

## EVALUACIÓN NUMÉRICA DE SOLUCIONES PERIÓDICAS EN SISTEMAS NO AUTÓNOMOS

### NUMERICAL EVALUATION OF PERIODIC SOLUTIONS IN NON-AUTONOMOUS SYSTEMS

Sergio A. Elaskar<sup>a,b</sup> y Luis F. Gutiérrez Marcantoni<sup>b,c</sup>

<sup>a</sup>*Instituto de Estudios Avanzados en Ingeniería y Tecnología (IDIT), CONICET y Universidad Nacional de Córdoba, Argentina, selaskar@unc.edu.ar*

<sup>b</sup>*Dpto. Aeronáutica, Facultad de Ciencias Exactas Físicas y Naturales, Universidad Nacional de Córdoba, Argentina, lfgmarcantoni@gmail.com*

<sup>c</sup>*Facultad de Ingeniería, Universidad Católica de Córdoba, Córdoba, Argentina*

**Palabras clave:** órbitas periódicas, matriz de monodromía, “shooting”.

**Resumen.** Los sistemas dinámicos aparecen frecuentemente en mecánica de fluidos, un ejemplo clásico es el sistema de Lorenz para el estudio de la convección en la atmósfera. Las soluciones de sistemas dinámicos pueden ser estacionarias (independientes del tiempo) o que varían en el tiempo (soluciones dinámicas). Entre estas últimas se encuentran las soluciones periódicas. En este trabajo se implementa y estudia un método “shooting” para capturar numéricamente soluciones periódicas en sistemas dinámicos no autónomos. Se busca describir la capacidad del mencionado esquema numérico para calcular soluciones periódicas. Para tal fin se comienza analizando un sistema dinámico conocido y analizado, como es el de Duffing, para finalmente aplicarlo en un sistema complejo surgido de la interacción láser-plasma.

**Keywords:** periodic orbits, monodromy matrix, “shooting”.

**Abstract.** Dynamical systems are used to represent several phenomena in fluid mechanics; a classic example is the Lorenz system for the study of convection in the atmosphere. The solutions of the dynamical system can be stationary or vary over time. Among the latter are the periodic solutions. In this work, a shooting method is implemented to capture periodic solutions in non-autonomous dynamical systems. The objective is to describe the capacity of the mentioned numerical scheme to calculate periodic solutions. For this purpose, we start by analyzing a known and studied dynamical system, such as Duffing, to finally apply the numerical scheme in a complex system arising from the laser-plasma interaction.

## 1. INTRODUCCIÓN

Podemos definir a un sistema dinámico como aquel cuyo estado cambia o se desarrolla con el tiempo  $t$ . Además dicha evolución está regida por una serie de leyes o reglas que especifican el estado del sistema tanto sea para una evolución discreta o continua en el tiempo (Nayfeh y Balachandran, 1995; Elaskar et al., 2011). Los sistemas dinámicos son ampliamente implementados en mecánica de fluidos, uno de los más conocidos es el sistema de Lorenz (Sparrow, 1982), pero también son utilizados en física de plasmas (Sanmartín et al., 2004; Sánchez-Arriaga et al., 2007). Los sistemas que evolucionan con tiempo discreto se denominan mapas y usualmente están compuestos por ecuaciones algebraicas (Elaskar y del Río, 2017; Elaskar et al., 2016). Los sistemas en los cuales su estado cambia en forma continua con el tiempo están descriptos por sistemas de ecuaciones diferenciales. Dentro de estos últimos están los sistemas no autónomos, en los cuales el tiempo aparece explícitamente como una variable independiente:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t, \mathbf{c}); \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (1)$$

siendo  $\mathbf{x}$  un vector de  $n$  componentes,  $\mathbf{x} \in R^n$ ,  $t$  un escalar,  $t \in R^n$  y  $\mathbf{c}$  un vector de  $m$  componentes que posee los parámetros de control del sistema  $\mathbf{x} \in R^m$ . El vector  $\mathbf{f} : R^{n+1} \rightarrow R^n$  se denomina campo vectorial y establece las reglas de variación del sistema (ecuaciones diferenciales). La condición inicial para un tiempo  $t_0$  está dada por  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ .

Siguiendo (Parker y Chua, 1989), una solución del sistema (1) verificando la condición inicial la llamaremos,  $\phi_t(\mathbf{x}_0, t_0)$ . Entonces el conjunto de puntos  $\{\phi_t(\mathbf{x}_0, t_0) : -\infty < t < \infty\}$  es la trayectoria que pasa por  $(\mathbf{x}_0, t_0)$ .

