

## SOLUCIÓN EN SERIE DE POTENCIAS DE LA DINÁMICA VIBRATORIA DE ANILLOS GRUESOS

**Fernando. S. Buezas<sup>a</sup>, Carlos. P. Filipich<sup>b,c</sup> and Sergio. A. Vera<sup>a</sup>**

<sup>a</sup>*Departamento de Física, Universidad Nacional del Sur, Av. Alem 1253 - (8000) Bahía Blanca, Argentina, fbuezas@gmail.com*

<sup>b</sup>*Grupo de Análisis de Sistemas Mecánicos, FRBB, Universidad Tecnológica Nacional, 8000, Bahía Blanca, Argentina*

<sup>c</sup>*Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur, Av. Alem 1253 - (8000) Bahía Blanca, Argentina*

**Keywords:** Anillos, Vibración, Soluciones analíticas.

**Abstract.** Este trabajo trata sobre la solución de la dinámica vibratoria de anillos, gruesos de sección arbitraria dentro de la teoría de Resistencia de Materiales, donde se reducen sobre algún eje las propiedades elásticas e inerciales. Basados en las ecuaciones de movimiento ya conocidas se utiliza la dinámica lagrangeana para medios continuos como alternativa para llegar al mismo sistema gobernante. El modelo incluye los efectos producidos por las deformaciones de flexión, extensión y corte; así como inercia rotatoria y corrimiento del eje neutro. Para su resolución se emplean funciones analíticas, expresadas como series de potencias. Como aplicación del modelo se utilizan los anillos de secciones circulares y rectangulares. Las frecuencias y modos normales de vibración halladas por el método desarrollado se corresponden con los modelos más sencillos, cuando los términos correctivos tienden a cero (anillos delgados clásicos). La ventaja del método de resolución consiste en la facilidad de la obtención de soluciones completas para distintos tipos de problemas, planteados como ecuaciones de recurrencia, con un costo computacional sensiblemente menor comparado con otras técnicas numéricas. Se comparan los resultados de anillos gruesos con los obtenidos con la teoría de la Elasticidad lineal para estados planos de tensión. También se demuestra que es posible recuperar de la teoría clásica de anillos delgados.

## 1 INTRODUCCIÓN

En este trabajo se trata la solución, por medio de series de potencias, de las ecuaciones de movimiento de anillos gruesos para el caso de vibraciones libres en su plano, es decir aquellas vigas curvas cerradas donde la altura de la sección es relativamente importante con respecto al radio de curvatura baricéntrico (Figura 1). La deducción original del sistema diferencial se encuentra en (Filipich, 1991) utilizando el principio de Hamilton, que generaliza e incluye a la teoría de anillos circunferenciales delgados (Love, 1958) corrigiendo y ampliando diversas aproximaciones que sobre el tema presenta la bibliografía por ejemplo (Issa et al., 1987).

En base a las ecuaciones de Euler - Lagrange en este trabajo se presenta sucintamente otra alternativa para deducir las ecuaciones de movimiento. Se toma como incógnitas primarias las componentes del vector desplazamiento radial  $u$ , tangencial  $w$  y el giro por flexión  $\theta$  de cada sección admitiendo que se mantiene plana durante la deformación.

Se considerarán todos los aportes energéticos de deformación: axil, flexional, y por corte además de los aportes en la energía cinética de las velocidades debidas a los desplazamientos  $u$  y  $w$  pero además la contribución de la inercia rotatoria. También para incluir barras curvas muy gruesas se tienen en cuenta el corrimiento del eje neutro hacia el centro de curvatura por ejemplo (Belluzzi, 1957).

El modelo incluye cargas transversales (en sentido radial), tangenciales (en sentido del eje o longitudinal) y momentos distribuidos sobre el eje neutro para tener en cuenta que las cargas tangenciales podrían actuar excéntricamente respecto de ese eje.

## 2 ECUACIONES DEL MOVIMIENTO

### 2.1 Cantidades cinemáticas y sus relaciones

En la Figura 1 se muestra el esquema a utilizar: barra curva circunferencial de sección uniforme, cuya sección transversal tiene al menos un eje de simetría contenido en el plano de la estructura.

Se denominará como  $\alpha$  y  $t$  a las variables angular y temporal respectivamente, indicándose como  $u$  al desplazamiento radial de la sección, como  $\theta$  al giro flexional de la sección y como  $w^*$  al desplazamiento tangencial de cada fibra.

Se admite la hipótesis de Navier - Bernoulli (mantenimiento de secciones planas) por la cual

$$u = u(\alpha, t) \quad (1)$$

$$\theta = \theta(\alpha, t) \quad (2)$$

$$w^* = w^*(\alpha, t, y) \quad (3)$$

donde

$$w^* = w(\alpha, t) + y \theta(\alpha, t) \quad (4)$$

siendo  $w$  el desplazamiento tangencial del eje neutro. La coordenada “ $y$ ” se mide desde el eje neutro creciendo hacia el centro de curvatura.

Cabe aclarar que  $\theta$  es la diferencia entre el giro total y el debido al corte. La hipótesis comúnmente aceptada conduce, como sabemos, a que la distorsión angular  $\gamma$  es nula, en nuestro caso no es así pero el mantenimiento plano de las secciones durante la deformación exige una corrección en la tensión tangencial hallada por Hooke. Se halla además el valor de  $\tau$  por simples consideraciones de equilibrio (como se sabe en Resistencia de Materiales la compatibilidad de deformación nunca se verifica). Comparando ambas expresiones surge el denominado factor de corte.

