos mencionados se denominan H8B2-TI.

3. EJEMPLOS Y DISCUSIÓN

3.1. Problema analizado

En esta sección se presenta el problema estudiado, el cual consiste en un túnel horizontal de sección anular dispuesto en un semi-espacio homogéneo. En este caso, el dominio de análisis se considera de 50 m de ancho en las dimensiones de la sección transversal según los ejes X_2 y X_3 (ver Figura 2).

Los parámetros elásticos del suelo considerados para el análisis son: módulo de Young $E_s = 500$ MPa, coeficiente de Poisson $\nu_s = 0,20$. Por otro lado, los parámetros elásticos del túnel son: módulo de Young $E_t = 21000$ MPa, $\nu_t = 0,17$, $D_e = 15,00$ m, $D_i = 14,00$ m, $e = 0,50$ m, $L_t = 450,00$ m, $k_{cor} = 0,5$, $k_{tor} = 1,00$.

Sobre los bordes en la dirección longitudinal del túnel se imponen un campo de desplazamientos transversales en concordancia con una deformación de campo libre asociada a una onda de corte simple. Este campo de desplazamientos se puede ver en la Figura 3 y el mismo se escribe como:

$$u_{ff} = u_0 \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda_s} x_1 \right) \quad (3)$$

donde, u_{ff} , es el desplazamiento de campo libre, u_0 , es la amplitud de la onda y λ_s es la velocidad de onda de corte. Para este problema se adoptan los siguientes parámetros para caracterizar la onda de corte: $u_0 = 1,00$ m y $\lambda_s = 750,00$ m

3.2. Solución de referencia

Con el fin de contar con una solución de referencia para el problema, se generó un modelo en Abaqus del problema completo 3D, discretizando ambos dominios (suelo y túnel) mediante elementos de sólidos tipo brick C3D8R (8 nodos bi-lineales, integración reducida, control de hourglass).

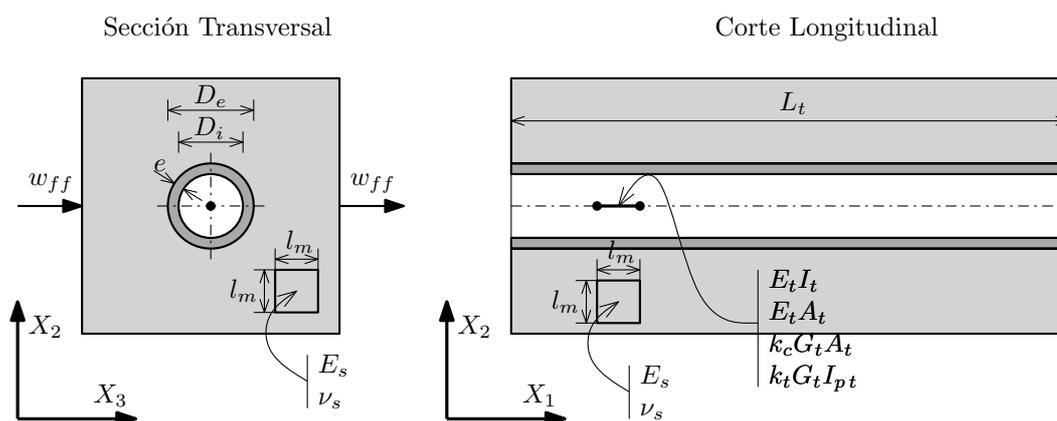


Figura 2: Sección transversal y corte longitudinal del problema analizado.

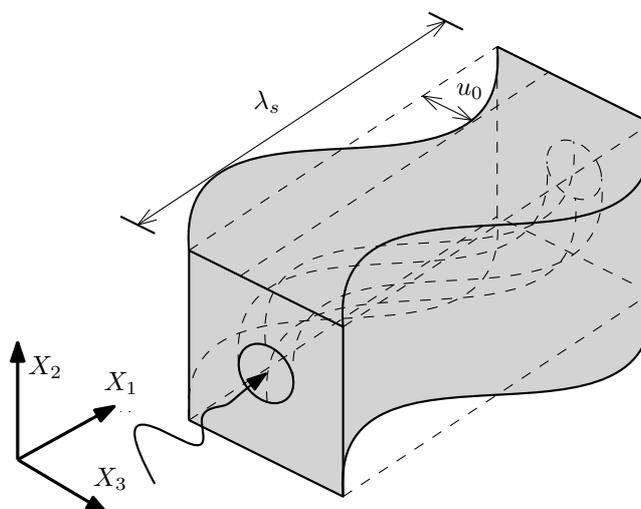


Figura 3: Onda de corte impuesta sobre los bordes longitudinales del problema como campo de desplazamientos de campo libre.