En este artículo, solamente consideramos sistemas periódicos en el tiempo, es decir aquellos en los cuales el campo vectorial verifica:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t, \mathbf{c}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t + T, \mathbf{c}) \quad (2)$$

siendo  $T > 0$  el mínimo período del campo vectorial  $\mathbf{f}$  (Elaskar y del Río, 2017; Elaskar et al., 2018). Estos sistemas pueden tener como soluciones trayectorias periódicas con periodo  $T$ , es decir soluciones que verifiquen para todo  $t$ :

$$\phi_t(\mathbf{x}, t_0) = \phi_{t+T}(\mathbf{x}, t_0) \quad (3)$$

En general no es posible obtener analíticamente las soluciones periódicas en un sistema dinámico. Para sistemas autónomos, el teorema de Poincaré-Bendixson establece condiciones para la existencia de soluciones periódicas en sistemas bidimensionales (Nayfeh y Balachandran, 1995). Sin embargo, generalmente, para la capturar de las soluciones periódicas es necesario recurrir a métodos numéricos (Parker y Chua, 1989). Además, hay que determinar la estabilidad de las mismas, para ello hay que obtener la matriz de monodromía y sus valores propios o multiplicadores de Floquet (Guckenheimer y Holmes, 1983; Elaskar y del Río, 2017).

Unos de los códigos computacionales de amplia difusión para capturar soluciones de sistemas dinámicos y su estabilidad es el XPP-Aut (Erementrout, 2002) cuya página web es <http://www.math.pitt.edu/~bard/xpp/xpp.html>. Este software implementa como parte del mismo al código AUTO-07P (Doedel y Oldeman, 2012).

En este trabajo implementamos, mediante un código propio, un método “shooting” para encontrar soluciones periódicas como las indicadas en Ec. (3) en sistemas dinámicos no autónomos como los dados en Ec. (1). Además, con este método podremos calcular la matriz de monodromía y los multiplicadores de Floquet, es decir la estabilidad de la solución. El objetivo es estudiar la capacidad del esquema numérico para capturar soluciones periódicas y su estabilidad en sistemas de diferentes dimensiones y complejidad.

## 2. MATRIZ DE MONODROMIA

La estabilidad de las soluciones periódicas está dada por los valores propios de la matriz de monodromía. Esta matriz puede ser obtenida como (Seydel, 1988):

$$\mathbf{M}(t) = \frac{d\phi_T(\mathbf{z}, 0)}{d\mathbf{z}} \quad (4)$$

donde  $\mathbf{z}$  es la condición inicial de la trayectoria. La matriz  $\mathbf{M}(t)$  existe y es no singular (Parker y Chua, 1989). Una formulación alternativa de la matriz de monodromía es (Nayfeh y Balachandran, 1995; Seydel, 1988):

$$\frac{d\mathbf{M}(t)}{dt} = \frac{d\mathbf{f}(\mathbf{x}, T, \mathbf{c})}{d\mathbf{x}} \mathbf{M}(t), \quad \mathbf{M}(0) = \mathbf{I} \quad (5)$$

Es decir que la matriz de monodromía también puede obtenerse como solución del sistema (5) cuando la condición inicial es la matriz identidad  $\mathbf{I}$ . Destacamos que Ec. (5) se denomina ecuación variacional (Parker y Chua, 1989). Los valores propios de la matriz de monodromía, o multiplicadores de Floquet, determinan la estabilidad de la solución periódica. Si todos los valores propios están dentro del círculo unitario en el plano complejo la solución periódica es asintóticamente estable y dicha solución se denomina atractor periódico estable. Es suficiente que solamente uno de los multiplicadores de Floquet esté fuera del círculo unitario la solución es inestable, y si todos los valores propios tienen modulo mayor que 1 (están fuera del círculo unitario) la solución se denomina repelente.

## 3. METODO “SHOOTING” PARA SISTEMAS NO AUTÓNOMOS

Una solución periódica, como período  $T$  debe ser solución del siguiente sistema (por simplicidad omitimos describir la dependencia de  $\mathbf{f}$  con  $\mathbf{c}$ )

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t); \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{z} \quad (6)$$

y además debe verificar que:

$$\mathbf{x}(\mathbf{z}, t_0 + T) = \phi_{t_0+T}(\mathbf{z}, t_0) = \mathbf{z} \quad (7)$$

Esta última ecuación expresa la periodicidad de la solución. Por lo tanto la trayectoria que para un tiempo  $t_0$  está en  $\mathbf{z}$ , regresa al punto  $\mathbf{z}$  en un tiempo  $t_0 + T$ .