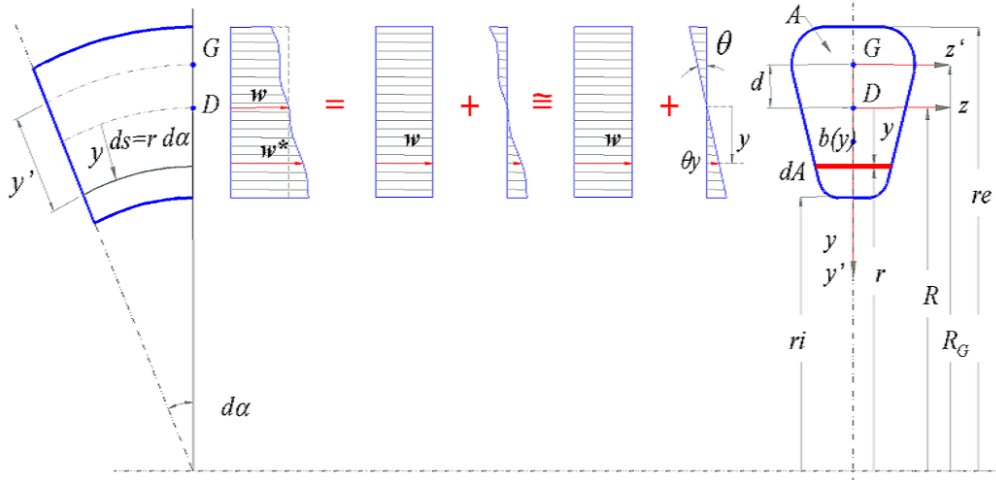


Figure 1: Esquema de la barra y sus aproximaciones, mantenimiento de secciones planas

De la teoría de barras de gran curvatura por ejemplo (Belluzzi, 1957) tenemos que

$$\iint_A \frac{dA}{r} = \frac{A}{R} \quad (5)$$

$$\iint_A \frac{y dA}{r} = 0 \quad (6)$$

$$\iint_A \frac{y^2 dA}{r} = A d \quad (7)$$

La condición (6) ubica arbitrariamente el origen de coordenadas sobre el eje neutro. Por Resistencia de Materiales los esfuerzos característicos de cada sección valen:

$$\iint_A \sigma dA = N \quad (8)$$

$$\iint_A \tau dA = Q \quad (9)$$

$$\iint_A \sigma \cdot y dA = M_D = N \cdot e_D \quad (10)$$

siendo  $A$  el área de la sección transversal uniforme,  $R$  el radio de curvatura de la fibra neutra; a su vez:

$$d \equiv R_G - R$$

Introduciendo la siguiente nomenclatura (Filipich, 1991):

$$\gamma \equiv \frac{R_G}{R} \geq 1 \quad (11)$$

$$J = J_D \equiv ARd \quad (12)$$

$$J_G \equiv \iint_A y'^2 dA \quad (13)$$

$$I_G \equiv \iint_A y'^3 dA \quad (14)$$

$$\beta^2 \equiv R_G d + \frac{J_G^2}{A} + i_G^2 \quad (15)$$

$$\lambda^2 \equiv (3\gamma - 2) i_G^2 + \gamma d^2 - \frac{I_G}{AR} \quad (16)$$

$$k^2 \equiv \frac{\lambda^2}{\gamma R^2} \quad (17)$$

$$q \equiv \frac{\beta^2}{\gamma R^2} \quad (18)$$

donde  $J_G$  es el momento de inercia baricéntrico de la sección, así como  $i_G$  es el radio de giro de la misma;  $i_G^2 = G^2/A$ .

Una pieza que esté sometida a flexión compuesta y corte bajo los esfuerzos  $M(\alpha)$ ,  $N(\alpha)$  y  $Q(\alpha)$ , está en equilibrio con las siguientes componentes de tensión:

$$\sigma(\alpha, t, y) = \frac{R}{r} \left( \frac{M_D}{J} y + \frac{N}{A} \right) \quad (19)$$

$$\tau(\alpha, t, y) = \left( \frac{R}{r} \right)^2 \frac{QS}{bJ} \quad (20)$$

$$(21)$$

con  $S(y)$  dada por (Romanelli, 1983)

$$S(y) = \int_{R-r_i}^{R-y} b(y') \cdot y dy, \quad (22)$$

donde  $b = b(y)$  es el ancho de la sección, que cambia con  $y$  y  $r_i$  el radio interno del anillo.

Se proponen las ecuaciones constitutivas para la barra curva:

$$M = \frac{1}{j} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} \quad (23)$$

$$N = \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} - u \right) \quad (24)$$

$$Q = \frac{1}{\phi} \left( R\theta + w + \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right) \quad (25)$$

$$(26)$$

donde  $j = R/EJ$ ;  $\varepsilon = R/EA$ ;  $\phi = mR/GA$  y  $M$ ,  $N$ , y  $Q$  son los esfuerzos característicos de cada sección y es lo que se define en (8,9 y 10),  $E$  es módulo de elasticidad y

$G = E/2(1 + \nu)$  el modulo de rigidez siendo  $\nu$  el coeficiente de Poisson. A su vez  $m$  es el factor de corte que definimos como (Romanelli, 1983):

$$m \equiv \frac{AR}{J^2} \int_{R-r_i}^{R-r_e} \frac{S^2(y) dy}{b(y)(R-y)^3}. \quad (27)$$

## 2.2 Lagrangeana

Para hallar las ecuaciones del movimiento se recurre a la mecánica analítica, en particular las ecuaciones de Lagrange. Para ello se tiene que construir la función de Lagrange o lagrangeana para campos por ejemplo (Goldstein, 1990)

$$L = T - V \quad (28)$$

donde  $T$  es la energía cinética y  $V$  en general es la energía interna de deformación mas la energia potencial o de posición de las cargas.

Dadas las cantidades densidad de energía cinética y de deformación  $\mathcal{T}$  y  $\mathcal{V}$  se definen de las relaciones

$$T = \iiint_{vol} \mathcal{T} dV; \quad V = \iiint_{vol} \mathcal{V} dV + B \quad (29)$$

con  $B = p_r u + p_t w - \mu_D \theta$  energia potencial o de posición de las cargas, siendo respectivamente  $p_r$ ,  $p_t$  y  $\mu_D$  la carga radial, la carga tangencial y el momento aplicadas sobre la fibra neutra. En este caso las cantidades paramétricas continuas son uni-dimensionales en “ $\alpha$ ” y las integrales son simplemente

$$V = \int_{\alpha} \mathcal{V} d\alpha + B \quad (30)$$

$$T = \int_{\alpha} \mathcal{T} d\alpha \quad (31)$$

$$L = \int_{\alpha} \mathcal{L} d\alpha - B \quad (32)$$

$$\mathcal{L} = (\mathcal{T} - \mathcal{V}) \quad (33)$$

Estas integrales se extienden al dominio de interés. En éste caso  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ .

Y las ecuaciones de Euler - Lagrange para campos son:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \mu_i}{\partial t} \right)} \right) + \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \mu_i}{\partial \alpha} \right)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu_i} = \xi_i \quad (34)$$

donde  $i = 1, 2, 3$  y

$$\mu_1 = u$$

$$\mu_2 = w$$

$$\mu_3 = R\theta$$

son las incógnitas del problema (1- 4) y:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= -p_r \frac{R^2}{A} \\ \xi_2 &= -p_t \frac{R^2}{A} \\ \xi_3 &= -\mu_D R\end{aligned}$$

son las fuerzas derivadas de la energía potencial o de posición de las cargas.

Se escriben explícitamente las cantidades  $\mathcal{T}$  y  $\mathcal{V}$ , para después utilizar (34) y encontrar las ecuaciones de movimiento. Según la Resistencia de Materiales

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma^2}{E} + \frac{\tau^2}{G} \right) \quad (35)$$

$$\mathcal{T} = \frac{\rho}{2} \left( \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w^*}{\partial t} \right)^2 \right) \quad (36)$$

donde  $\rho$  es la densidad del material.

Reemplazando las expresiones (19 y 20), a través de (35) teniendo en cuenta las integrales (5, 6 y 7) se halla

$$\mathcal{V} = \frac{(jM^2 + \varepsilon N^2 + \phi Q^2)}{2} \quad (37)$$

Luego, de forma similar para la energía cinética, se reemplazan (1-3) en (36) teniendo en cuenta (4) y también las integrales (5, 6 y 7) resultando

$$\mathcal{T} = \rho A R \gamma \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + k^2 \left( R \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 - 2q \frac{\partial w}{\partial t} R \frac{\partial \theta}{\partial t} \right]. \quad (38)$$

Antes de reemplazar en la ecuación de Euler - Lagrange (34), se utilizan las relaciones constitutivas para  $M$ ,  $N$  y  $Q$  (23, 24 y 25) escribiendo 37 como:

$$\mathcal{V} = \frac{1}{jR^2} \left[ \left( R \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{1}{k_\varepsilon^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \alpha} - u \right)^2 + \frac{1}{k_\phi^2} \left( R\theta + w + \frac{\partial u}{\partial \alpha} \right)^2 \right] \quad (39)$$

donde

$$k_\varepsilon^2 = \frac{\varepsilon}{jR^2} = \frac{J}{AR^2} = \gamma - 1 \quad (40)$$

$$k_\phi^2 = \frac{\phi}{jR^2} = 2m(1 - \nu) \frac{J}{AR^2} = 2m(1 + \nu)(\gamma - 1). \quad (41)$$

### 2.3 Ecuaciones generales del movimiento

Conocidas las expresiones de la densidad de energía cinética  $\mathcal{T}$  y la densidad de energía potencial  $\mathcal{V}$  o en definitiva la densidad de lagrangeana  $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V}$ , se puede plantear ahora las tres ecuaciones de Euler - Lagrange (34) para  $u(\alpha, t)$ ,  $w(\alpha, t)$  y  $R\theta(\alpha, t)$ .

Reescribiendo las ecuaciones para  $u(\alpha, t)$ ,  $w(\alpha, t)$  y  $R\theta(\alpha, t)$  en términos de los esfuerzos  $M$ ,  $N$  y  $Q$ , se encuentra el siguiente sistema de ecuaciones de movimiento para una barra

curva gruesa idem (Filipich, 1991):

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha} + N - \rho AR\gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -p_r \frac{R^2}{A} \quad (42)$$

$$\frac{\partial N}{\partial \alpha} - Q - \rho AR\gamma \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - qR \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right] = -p_t \frac{R^2}{A} \quad (43)$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial M}{\partial \alpha} - Q - \rho AR\gamma \left[ k^2 R \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - q \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] = -\mu_D R \quad (44)$$

Como se observa, es un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, lineal, a coeficientes constantes en el ángulo  $\alpha$  y en el tiempo  $t$ ; con incógnitas  $u, w$  y  $\theta$ , que junto con 6 condiciones iniciales, dos para cada campo, y 6 condiciones de contorno, también 2 para cada uno de ellos, determinan el movimiento de dicha barra curva o arco. En aquel caso en que las condiciones en los bordes sean de tipo periódico el arco se cierra y se transforma en un anillo imponiendo continuidad en alguna sección  $R\alpha$ . La continuidad se impone a los campos  $u, w$  y  $\theta$ , y a los esfuerzos  $N, M$  y  $Q$ . Podemos escribir entonces estas condiciones como:

$$u(\alpha_0, t) = u(\alpha_0 + 2\pi, t); \quad w(\alpha_0, t) = w(\alpha_0 + 2\pi, t) \quad (45)$$

$$R\theta(\alpha_0, t) = R\theta(\alpha_0 + 2\pi, t); \quad N(\alpha_0, t) = N(\alpha_0 + 2\pi, t) \quad (46)$$

$$M(\alpha_0, t) = M(\alpha_0 + 2\pi, t); \quad Q(\alpha_0, t) = Q(\alpha_0 + 2\pi, t) \quad (47)$$

donde  $0 \leq \alpha_0 \leq 2\pi$  es un ángulo arbitrario.

### 3 LÍMITE PARA ARCOS DELGADOS

En la teoría clásica de anillos delgados, para el caso de movimientos planos, no se tiene en cuenta: el corrimiento de la fibra neutra, la inercia rotacional, la deformación axil ni la deformación por corte. Esta aproximación es válida cuando el radio de la sección transversal de la barra es pequeño, o sea  $a \rightarrow 0$ , ver el clásico tratado (Love, 1958)

Las ecuaciones clásicas de anillos delgados, para el caso de movimiento plano, pueden deducirse a partir de las ecuaciones de movimiento para anillos gruesos (42), (43) y (44), y sus correspondientes leyes constitutivas (23, 24 y 25), teniendo en cuenta que  $\theta(\alpha, t) = 0$  y  $a \rightarrow 0$ .