En la Figura 4-(a) se muestra una vista axonométrica de la malla utilizada en este modelo completo 3D, junto con los diferentes materiales asociados al suelo y al túnel. Además en la Figura 4-(b) se muestra la malla utilizada en el modelo EVE propuesto.

La malla del modelo completo 3D cuenta con 43771 nodos de sólidos para ambos dominios (suelo y túnel), mientras que la malla del modelo EVE propuesto cuenta con solo 17836 nodos de sólidos y 91 nodos de vigas (lo que representa un 40 % del número de nodos utilizados en el modelo completo 3D).

El tamaño de la discretización para el modelo completo 3D se adoptó con la idea de capturar con buena precisión los esfuerzos internos en el dominio del túnel (i.e., esfuerzos internos de viga expresados en función de las tensiones en este dominio). Por ello la discretización en el plano $X_2 - X_3$ muestra un refinamiento en la zona del túnel, con una variación gradual de los tamaños de malla hacia el exterior del dominio de sólidos (Ver Figura 4-(a)).

En el modelo EVE se eligió la misma discretización que en el modelo completo 3D para la dirección X_1 (tanto para los elementos de sólidos como los de vigas) y una discretización uniforme en el plano $X_2 - X_3$ más gruesa que la utilizada en el modelo completo 3D.

Comparando estas figuras se puede apreciar la ventaja significativa que proporciona el modelo EVE al momento de generar las mallas de sólidos y de vigas, ya que la malla de sólido no se debe estructurar alrededor de los elementos de vigas. Este factor es muy apreciado en contextos geotécnicos en donde debido a la complejidad de las secuencias estratigráficas en los suelos, el solo echo de generar la malla del dominio de sólidos puede representar un escollo en el proceso de modelado. Si además en este contexto se agregan elementos estructurales como túneles o pilotes, el correcto mallado de este tipo de problemas se torna muy complejo. Por ello, más allá del ahorro computacional en GDL o en tiempo de cálculo debido a utilizar mallas más gruesas, la principal ventaja del modelo propuesto es que facilita el mallado de los problemas.

Para obtener los esfuerzos característicos de vigas para el modelo completo 3D de Abaqus se procede de dos formas: i) En la primera se integran las tensiones correspondientes sobre la