Cuando se desconoce la solución periódica, para comenzar a buscar la misma se inicia el proceso desde una estimación inicial representada por el punto  $(\mathbf{z}_0, 0)$  que, generalmente, difiere de la solución dada por  $(\mathbf{z}, T)$ . Por lo tanto la estimación inicial requiere una corrección que se lleva a cabo mediante el esquema de Newton-Raphson (Parker y Chua, 1989).

La corrección a  $\mathbf{z}_0$  está dada por:

$$\delta\mathbf{z} = \mathbf{z} - \mathbf{z}_0 \quad (8)$$

de forma tal que la Ec. (7) se verifique:

$$\phi_T(\mathbf{z}_0 + \delta\mathbf{z}, 0) = \mathbf{x}(\mathbf{z}_0 + \delta\mathbf{z}, T) \simeq \mathbf{z}_0 + \delta\mathbf{z} \quad (9)$$

Si se expande la última ecuación en serie de Taylor hasta solamente el primer orden en  $\mathbf{z}$ , resulta:

$$\left[ \frac{d\mathbf{x}(\mathbf{z}_0, T)}{d\mathbf{z}} - \mathbf{I} \right] \delta\mathbf{z} = \mathbf{z}_0 - \mathbf{x}(\mathbf{z}_0, T) \quad (10)$$

de donde se puede evaluar  $\delta \mathbf{z}$ .

Sin embargo, previamente hay que determinar la matriz  $\frac{d\mathbf{x}(\mathbf{z}_0, T)}{d\mathbf{z}} = \frac{d\phi_T(\mathbf{z}_0, 0)}{d\mathbf{z}}$ . Para ello diferenciamos ambos lados de la Ec. (6) con respecto a  $\mathbf{z}$  y asumimos que  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$  es  $C^r$  (funciones con derivada continua hasta el orden  $r$ ) con  $r \geq 1$ :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{z}_0, T)}{\partial \mathbf{z}} \right) = \left( \frac{\partial \mathbf{f}(\phi_T(\mathbf{z}_0, 0))}{\partial \mathbf{x}} \right) \left( \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{z}_0, T)}{\partial \mathbf{z}} \right) \quad (11)$$

Para solucionar esta ecuación, es necesario determinar la condición inicial que resulta de considerar  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{z}$ , se tiene entonces:

$$\left( \frac{d\mathbf{x}(\mathbf{z}_0, 0)}{d\mathbf{z}_0} \right) = \mathbf{I} \quad (12)$$

Destacamos que las Ecs. (11) y (12) determinan la matriz de monodromía (ver Ec. (5)). Por lo tanto, la Ec. (10) resulta:

$$[\mathbf{M} - \mathbf{I}] \delta \mathbf{z} = \mathbf{z}_0 - \mathbf{x} \quad (13)$$

Otra forma de plantear el esquema “shooting” empleado en este trabajo es usando mapas de Poincaré. Si llamaremos  $P_N$  al mapa de Poincaré asociado con un sistema no autónomo de período mínimo  $T$ :

$$P_N(\mathbf{x}) = \phi_{t_0+T}(\mathbf{x}, t_0) \quad (14)$$

Una solución periódica de un sistema no autónomo de período  $T$  corresponde a un punto fijo  $\mathbf{x}^*$  del mapa de Poincaré. Por lo tanto, encontrar el punto fijo del mapa de Poincaré equivale a determinar la solución periódica de periodo  $T$  en el sistema.