Si todavía en las ecuaciones constitutivas (23), (24) y (25) se desprecia la deformación axil, entonces

$$\varepsilon \rightarrow 0 \quad (48)$$

y por lo tanto  $k_\varepsilon^2 \rightarrow 0$ . Luego por (24)  $N$  se desacopla de  $u$  y  $\frac{\partial w}{\partial \alpha}$ , resultando que

$$\frac{\partial w}{\partial \alpha} = u \quad (49)$$

conocida como *hipótesis de inextensibilidad*, que, en la teoría clásica se da como una relación cinemática.

Análogamente si se desprecia la deformación por corte

$$\phi \rightarrow 0 \quad (50)$$

y también  $k_\phi^2 \rightarrow 0$  y entonces  $w + \frac{\partial u}{\partial \alpha} + R\theta \rightarrow 0$ .

Si la barra curva es delgada,  $d \rightarrow 0$ ; , y  $J \rightarrow J_G$  y desaparece la inercia rotacional de las secciones planas. También  $\beta^2 \rightarrow 0$  y luego  $q \rightarrow 0$ ;  $\lambda \rightarrow 0$  y  $k^2 \rightarrow 0$ .

De esta forma la (42)

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha} + N = \rho AR \gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

o escrito como (Love, 1958) como  $\gamma \rightarrow 1$  resulta

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha} + N = \mu R_G \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (51)$$

que es la primera ecuación que propone y donde  $\mu$  es la masa por unidad de longitud. De igual manera la (43) se transforma en

$$\frac{\partial N}{\partial \alpha} - Q = \mu R_G \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (52)$$

que coincide con la 3<sup>ra</sup> ecuación de Love (la 2<sup>da</sup> da el movimiento fuera del plano). Si se usa la (44), recordar que se desprecian tanto  $k$  como  $q$ , se encuentra que

$$\frac{\partial M}{\partial \alpha} = Q \quad (53)$$

que reemplazada en (52) da

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q}{\partial \alpha^2} &= -\frac{\partial N}{\partial \alpha} + \mu R_G \frac{\partial^3 u}{\partial \alpha \partial t^2} \\ \frac{\partial^2 Q}{\partial \alpha^2} &= \mu R_G \frac{\partial^3 u}{\partial \alpha \partial t^2} - \frac{\partial M}{\partial \alpha} - \mu R_G \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Luego derivando en la primera ecuación de Love (51) y reemplazando esto último, se encuentra que

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial M}{\partial \alpha} = \mu R_G \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial u}{\partial \alpha} - w \right) \quad (54)$$

que es la 2<sup>da</sup> relación de la teoría de Love. Luego queda demostrado que la teoría para arcos gruesos, (42, 43 y 44), y sus correspondientes leyes constitutivas (23, 24 y 25), contienen la teoría de Love, para el caso en que el movimiento sea plano y la sección del anillo pequeña comparada con  $R_G$ .

Antes de pasar al problema de vibraciones libres, vale la pena aclarar que las ecuaciones de movimiento (42, 43 y 44) tienen como característica original el acople que se produce dinámicamente entre el corrimiento tangencial y el giro flexional ecuaciones (43) y (44). Dentro de la Resistencia de Materiales son las ecuaciones más generales posibles para la dinámica plana que por supuesto incluyen el movimiento de anillos delgados y vigas rectas guesas conocidas como vigas Timoshenko

#### 4 SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE VIBRACIONES LIBRES

Las ecuaciones diferenciales de movimiento (42, 43 y 44) son lineales y admiten un tipo de solución específica (Weimberger, 1965) como es ser separadas en una parte espacial y una temporal cuando se trate del problema homogéneo (vibraciones libres). La parte temporal es una función armónica, esto es;

$$u(\alpha, t) = \hat{u}(\alpha) \cos(\omega t) \quad (55)$$

$$w(\alpha, t) = \hat{w}(\alpha) \cos(\omega t) \quad (56)$$

$$R\theta(\alpha, t) = R\hat{\theta}(\alpha) \cos(\omega t) \quad (57)$$



donde  $\omega$  es una frecuencia angular natural que es la constante de separación del problema.

Se introduce el parámetro de frecuencia

$$\Omega^2 = \gamma \frac{\rho A R^4}{E J} \omega^2 \quad (58)$$

Se reemplaza en el sistema fundamental (42,43 y 44) las cantidades (55,56 y 57) usando las relaciones cinemáticas (23, 24 y 25) para obtener

$$k_\varepsilon^2 \frac{d^2 \hat{u}}{d\alpha^2} - k_\phi^2 (1 - k_\varepsilon^2 \Omega^2) \hat{u} + (k_\varepsilon^2 + k_\phi^2) \frac{d\hat{w}}{d\alpha} + k_\varepsilon^2 \frac{d(R\hat{\theta})}{d\alpha} = 0 \quad (59)$$

$$(k_\varepsilon^2 + k_\phi^2) \frac{d\hat{u}}{d\alpha} - k_\phi^2 \frac{d^2 \hat{w}}{d\alpha^2} + k_\varepsilon^2 (1 - k_\phi^2 \Omega^2) \hat{w} + k_\varepsilon^2 (1 + qk_\phi^2 \Omega^2) (R\hat{\theta}) = 0 \quad (60)$$

$$k_\varepsilon^2 \frac{d\hat{u}}{d\alpha} + k_\varepsilon^2 (1 + qk_\phi^2 \Omega^2) \hat{w} - k_\varepsilon^2 k_\phi^2 \frac{d^2 (R\hat{\theta})}{d\alpha^2} + k_\varepsilon^2 (1 - k_\phi^2 \Omega^2) (R\hat{\theta}) = 0 \quad (61)$$

Como se observa, es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (a derivadas totales), en el ángulo  $\alpha$ ; con incógnitas  $\hat{u}, \hat{w}, R\hat{\theta}$ , que junto con 6 condiciones de contorno, dos para cada una de ellas, conducen a un problema de valores propios (de Sturm - Liouville) del cual se hallan las frecuencias naturales y sus correspondientes formas modales. Las condiciones de contorno que se obtienen de (46 y 47) tomando a  $\alpha_0 = 0$  son

$$\hat{u}(0) = \hat{u}(2\pi) \quad \hat{w}(0) = \hat{w}(2\pi) \quad R\hat{\theta}(0) = R\hat{\theta}(2\pi) \quad (62)$$

$$\frac{d\hat{u}(0)}{d\alpha} = \frac{d\hat{u}(2\pi)}{d\alpha} \quad \frac{d\hat{w}(0)}{d\alpha} = \frac{d\hat{w}(2\pi)}{d\alpha} \quad \frac{d(R\hat{\theta}(0))}{d\alpha} = \frac{d(R\hat{\theta}(2\pi))}{d\alpha} \quad (63)$$