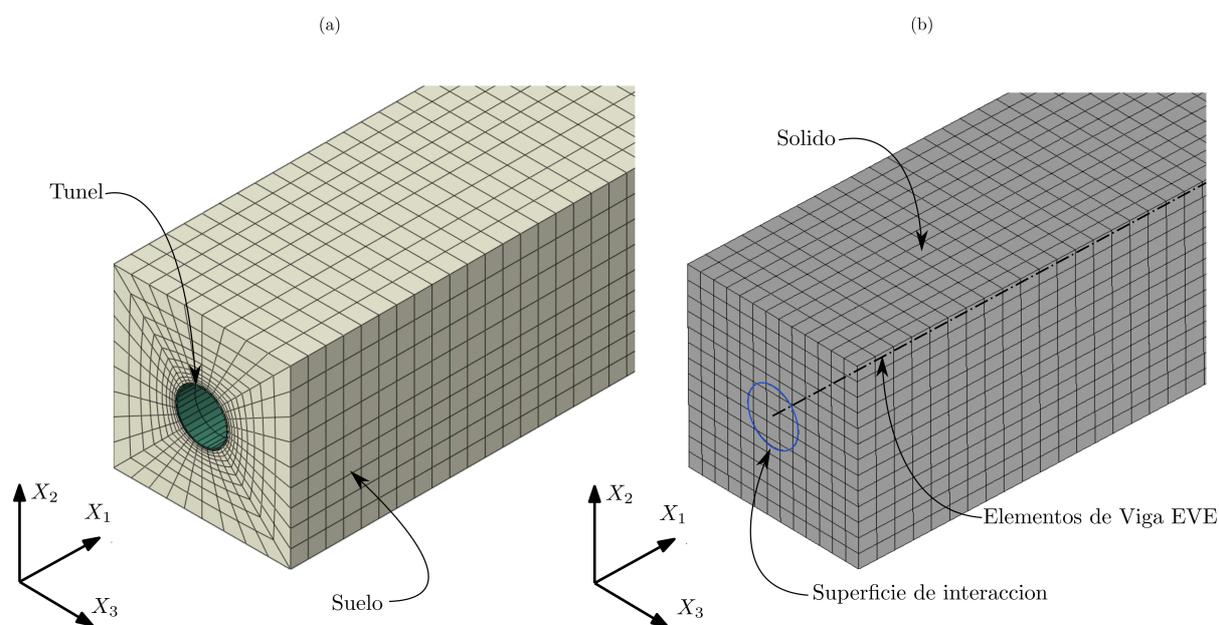


Figura 4: Vista axonométrica de la malla utilizada en los modelos numéricos para: (a) el modelo completo 3D de Abaqus con los dos dominios de análisis, el suelo y el túnel y (b) el modelo EVE propuesto con la discretización del sólido, los elementos de vigas y la superficie de interacción.

sección transversal del túnel de forma de estimar el momento flector y esfuerzo de corte en la sección y ii) En la segunda se promedian los desplazamientos sobre la sección transversal y se estiman las derivadas de estos numéricamente. Luego los esfuerzos característicos de viga se obtienen con las ecuaciones constitutivas correspondientes a una viga elástica con deformación de corte. En lo sucesivo se designan estas dos propuestas como *modelo completo 3D - T* y *modelo completo 3D - D*, para hacer referencia a los resultados estimados en función de las tensiones o de los desplazamientos del modelo 3D, respectivamente.

Además de la solución completa 3D se muestran las curvas correspondientes a lo que es la práctica habitual recomendada por la [FHWA \(2009\)](#), en la cual se adopta para la verificación de este tipo de estructuras las curvaturas y distorsiones asociadas a una onda de corte simple. Estas curvaturas y distorsiones se calculan en función del campo de desplazamientos de campo libre como:

$$\begin{aligned}\kappa_{ff} &= \frac{d^2 u_{ff}}{dx_1^2} \\ \gamma_{ff} &= \frac{du_{ff}}{dx_1}\end{aligned}\tag{4}$$

3.3. Comparación de resultados

En esta sección se comparan los resultados obtenidos con el modelo de vigas embebidas en sólidos EVE que cuenta con un modelo de vigas que tiene en cuenta las deformaciones de corte y otro modelo completo 3D del problema analizado en Abaqus.

En la Figura 5 se muestran los resultados adimensionalizados para el problema analizado. En estos gráficos se utiliza la longitud crítica, L_c , que de acuerdo con la teoría de Winkler es la longitud más allá de la cual la estructura se comporta como infinita. En este trabajo se adopta como longitud crítica a la inversa de la raíz característica o parámetro característico, el cual se escribe como la parte real de la media geométrica de las cuatro raíces complejas de la ecuación característica asociada a la ecuación diferencial ([Hsiung et al. \(2006\)](#), [Fleming et al. \(2008\)](#), [Randolph \(1981\)](#)).

En la Figura 5-(a) se muestran los desplazamientos transversales, donde se puede ver que en el interior del dominio la respuesta de ambos modelos (EVE y completo 3D) es muy similar entre sí y a su vez ambas ajustan a los desplazamientos de campo libre impuestos sobre el problema. En los extremos del túnel se evidencian fenómenos de interacción suelo-estructura y los desplazamientos de campo libre no coinciden con los desplazamientos en el túnel. En toda la longitud del túnel, la respuesta obtenida con el modelo EVE con deformaciones de corte es cualitativamente indistinguible de la respuesta obtenida en el modelo completo 3D.