Un punto fijo del mapa de Poincaré debe verificar:

$$P_N(\mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^* \quad (15)$$

Para determinar el punto fijo del mapa  $P_N$ , se propone una primera estimación  $\mathbf{z}_0$ , la cual normalmente no coincide con la solución buscada y se tiene entonces que:

$$E(\mathbf{z}_0) = P_N(\mathbf{z}_0) - \mathbf{z}_0 \neq 0 \quad (16)$$

Para encontrar el punto fijo del mapa de Poincaré se implementa el método de Newton-Raphson.

$$\mathbf{z}_{i+1} = \mathbf{z}_i - \left( \frac{dE(\mathbf{z}_i)}{d\mathbf{z}} \right)^{-1} E(\mathbf{z}_i) \quad (17)$$

donde el jacobiano de  $E(\mathbf{z})$  es:

$$\frac{dE(\mathbf{z})}{d\mathbf{z}} = \frac{dP_N(\mathbf{z})}{d\mathbf{z}} - \mathbf{I} \quad (18)$$

Desde Ecs. (4), (11) y (14) se tiene que:

$$\frac{dP_N(\mathbf{z})}{d\mathbf{z}} = \mathbf{M}(t) \quad (19)$$

#### 4. RESULTADOS NUMÉRICOS

Con la finalidad de verificar el comportamiento del esquema propuesto en la sección anterior se buscan soluciones periódicas en dos sistema no autónomos. Uno de ellos es el conocido sistema de Duffing (Nayfeh y Balachandran, 1995; Parker y Chua, 1989), y el segundo corresponde a un sistema representando la interacción láser-plasma (Sánchez-Arriaga et al., 2014).

#### 4.1. Sistema de Duffing

La ecuación de Duffing es una ecuación diferencial no lineal de segundo orden:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \varepsilon \frac{dx}{dt} + \alpha x + \beta x^3 - \gamma \cos(\omega t) = 0 \quad (20)$$

En este trabajo usamos  $\alpha = -1$  y  $\beta = 1$ . Por lo tanto el vector parámetros de control se reduce a:  $\mathbf{c} = [\varepsilon, \gamma, \omega]$ .

Si se introduce una nueva variable  $y = \frac{dx}{dt}$ , la Ec. (20) puede ser representada por un sistema de ecuaciones diferenciales plano:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= x - x^3 - \varepsilon y + \gamma \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (21)$$

A éste último lo denominaremos sistema de Duffing.

Buscamos en primer lugar la solución fundamental de la ecuación de Duffing para  $\varepsilon = 0,15$ ,  $\gamma = 0,3$  y  $\omega = 1$ . Para tal fin proponemos como condición inicial  $\mathbf{z}_0 = [0,65 \ 1,4]$ . Desde las ecuaciones del sistema, se destaca que el período es  $T = 2\pi$ . La Figura 1 muestra la evolución en el tiempo de las variables  $x$  e  $y$  para un tiempo igual a tres períodos  $t_f = 3T$ .

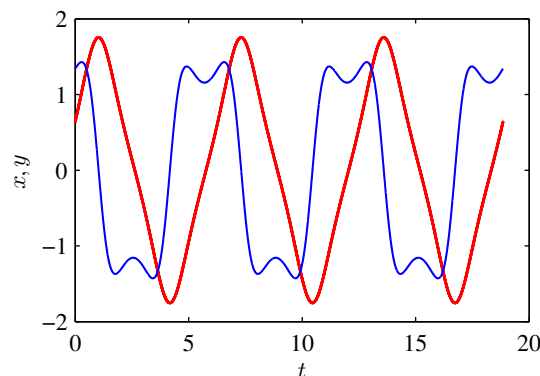


Figura 1: Sistema de Duffing con  $\varepsilon = 0,15$ ,  $\gamma = 0,3$  y  $\omega = 1$ . Variación en el tiempo de las coordenadas  $x$  e  $y$ . Rojo:  $x$ . Azul:  $y$ .

En la Figura 2 se indica la solución fundamental periódica en el plano  $(x, y)$  (solución de período 1) con  $\varepsilon = 0,15$ ,  $\gamma = 0,3$  y  $\omega = 1$

Para evaluar la convergencia se implementó el criterio de calcular las diferencias, en valor absoluto, para ambas variables luego de un período  $T$  menos el valor inicial, es decir:  $x(T) - x_0$  y  $y(T) - y_0$ , siendo  $\mathbf{z}_0 = [x_0 \ y_0] = [0,65 \ 1,4]$ . En este caso, el proceso iterativo necesitó 4 iteraciones para converger con un error menor a  $10^{-7}$ .

Además para determinar la estabilidad de la solución periódica, se evaluaron los valores propios de la matrix de monodromía (multiplicadores de Floquet), resultando una solución estable con  $\delta_1 = 0,14938027114738614 + 6060913056193814 i$  y  $\delta_2 = 0,14938027114738614 - 6060913056193814 i$ , siendo  $i = \sqrt{-1}$ .