Se proponen soluciones en series de potencias de  $\alpha$

$$\hat{u}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \alpha^n \quad \hat{w}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \alpha^n \quad R\hat{\theta}(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \alpha^n \quad (64)$$

puesto que aceptamos que  $\hat{u}, \hat{w}, R\hat{\theta}$  son funciones analíticas y con lo cual trabajaremos con expansiones de convergencia uniforme. Siendo en general

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

recuérdese que la derivada  $k$ -ésima de una serie de potencias se puede escribir como

$$\frac{d^k f(x)}{dx^k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} x^n$$

Reemplazando las (64) en las (59 a 61) se hallan las siguientes recurrencias, igualando los factores de cada  $\alpha^n$

$$A_{i+2} = \frac{k_\phi^2 (1 - k_\varepsilon^2 \Omega^2) A_i - (k_\varepsilon^2 + k_\phi^2) (i+1) B_{i+1} - k_\varepsilon^2 (i+1) C_i}{k_\varepsilon^2 (i+1) (i+2)} \quad (65)$$

$$B_{i+2} = \frac{(k_\varepsilon^2 + k_\phi^2) (i+1) A_{i+1} + k_\varepsilon^2 (1 - k_\phi^2 \Omega^2) B_i + k_\varepsilon^2 (1 - qk_\phi^2 \Omega^2) C_i}{k_\phi^2 (i+1) (i+2)} \quad (66)$$

$$C_{i+2} = \frac{(i+1) A_{i+1} + (1 - k_\phi^2 \Omega^2) B_i + (1 - k_\phi^2 \Omega^2) C_i}{k_\phi^2 (i+1) (i+2)} \quad (67)$$

El procedimiento clásico de recurrencia algebraica es aplicado en este trabajo. Se destaca la sistematización de la metodología, en la que los autores han trabajado (Filipich et al., 2003).

Como las recurrencias comienzan de  $A_2$ ,  $B_2$  y  $C_2$  deben ser conocidas previamente para hallar las 6 constantes  $A_0, A_1, B_0, B_1, C_0$  y  $C_1$ . La imposición de las 6 condiciones de borde (62 y 63) da lugar a un sistema homogéneo de  $(6 \times 6)$  (matriz  $\bar{\eta}$ ) en dichas 6 constantes. Este sistema, por ser homogéneo, tendrá solución no trivial cuando se anule su determinante. Como se dijo es un problema de valores propios del cual se obtienen las frecuencias naturales y sus correspondientes formas modales. Para ciertas C.B. especiales como son los bordes articulados o empotrados se reduce el orden 6 del sistema a 2 sistemas de 3<sup>er</sup> orden (uno de ellos trivial). En el anillo se debe anular un determinante de  $(6 \times 6)$ .

Entonces

$$\det \bar{\eta}(\Omega) = 0 \quad (68)$$

Las raíces  $\Omega$  deducidas de (68) son los valores propios buscados, y con él, las frecuencias  $\omega$  y sus formas modales.

## 5 RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En esta sección se presentan las soluciones de las ecuaciones diferenciales, dadas por las series de potencias, que son comparadas con otras teorías; la teoría clásica de anillos delgados y la teoría de la elasticidad bi - dimensional. Se estudian dos tipos de secciones: circular y rectangular, pero bastaría solo modificar las características geométricas para resolver cualquier tipo de sección (Esta es la ventaja notable de la resistencia de materiales).

El análisis comparativo de todos los modelos se realiza simultáneamente para cada configuración, ya sea en la sección circular o rectangular.

Como se estudian movimientos vibratorios naturales, las soluciones  $\hat{u}$ ,  $\hat{w}$  y  $\hat{\theta}$  corresponden a sus formas modales, que son dibujadas junto con sus correspondientes frecuencias naturales que son las soluciones de (68).

### 5.1 Anillos de sección circular

Aunque la teoría es general en cuanto a la forma de la sección normal, se concretó en la forma circular y rectangular a fin de comparar con otras teorías. De todas formas ciertos fenómenos son comunes a todos tipo de sección. Para caracterizar el tipo de sección se calculan las integrales y fórmulas (5 a 17). Para la sección circular resultan

$$R = \frac{\sqrt{R_G^2 - a^2} + R_G}{2} \quad (69)$$

donde  $a$  es el radio de la sección normal. La (69) permite hallar el corrimiento de la fibra neutra. Entonces, el factor de corte queda dado por 27 vale:

$$m = \frac{10}{9} \quad (70)$$

En la Figura 2 se presenta la función  $\det \bar{\eta}(\Omega)$  para el caso en el que el radio baricéntrico del anillo es  $R_G = 10$  m y el radio de la sección  $a = 3$  m. En este caso el material es acero por lo que  $\rho = 7855$  kg/m<sup>3</sup>,  $E = 2.1 \times 10^{11}$  N/m<sup>2</sup> y el coeficiente de Poisson  $\nu = 0.3$ . En el gráfico se ven los puntos donde dicho determinante se anula, que corresponden a las frecuencias naturales. Se puede observar cómo algunos ceros son de factor de multiplicidad simples y otros no. Esto significa que la primera de estas frecuencias normales es degenerada y la segunda no. Esta