En la Figura 5-(b) se muestran las curvaturas adimensionales y en la Figura 5-(c) las distorsiones de corte adimensionalizadas. De estas figuras se desprende que la respuesta del modelo EVE captura muy bien la respuesta observada en el modelo completo 3D. En ambos gráficos se evidencia que la inclusión de las deformaciones de corte en los modelos de vigas y el análisis de los efectos de interacción suelo-estructura reducen las demandas sobre las estructuras frente a la estimación propuesta por la [FHWA \(2009\)](#), la cual sobre-estima la demanda por un factor aproximado de 2 en la zona alejada de los bordes. En los bordes los efectos de interacción son muy notorios y la respuesta de campo libre no predice los esfuerzos verificados por las estructuras en estas zonas.

En la Figura 6-(a), 6-(b) y 6-(c) se muestra una comparación entre los modelos EVE propuesto y el modelo completo 3D de las diferentes variables intervinientes en la definición de las

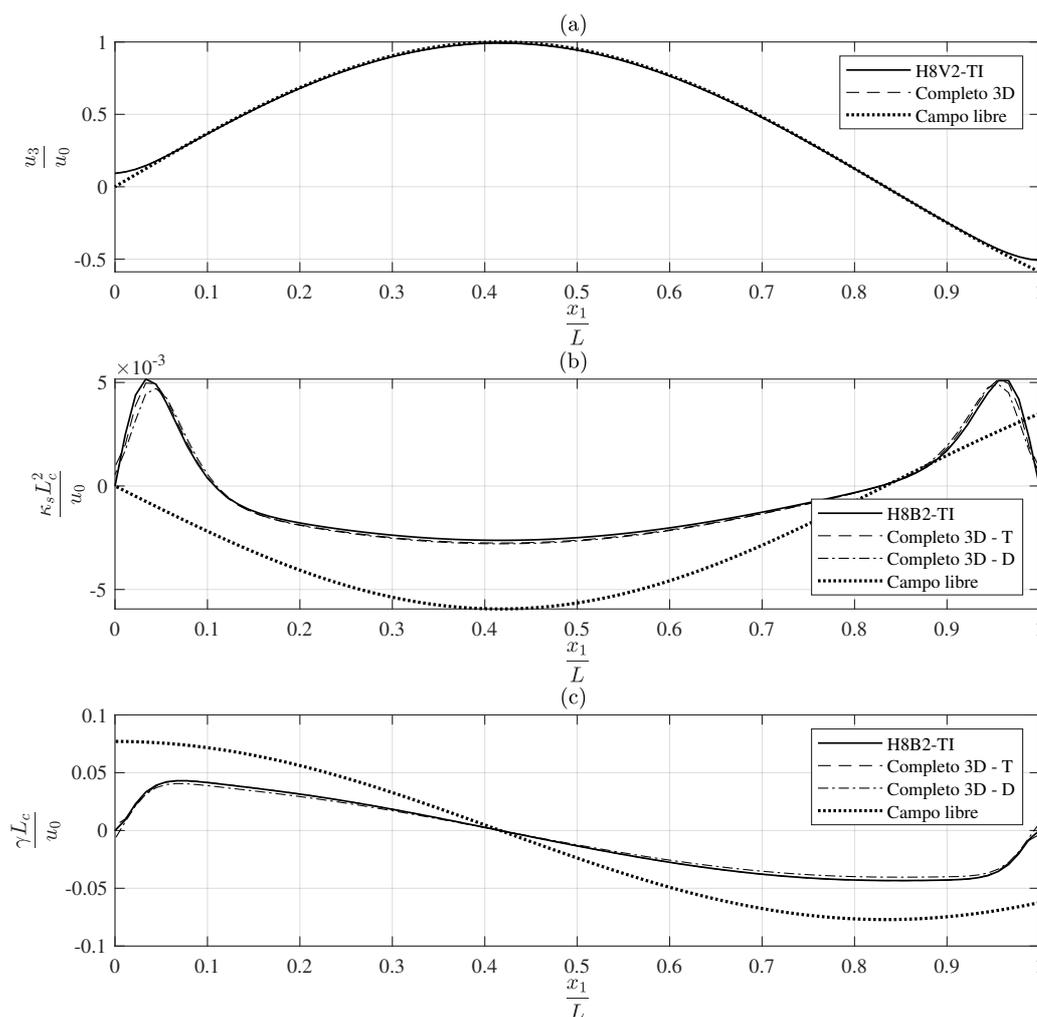


Figura 5: Resultados adimensionalizados para el problema analizado en función de la coordenada longitudinal del túnel para, (a) desplazamientos, (b) curvaturas y (c) distorsiones de corte.

distorsiones de corte. Estas variables son el giro de la normal, el giro total de la sección transversal y la distorsión de corte, respectivamente. Se puede ver que el modelo EVE propuesto ajusta muy bien al modelo completo 3D.