Se destaca que la matrix jacobiana se ha calculado en forma teórica y numérica usando diferencias finitas centradas con intervalos  $\Delta h = 0,0001$ , y  $\Delta h = 0,01$ , con un error  $Er \leq$

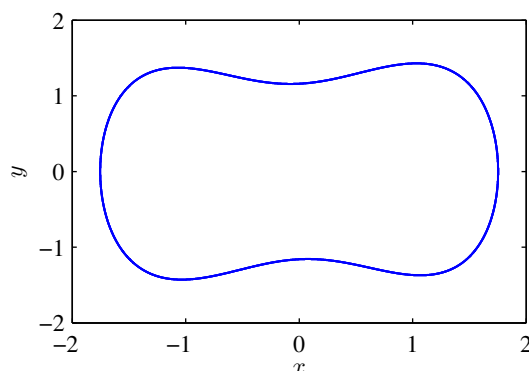


Figura 2: Trayectoria de período 1 para el sistema de Duffing con  $\varepsilon = 0,15$ ,  $\gamma = 0,3$  y  $\omega = 1$ .

$(\Delta h)^2/6$  (Zienkiewicz y Morgan, 1983). En ambos casos los procesos de convergencia fueron muy similares como lo muestra la Tabla 1. Cuando se implementó  $\Delta h = 0,01$  se introdujo algo más de error con respecto a la formulación teórica como se indica en la última columna de la Tabla 1.

Iter	Teórico	Dif. finitas $\Delta h = 0,0001$	Dif. finitas $\Delta h = 0,01$
1	$-9,5303093004496353 \cdot 10^{-2}$	$-9,5303093004496353 \cdot 10^{-2}$	$-9,5303093004496353 \cdot 10^{-2}$
2	$2,9344583483914555 \cdot 10^{-3}$	$2,9344615339028657 \cdot 10^{-3}$	$2,9662866366677587 \cdot 10^{-3}$
3	$5,9987884586387707 \cdot 10^{-6}$	$5,9990902270268265 \cdot 10^{-6}$	$9,038689985141346 \cdot 10^{-6}$
4	$1,9096391135065005 \cdot 10^{-11}$	$1,9989121469166093 \cdot 10^{-11}$	$1,2679122751713123 \cdot 10^{-8}$

Tabla 1: Error durante el proceso iterativo en la ecuación de Duffing con la matrix jacobiana evaluada en forma teórica y numérica. Condición inicial  $\mathbf{z}_0 = [x_0 \ y_0] = [0,65 \ 1,4]$ . Parámetros  $\varepsilon = 0,15$ ,  $\gamma = 0,3$  y  $\omega = 1$ .

Los multiplicadores de Floquet cuando fueron calculados usando diferencias finitas para el jacobiano resultaron muy próximos a los obtenidos con la formulación teórica:

$$\begin{aligned}
 \text{Teórica : } \delta_{1,2} &= 0,14938027114738614 \pm 0,6060913056193814 i \\
 \Delta h = 0,0001 : \delta_{1,2} &= 0,14938022312010521 \pm 0,60609131745643574 i \quad (22) \\
 \Delta h = 0,01 : \delta_{1,2} &= 0,14890006815818685 \pm 0,60620945708260621 i;
 \end{aligned}$$

El punto inicial usado para las Figuras 1 y 2,  $\mathbf{z}_0 = [0,65 \ 1,4]$ , fue seleccionado por estar próximo a la solución periódica de forma tal de asegurar la convergencia del proceso iterativo. Luego se llevaron a cabo varias simulaciones con puntos iniciales que se alejan  $\mathbf{z}_0 = [0,65 \ 1,4]$ . En la Figura 3 se muestran en azul los puntos iniciales con los que se obtuvieron convergencia y en rojo los que no. Se destaca que cuando el punto inicial no está cerca de la solución buscada, el esquema puede no generar convergencia. Además, el esquema “shooting” implementado ha mostrado sensibilidad a la condición inicial impuesta, por ejemplo para  $\mathbf{z}_0 = [3 \ -5]$  y  $\mathbf{z}_0 = [0,3 \ -1]$  no ha encontrado convergencia y para  $\mathbf{z}_0 = [0,3 \ 1]$  converge en 5 interacciones hacia otra solución periódica inestable.