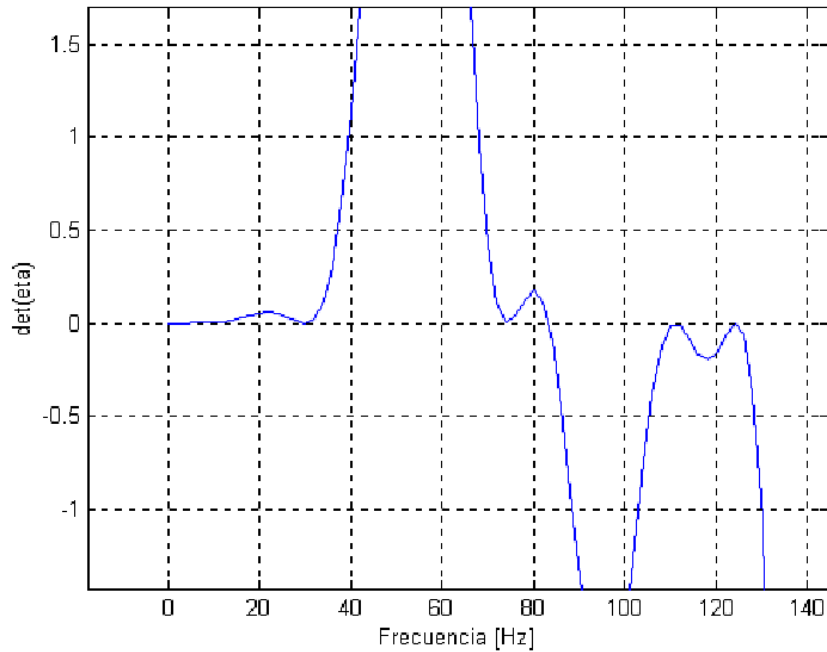


Figure 2: Determinante del sistema en función de la frecuencia

degeneración es consecuencia de la simetría (de los anillos circunferenciales) del problema, que da lugar a dos formas modales, para la misma frecuencia, que son linealmente independientes. A los fines prácticos son iguales a menos de una rotación.

En la Tabla 1 se indican las primeras frecuencias naturales para este anillo y en la Tabla 2 se indican los parametros de frecuencia para arcos de distinta relación  $\gamma$ .

Modo	Parámetro	Frecuencia [Hz]
1	0.3733	29.98
2	0.9253	74.31
3	1.0366	83.25
4	1.3806	110.88
5	1.5482	124.34
6	2.1287	170.97

Table 1: frecuencias naturales para el anillo grueso de sección circular radio baricéntrico del anillo es  $R_G = 10$  m y el radio de la sección  $a = 3$  m.

En la Figura 3 también se presentan las formas modales, en las cuales no se repiten las formas degeneradas. La figura circular de trazo delgado es el anillo sin deformar. La curva interior, tanto en el anillo deformado como en el no deformado, es el eje neutro. Las secciones planas también están representadas y son las líneas que cruzan el eje neutro. Las formas modales 1, 2, 4, 5, 6 son degeneradas y su degeneración es de  $2^{do}$  orden. En cambio el modo 3 es no degenerado, y se lo conoce como *modo respiratorio*. El cuarto modo es fundamentalmente una vibración en la que el extradós del anillo está elongado y la mitad opuesta comprimida también en el extradós, y viceversa. En el modo 6 se da también este fenómeno pero a contra fase en cada

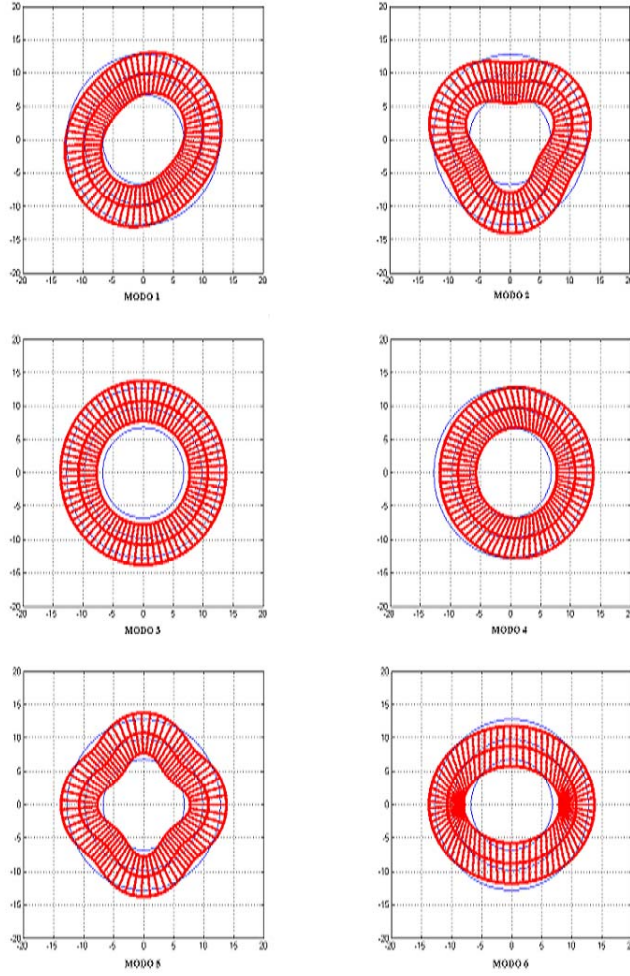


Figure 3: Formas modales del anillo de sección circular con  $R_G = 10m$  y  $a = 3m$

lado del anillo. En los modos 1, 2 y 5 la fibra neutra se mantiene prácticamente inextensible, y son estos movimientos similares a los que se dan en la teoría clásica de anillos delgados.

Las soluciones que (Love, 1958) propone para el movimiento plano son

$$u = [-n_k A_k \sin(n_k \alpha) + n_k B_k \cos(n_k \alpha)] \cos(\omega_k t) \quad (71)$$

y

$$w = [A_k \cos(n_k \alpha) + B_k \sin(n_k \alpha)] \cos(\omega_k t) \quad (72)$$

donde  $n_k = 1 + k$ , y  $k = 1; 2 \dots$  es el modo en el que vibra el anillo;  $\omega_k$  es la frecuencia angular correspondiente a dicho modo y  $A_k$  y  $B_k$  son constantes que mezclan las formas degeneradas. Por ejemplo si  $A_k = 1$  y  $B_k = 0$  se tiene una de las dos formas modales que corresponden a la frecuencia  $\omega_k$ ; la otra forma, claro está, es tomando  $A_k = 0$  y  $B_k = 1$ . La frecuencia viene dada por

$$\omega_k = \sqrt{\frac{E\pi a^4}{4\mu R_G^4} \frac{n^2(n^2 - 1)^2}{n^2 + 1}} \quad (73)$$