4. CONCLUSIONES

En este trabajo se presentó un breve resumen de la formulación de elementos de vigas embebidos en sólidos, publicado anteriormente por los autores. Se analizó un túnel enterrado dispuesto en un medio homogéneo y sometido a un campo de desplazamientos transversal estático consistente con una onda de corte simple. Se puede ver que la formulación EVE propuesta con elementos de viga que cuentan con deformaciones de corte tipo Timoshenko tiene la capacidad de modelar correctamente este tipo de problemática, y que los resultados obtenidos con los modelos EVE propuestos se ajustan muy satisfactoriamente a los resultados obtenidos con modelos más complejos, como lo es la solución de referencia adoptada en este trabajo (i.e., el modelo completo 3D desarrollando en Abaqus). Incluso en el caso presentado, en el que se adoptó una malla para el problema EVE más gruesa que en el modelo completo 3D (del orden del 40 % de los nodos utilizados en el problema completo 3D) los resultados obtenidos son muy

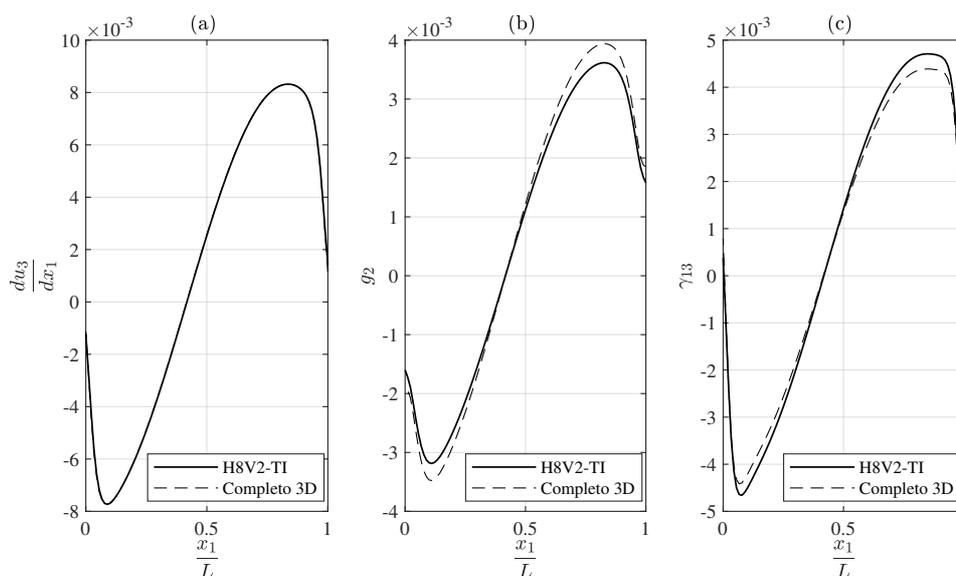


Figura 6: Comparación de las variables intervinientes en la definición de las distorsiones de corte entre el modelo EVE propuesto y el modelo completo 3D de Abaqus. (a) giro de la normal, (b) giro total y (c) distorsión de corte.

buenos cuando se los compara con esta solución de referencia. Cabe destacar que la principal ventaja que presenta la formulación EVE propuesta por los autores es la de facilitar el mallado de problemas geotécnicos, donde la malla de sólido no debe estructurarse de forma especial alrededor de las estructuras lineales (i.e., túneles o pilotes). En este sentido el usuario solo debe mallar el dominio de sólidos y luego debe introducir los elementos lineales en las posiciones deseadas, siendo la formulación la encargada de compatibilizar los desplazamientos y esfuerzos de interacción entre ambas mallas. A su vez, esta formulación permite un ahorro computacional debido a que es posible modelar los problemas sin la necesidad de refinar las mallas en las zonas donde se introducen los elementos lineales, lo que se traduce en menos GDL para modelar los problemas. Este punto puede además significar un ahorro en tiempos de computación, pero este punto es difícil de ser cuantificado en el contexto de este trabajo.