## 4.2. Sistema surgido de la interacción láser-plasma

El sistema que estudiamos en esta sección describe la interacción entre una onda plana monocromática de frecuencia  $\omega$  con un plasma semi-infinito y no colisional ubicado en el semi-plano

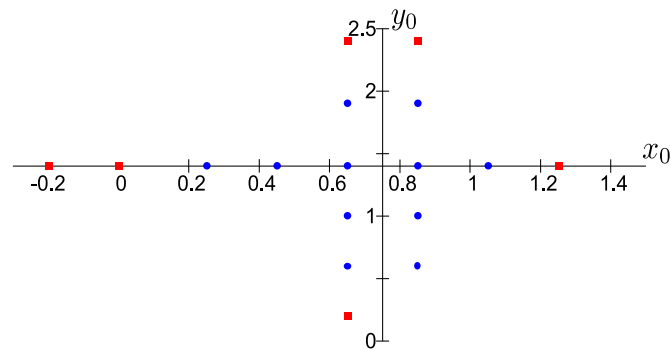


Figura 3: Convergencia para la ecuación de Duffing.

positivo del eje  $x$ . No es objetivo de este paper describir los fenómenos físicos involucrados en el sistema, si no sólo buscar soluciones periódicas del mismo. El sistema no autónomo resultante es:

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda}{dt} &= \dot{\lambda} \\ \frac{d\dot{\lambda}}{dt} &= -\frac{a_s(1-\dot{\lambda}^2)}{1+a_s^2} \frac{da_s}{dt} - \frac{(1-\dot{\lambda}^2)^{3/2}}{1+a_s^2} \left[ \sqrt{1+a_s^2} n_0 h(\lambda) \lambda + a_s b_z \sqrt{1-\dot{\lambda}^2} \right] \\ \frac{da_s}{dt} &= (1+\lambda) b_z + 2a_0 \sin(\lambda-t) \end{aligned} \quad (23)$$

siendo  $h$  la función escalon,  $h(\lambda) = 1$  si  $\lambda > 0$  y  $h(\lambda) = 0$  si  $\lambda \leq 0$ . Además

$$b_z = -F(a_s) = -\text{sign}(a_s) \sqrt{2n_0} \sqrt{(1+a_s^2)^{3/2} - (1+a_s^2)}, \quad \text{si } \lambda > 0 \quad (24)$$

Si  $\lambda < 0$ , entonces  $b_z$  se obtiene desde la relación  $G(a_s, b_z, \lambda) = 0$ , siendo

$$G(a_s, b_z, \lambda) = \frac{b_z}{\sqrt{1+a_s^2}} \cosh(\psi) + F(\sinh(\psi)) \quad (25)$$

donde  $F$  está definida en Ec. (24) y  $\psi$  es

$$\psi = -\frac{\lambda b_z}{\sqrt{1+a_s^2}} + \sinh^{-1}(a_s) \quad (26)$$

$\lambda$  es la posición del contorno electrón-plasma y  $a_s$  es el modulo del potencial vector evaluado en  $x = \lambda$ . Los parámetros de control son  $n_0$  que es la densidad del plasma y  $a_0$  que es la amplitud del láser.

Con el objetivo de verificar las potencialidad del esquema “shooting” se estudian dos soluciones periódicas, una estable y otra inestable. El período de las mismas es  $T = 2\pi$  y está dado por el término  $\sin(\lambda - t)$  en la tercera ecuación del sistema (23).

La solución estable la llamamos Atractor 1. La Figura 4 muestra los valores máximos y mínimos que adquieren el modulo del potencial vector  $a$  y la posición del contorno electrón-plasma  $\lambda$  para valores de la amplitud del láser  $a$  entre 5 y 30 y una densidad  $n_0 = 100$ . Las curvas azules representan los valores de  $a$  y las rojas los de  $\lambda$ . Usamos líneas continuas por ser una solución estable. Los módulos de los multiplicadores de Floquet son mucho menores que

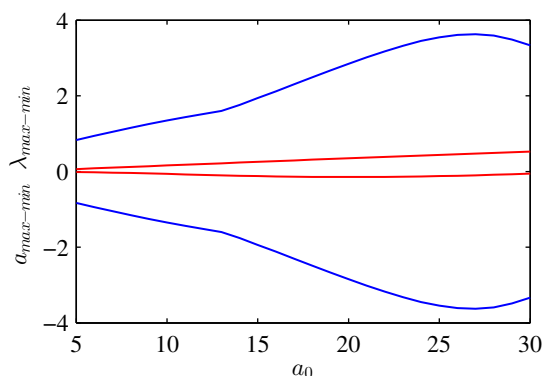


Figura 4: Atractor 1. Máximos y mínimos de  $a$  y  $\lambda$  para  $n_0 = 100$  y  $5 \leq a_0 \leq 30$ . Las líneas continuas rojas corresponden a  $\lambda$  y las azules a  $a$ .