Modo	$\gamma = 0.2$	$\gamma = 0.3$	$\gamma = 0.4$	$\gamma = 0.5$	$\gamma = 0.6$
1	0.4007	0.3733	0.3418	0.3089	0.2760
2	1.0533	0.9253	0.7626	0.594	0.4775
3	1.5755	1.0366	0.8037	0.7066	0.5275
4	1.8527	1.3806	0.9665	1.0879	0.5987
5	2.1712	1.5482	1.2942	1.4760	0.7943
6	2.7399	2.1287	1.4679	1.5732	0.9178

Table 2: Parámetros de frecuencias para anillos de diferente relación  $\gamma$

que para las propiedades antes indicadas, esto es, radio del anillo  $R_G = 10$  m, radio de la sección  $a = 3$  m, densidad  $\rho = 7855$  kg/m<sup>3</sup>, módulo de Young  $E = 2.1 \times 10^{11}$  N/m<sup>2</sup> y el módulo de Poisson  $\nu = 0.3$ , da lo mostrado en la Tabla 3

Modo	Frecuencia [Hz]
1	33.12
2	93.68
3	179.62
4	290.49
5	426.15
6	586.54

Table 3: Frecuencias para el anillo delgado

Como se observa no existe una buena coincidencia entre la Tabla 1 y la 3 y esto es porque no se están cumpliendo las simplificaciones que se hicieron para deducir las ecuaciones (51 a 54) a partir de las (42, 43 y 44) a saber  $a \ll R_G$ . Por ejemplo: en la 3<sup>ra</sup> frecuencia se ve una discrepancia muy grande entre los dos modelos. Esto es porque en la teoría de anillos delgados el 3<sup>er</sup> modo corresponde al 4<sup>to</sup> de la teoría de anillos gruesos (42, 43 y 44) es decir, la teoría de anillos delgados solo considera los modos flexionales.

Ahora, si la barra es de pequeña altura relativa, las frecuencias que corresponden a los modos flexionales, en una y otra teoría, comienzan a ser coincidentes, es decir formas modales y frecuencias son muy similares. En el límite, cuando la altura relativa de la barra se haga despreciable, las dos teorías dan lugar a resultados semejantes. La Figura 4 muestra, para las primeras dos formas modales, cómo las frecuencias coinciden cuando el anillo es delgado.

## 5.2 Anillos de sección rectangular

Sea un anillo de radio baricéntrico  $R_G$ ; de sección rectangular de ancho  $b$  y alto  $h$ , y por lo tanto de área  $A = bh$ . El radio neutro queda dado por (5) y vale:

$$R = \frac{A}{b \ln \left( \frac{\frac{R_G}{h} + \frac{1}{2}}{\frac{R_G}{h} - \frac{1}{2}} \right)} \quad (74)$$

y en este caso, la geometría rectangular, da un valor que depende de  $\frac{h}{R_G}$  para el factor de corte  $m$  que vale:

$$m = \gamma \frac{\left[ 12 - \left( \frac{h}{R_G} \right)^2 \right] - 12}{8(\gamma - 1)^2}. \quad (75)$$

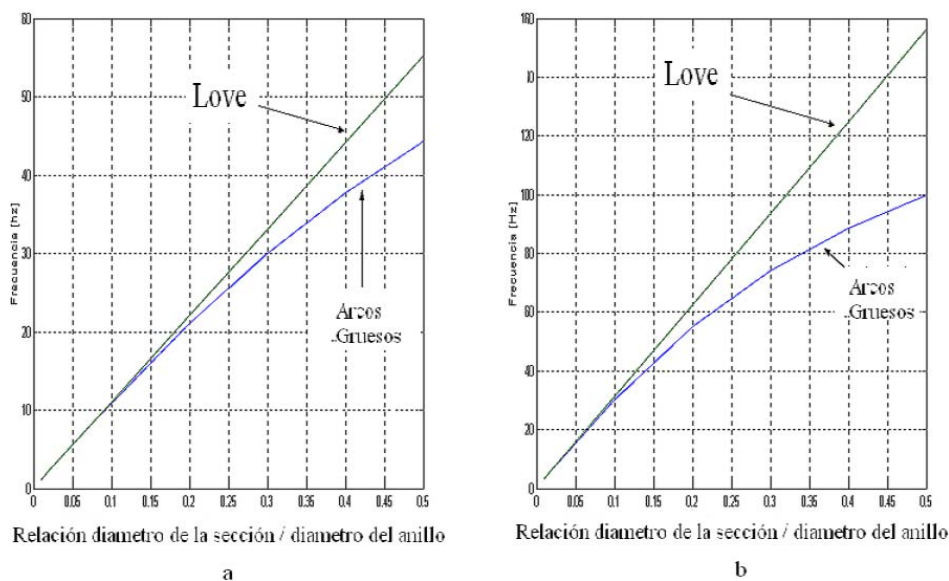


Figure 4: Comparación de frecuencias en función de la relación  $\gamma = a/R_G$  entre la teoría de arcos gruesos y la clásica de arcos delgados para a: Modo 1 y b: Modo 2

Modo	Elasticidad [Hz]	Anillos gruesos [Hz]
1	1244.3	1241.5
2	3208.9	3190.3
3	4357.7	4324.1
4	5546.9	5499.3
5	5920.1	5905.1
6	8076.8	7992.1

Table 4: Comparación entre las frecuencias dadas por la teoría de la elasticidad para estados planos de tensión y la de anillos gruesos. Sección transversal rectangular, area igual a altura  $A = 3m^2$  y  $h = 3m$  y radio baricéntrico  $R_G = 7.5m$ . La fibra neutra está en  $R \approx 7.39m$

para barras de gran curvatura (Romanelli, 1983)

Las formas modales son similares a las presentadas para la sección circular. En la tabla 4 se detallan las 6 primeras frecuencias y en las Figuras 5 y 6 se muestran las primeras dos formas modales que son comparadas con las formas y frecuencias que arroja el modelo de elasticidad lineal bi-dimensional (para estados planos de tensiones). En esas figuras se puede ver la concordancia que hay entre las dos teorías, lo que indica cómo la Teoría de Resistencia de Materiales para barras gruesas junto con las hipótesis de mantenimiento de secciones planas es totalmente aplicable a este tipo de problema.