REFERENCIAS

- Anastasopoulos I., Gerolymos N., Drosos V., Kourkoulis R., Georgarakos T., y Gazetas G. Non-linear response of deep immersed tunnel to strong seismic shaking. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 133(9):1067–1090, 2007.
- Bobet A. Comportamiento sísmico de túneles. *Revista Internacional de Desastres Naturales, Accidentes e Infraestructura Civil*, 12(1), 2012.
- Dowding C.H. y Rozan A. Damage to rock tunnels from earthquake shaking. *ASCE J Geotech Eng Div*, 104(2):175–191, 1978.
- FHWA. Technical manual for design and construction of road tunnels—civil elements. 2009.
- Fleming K., Weltman A., Randolph M., y Elson K. *Piling engineering*. CRC press, 2008.
- Hashash Y.M., Hook J.J., Schmidt B., John I., y Yao C. Seismic design and analysis of underground structures. *Tunnelling and underground space technology*, 16(4):247–293, 2001.
- Hashash Y.M., Tseng W.S., y Krimotat A. Seismic soil-structure interaction analysis for immersed tube tunnels retrofit. *Geotechnical Special Publication*, (75 II):1380–1391, 1998.
- Hsiung Y.M., Chen S.S., y Chou Y.C. Analytical solution for piles supporting combined late-

- ral loads. *Journal of geotechnical and geoenvironmental engineering*, 132(10):1315–1324, 2006.
- Jaramillo C.A. Impact of seismic design on tunnels in rock–case histories. *Underground Space*, 2(2):106–114, 2017.
- Oñate E. *Structural analysis with the finite element method. Linear statics: volume 2: beams, plates and shells*. Springer Science & Business Media, 2013.
- Owen G.N., Scholl R.E., et al. Earthquake engineering of large underground structures. 1981.
- Pinto F. y Prato C. Three dimensional indirect boundary element method formulation for dynamic analysis of frames buried in semi-infinite elastic media. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, 132(3):967–978, 2006.
- Randolph M. The response of flexible piles to lateral loading. *Geotechnique*, 31(2):247–259, 1981.
- Sadek M. y Shahrour I. A three dimensional embedded beam element for reinforced geomaterials. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 28:931–946, 2004.
- Sharma S. y Judd W.R. Underground opening damage from earthquakes. *Engineering geology*, 30(3-4):263–276, 1991.
- St John C. y Zahrah T. Aseismic design of underground structures. *Tunnelling and underground space technology*, 2(2):165–197, 1987.
- Turello D. y Pinto F. Efecto del tamaño de malla en la modelación numérica del comportamiento lateral de pilotes mediante elementos de barra embebidos en sólidos. *Mecánica Computacional*, Volume XXX(Number 13. Solid Mechanics (B)):141–152, 2011.
- Turello D., Pinto F., y P.J. S. Embedded beam element with interaction surface for lateral loading of piles. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 40(4):568–582, 2016a. ISSN 1096-9853. doi:10.1002/nag.2416. Nag.2416.
- Turello D., Pinto F., y P.J. S. Three dimensional elasto-plastic interface for embedded beam elements with interaction surface for the analysis of lateral loading of piles. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 41(6):859–879, 2016b. ISSN 1096-9853. doi:10.1002/nag.2633. Nag.2633.
- Turello D., Pinto F., y P.J. S. Analysis of lateral loading of pile groups using embedded beam elements with interaction surface. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 43(1):272–292, 2019.
- Turello D., Sánchez P., Blanco P., y Pinto F. A variational approach to embed 1d beam models into 3d solid continua. *Computers & Structures*, 206:145–168, 2018.
- Wang J.N. y Munfakh G. *Seismic design of tunnels*, volumen 57. WIT Press, 2001.
- Yu H., Yuan Y., y Bobet A. Seismic analysis of long tunnels: a review of simplified and unified methods. *Underground Space*, 2(2):73–87, 2017.
- Yu H., Zhang Z., Chen J., Bobet A., Zhao M., y Yuan Y. Analytical solution for longitudinal seismic response of tunnel liners with sharp stiffness transition. *Tunnelling and Underground Space Technology*, 77:103–114, 2018.