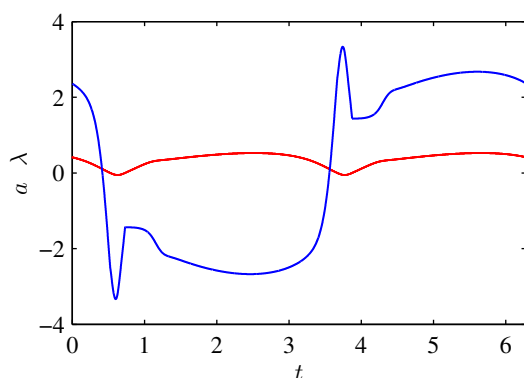


Figura 5: Atractor 1. Trayectorias de  $a$  y  $\lambda$  para  $n_0 = 100$  y  $5 \leq a_0 \leq 30$ . Las curva roja representa a  $\lambda$  y  $a$  está dada por la azul.

1 para todos los  $a_0$  estudiados. Este atractor también ha sido capturado en la Ref. (Sánchez-Arriaga et al., 2014).

Por otra parte la Figura 5 muestra las trayectorias para  $a$  y  $\lambda$  en un período de tiempo.

La solución inestable la llamamos Atractor 2. En la Figura 6 se indican los valores máximos y mínimos que adquieren  $a$  y  $\lambda$  para valores de la amplitud del láser  $a$  entre 0,1 y 1,5 y una densidad  $n_0 = 100$ . Las líneas de trazos azules y rojas representan los valores de  $a$  y de  $\lambda$  respectivamente. En este caso se usan líneas a trazos por ser una solución inestable. Las trayectorias de  $a$  y  $\lambda$  en un período de tiempo están dada en la Figura 7.

Para analizar la estabilidad de la solución evaluamos los multiplicadores de Floquet y los mismos están graficados en la Figura 8 junto con el círculo unitario que demarca el límite entre estabilidad e inestabilidad. Se destaca que los tres multiplicadores son reales y un autovalor de la matriz de monodromía está fuera del círculo unitario para todos los valores de  $a_0$  considerados, por lo tanto la solución es inestable. Esta última solución no fue capturada en (Sánchez-Arriaga et al., 2014). Esto muestra la dificultad que existe en obtener soluciones periódicas no estables en sistemas dinámicos complejos como el dados en Ecs. (23).



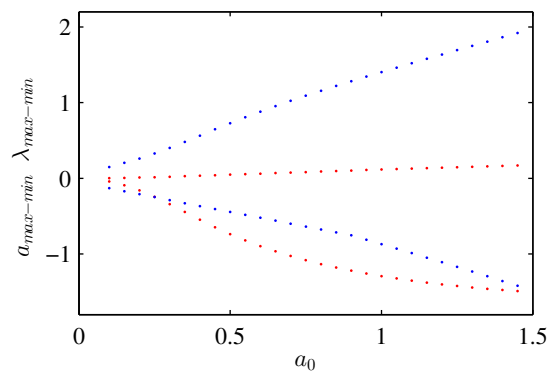


Figura 6: Atractor 2. Máximos y mínimos de  $a$  y  $\lambda$  para  $n_0 = 100$  y  $0, 1 \leq a_0 \leq 1, 5$ . Los puntos rojos corresponden a  $\lambda$  y los azules a  $a$ .

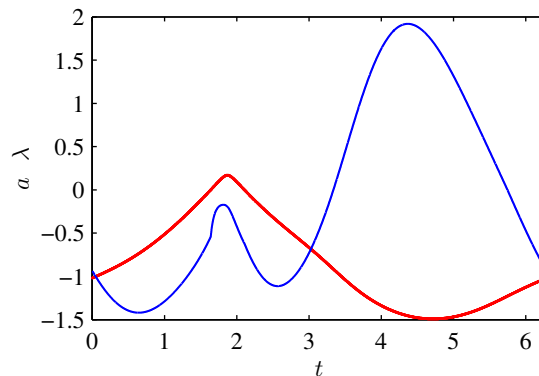


Figura 7: Atractor 2. Trayectorias de  $a$  y  $\lambda$  para  $n_0 = 100$  y  $5 \leq a_0 \leq 30$ . Las curva roja representa a  $\lambda$  y  $a$  está dada por la azul.