La sección transversal es rectangular con area igual a la altura  $A = 3m^2$  y  $h = 3m$  y radio baricéntrico del anillo  $R_G = 7.5m$ . Los datos del material:  $E = 3 \times 10^7 N/m^2$ ,  $\rho = 7.324 \times 10^{-4} kg/m^3$ ,  $\nu = 0.30$ . Para este caso la cantidad  $h/R_G = .4$  la fibra neutra esta en  $R \approx 7.39m$  y factor de corte  $m \approx 1.2$ .

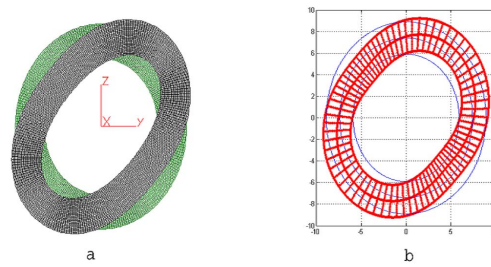


Figure 5: Comparación de la primera forma modal entre a) la teoría de la elasticidad plana y b) la de arcos gruesos. Sección transversal rectangular, area igual a altura  $A = 3m^2$  y  $h = 3m$  y radio baricéntrico  $R_G = 7.5m$ . La fibra neutra esta en  $R \approx 7.39m$

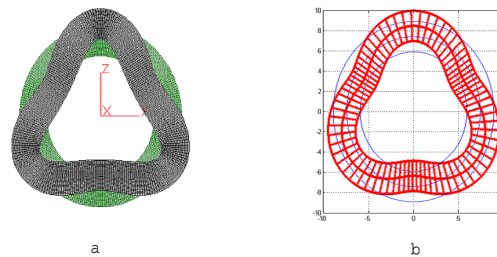


Figure 6: Comparación de la segunda forma modal entre a) la teoría de la elasticidad plana y b) la de arcos gruesos. Sección transversal rectangular, area igual a altura  $A = 3m^2$  y  $h = 3m$  y radio baricéntrico  $R_G = 7.5m$ . La fibra neutra esta en  $R \approx 7.39m$

## 6 COMENTARIOS FINALES Y CONCLUSIONES

Este trabajo tiene como finalidad principal la resolución de las ecuaciones diferenciales de anillos gruesos circunferenciales para el caso de vibraciones naturales aplicando la clásica técnica de las series de potencias. Sistematizando la problemática se arriba a expresiones de recurrencia en los coeficientes de las tres incógnitas. La convergencia de la solución está garantizada ya que el sistema lineal de ecuaciones diferenciales, al ser a coeficientes constantes evidentemente no es singular (Weimberger, 1965). Para hallar las frecuencias fundamentales se recurre a los algoritmos de la secante dado que como se observa en las curvas de la figura 2 algunas raíces son múltiples (pendiente horizontal) y por lo tanto la aludida técnica de la secante es aplicable a todos los casos. En cuanto a las formas modales los autores aplicaron un algoritmo propio ad-hoc. En efecto. El uso automatizado de las soluciones para las formas modales conduce al planteo de un problema no lineal de autovalores *pero* siempre de un sistema de  $6 \times 6$ . De utilizar en cambio el método corriente de series de potencias caeríamos en un problema

clásico matricial de la forma

$$A - \lambda B = 0 \quad (76)$$

donde ahora las matrices  $A$  y  $B$  serían de muy elevado orden dependiendo de la cantidad de términos utilizados en el desarrollo de las series de potencias. Los autores al utilizar esta técnica sistematizada para problemas lineales acuden al denominado principio de superposición poniendo para cada autovalor sólo en evidencia las 6 incógnitas libres del problema diferencial sin importar cuantos términos se tomen en la expansión aludida.

También se aborda por esta metodología la dinámica de los denominados anillos delgados con fines de comparación para el casi límite de anillos gruesos.

El trabajo muestra la deducción de las ecuaciones correspondientes a anillos delgados como caso límite de la teoría general. Ésta también incluye a las vigas rectas Timoshenko cuando el radio tiende a infinito.

Una serie de ejemplos resueltos son comparados con la teoría de los anillos delgados y la elasticidad para estados de tensión planos, cuando de sección rectangular se trata, resaltándose importantes coincidencias con un costo computacional y algebraico mínimo comparado con elementos finitos u otras técnicas numéricas. Otra ventaja de disponer de una solución general de movimiento de arcos gruesos circunferenciales es la posibilidad de plantear un elemento finito curvo con la totalidad de los aportes para abordar arcos de directriz arbitrarias que no pueden ser abordados con elementos de viga Timoshenko pues darían lugar a un importante error.

La validez de una propuesta como la presentada reside en que la solución conduce a recurrencias, al determinar los coeficientes de las series de potencias, evitando la resolución de un importante sistema de ecuaciones. Ventaja esta que se suma a que las ecuaciones generales para barras circunferenciales gruesas, dentro de la resistencia de materiales, permite afrontar con facilidad anillos o arcos gruesos de secciones arbitrarias tales como (U, I, Z, etc.)

## REFERENCES

- O. Belluzzi. *Scienza delle costruzioni Vol 2 Zanichelli Bologna*. Dover publications, INC. New York, 1957.
- C. P. Filipich. *Vibraciones libres en su plano de arcos y anillos circunferenciales con diversas complejidades*. Tesis Doctoral, 1991.
- C.P. Filipich, P. Belles, and M.B. Rosales. Dinámica de anillos circunferenciales gruesos. *Congreso de métodos numéricos y sus aplicaciones, ENIEF, Bahía Blanca*, page 1, 2003.
- H.A. Goldstein. *Mecánica clásica*. Revert. Barcelona, 1990.
- M.S. Issa, T.M. Wang, and B. T. Hsiao. Extensional vibrations of continuous circular curved beams with rotary inertia and shear deformation, i: Free vibration. *Journal of Sound and Vibration*, 114:297–308, 1987.
- A. E. H. Love. *A Treatise on the mathematical theory of Elasticity*. University. Cambridge, 1958.
- E. Romanelli. Tensiones de corte y tensiones radiales de barras curvas planas con estado general de solicitación. *III Jornadas Argentinas de Ingeniería estructural Buenos Aires, Argentina*, page 1, 1983.
- A. Weimberger. *A first course in partial differential equations*. Dover publications, INC. New York, 1965.