## 5. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha implementado un esquema “shooting” para capturar numéricamente soluciones periódicas en sistema dinámicos continuos y no autónomos. El mismo ha sido aplicado a dos sistemas dinámicos bastante distintos. El primero de los sistemas es el derivado desde la ecuación de Duffing y es ampliamente conocido y estudiado en la bibliografía. En cambio, el segundo es una sistema relativamente nuevo (Sánchez-Arriaga et al., 2014) derivado de la interacción láser-plasma. Este último es más complejo y presenta una variedad mucho más rica de soluciones.

El esquema numérico aquí estudiado ha mostrado ser una herramienta útil para capturar soluciones periódicas, pero se destaca como debilidad ciertos problemas de converger hacia la solución cuando se parte desde una estimación inicial relativamente lejana a la solución buscada.

Finalmente, se destaca que el Atractor 2 encontrado para el sistema derivado de la interacción láser-plasma, es una solución inestable y no ha sido capturada previamente en el trabajo especialmente dedicado a determinar soluciones para este sistema (Sánchez-Arriaga et al., 2014).

## AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a la SECyT de la Universidad Nacional de Córdoba y a la Universidad Politécnica de Madrid por financiar este trabajo.

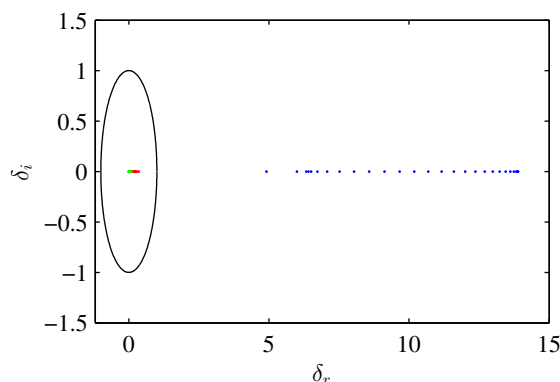


Figura 8: Atractor 2. Multiplicadores de Floquet. La evolución de cada uno de los tres multiplicadores de Floquet está dada en verde, rojo y azul.

## REFERENCIAS

- Doedel E. y Oldeman B. *AUTO-07P: Continuation and Bifurcation Software for Ordinary Differential Equations*. Concordia University, Montreal, 2012.
- Elaskar S., del Río E., y Donoso J. Reinjection probability density in type iii intermittency. *Physica A*, 390:2759–2768, 2011.
- Elaskar S., del Río E., y Gutierrez Marcantoni L. Non-uniform reinjection probability density function in type v intermittency. *Nonlinear Dynamics*, 92:683–697, 2018.
- Elaskar S., del Río E., y Zapico E. Evaluation of the statistical properties for type-ii intermittency using the perron-frobenius operator. *Nonlinear Dynamics*, 86:1107–1116, 2016.
- Elaskar S. y del Río E. *New Advances on Chaotic Intermittency and its Applications*. Springer, 2017.
- Ereumentrou B. *Simulating, Analyzing, and Animating Dynamical Systems*. Society for Industrial and Applied Mathematics, SIAM, 2002.
- Guckenheimer J. y Holmes P. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Field*. Springer-Verlag, 1983.
- Nayfeh A. y Balachandran B. *Applied Nonlinear Dynamics*. Wiley, 1995.
- Parker T. y Chua L. *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*. Springer-Verlag, 1989.
- Sanmartín J., Lopez-Rebollal O., del Río E., y Elaskar S. Hard transition to chaotic dynamics in alfvén wave-fronts. 11:2026–2035, 2004.
- Seydel R. *From Equilibrium to Chaos*. Elsevier, 1988.
- Sparrow C. *The Lorenz equations: bifurcations, chaos, and strange attractors*. Springer-Verlag, 1982.
- Sánchez-Arriaga G., Sanmartín J., y Elaskar S. Damping models in the truncated derivative nonlinear schrodinger equation. 14:082108, 2007.
- Sánchez-Arriaga G., Sanz J., Debayle A., y Lehmann G. The behavior of the electron plasma boundary in ultra dense laser-highly overdense plasma interaction. *Physics of Plasmas*, 21:123107, 2014.
- Zienkiewicz O. y Morgan K. *Finite Elements and Approximation*. John Wiley and Sons, 1983.