

SENSIBILIDADE DE PARÂMETROS NA OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE ESTRUTURAS BASEADA NA TENSÃO

PARAMETER SENSITIVITY IN TOPOLOGY OPTIMIZATION OF STRUCTURES BASED ON STRESS

Fabiano Bortoluzzi^a, Gustavo C. Rodrigues^a, João B. D. Moreira^a, Ederval de S. Lisboa^b
e Walter J. P. Casas^a

^a*Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Rua Sarmento Leite 425, Porto Alegre/RS, 90050-170, Brasil, fbortoluzzi7@gmail.com, gustavocomerlato@gmail.com, joaobapmdias@gmail.com, walter.paucar.casas@ufrgs.br, <https://www.ufrgs.br/demec/>*

^b*Campus Cachoeira do Sul, Universidade Federal de Santa Maria, Rua Ernesto Barros 1345, Cachoeira do Sul/RS, 96506-322, Brasil, ederval.lisboa@ufsm.br, <http://www.ufsm.br>*

Palavras-chave: norma-P, minimização de tensões, otimização evolucionária.

Resumo. Este trabalho apresenta uma avaliação da influência dos parâmetros numéricos utilizados na otimização de estruturas com o método bidirecional evolucionário de otimização estrutural (BESO) baseado em tensão, onde o objetivo é obter uma minimização das tensões considerando uma restrição no volume estrutural. A discretização da estrutura é realizada por uma malha de elementos finitos, em seguida, uma análise estática é realizada para determinar a distribuição das tensões de von Mises e calcular a medida global de tensão equivalente com a aproximação modificada da norma-P. A atualização de design é realizada com base nos números de sensibilidade elementares, obtidos pela derivação da tensão da norma-P modificada. Diferentes combinações de parâmetros do método BESO são empregadas para resolver exemplos numéricos da literatura, para problemas baseados em tensão. Foi verificado que os parâmetros de entrada na otimização topológica baseada em tensão com o método BESO podem apresentar grande influência na topologia e resultados finais.

Keywords: P-norm approach, stress minimization, evolutionary optimization.

Abstract. This work presents an influence evaluation of the numerical parameters in the optimization of structures with the bi-directional evolutionary structural optimization (BESO) method based on stress, where the aim is to obtain a stress minimization considering a structural volume constraint. A finite element mesh is employed for discretization of the structure and a static analysis is performed to determine the von Mises stress distribution; thereafter the equivalent global stress measurement is evaluated with the modified P-norm approach. The design update is performed based on elementary sensitivity numbers obtained by the derivation of the modified P-norm stress. Different combinations of BESO parameters are employed to solve numerical examples found in the literature for problems based on stress. It was verified that input parameters of stress-based topology optimization with BESO method can present great influence in the final topology and numerical results.

1 INTRODUÇÃO

O problema geral de otimização topológica pode ser definido como encontrar a melhor distribuição do material num dado domínio de projeto tal que as funções objetivo são otimizadas e as restrições são satisfeitas (Sigmund et al., 2003), i.e., é o processo para determinar a conectividade, a forma, e a localização dos vazios dentro do domínio de projeto (Deaton e Grandhi, 2014).

Ao longo dos últimos anos, diversos trabalhos na área de otimização foram direcionados ao estudo de algoritmos para otimizar a topologia de estruturas desejando-se obter componentes mais leves e eficientes. Nesse contexto, o trabalho de Le et al. (2010) aponta que a maioria dos avanços em otimização topológica são realizados com base no problema de flexibilidade, além disso apresenta alguns desafios da otimização topológica baseada em tensão.

Recentemente em Xia et al. (2018) é aplicado o método bidirecional de otimização estrutural evolucionária (BESO) de Huang e Xie (2010) em problemas de minimização de tensões, onde se emprega a tensão obtida pela norma P como uma medida de tensão global, também são propostos novos métodos de filtragem e estabilização, já Nabaki et al. (2019) apresentam um método semelhante, contudo relatam melhores resultados que os apresentados em Xia et al. (2018). As principais vantagens do BESO sobre os outros métodos é a eficiência computacional, facilidade de implementação e a presença de contornos bem definidos entre diferentes materiais.

O objetivo desse trabalho é avaliar a influência dos parâmetros de entrada do método BESO para otimização topológica baseada em tensões aplicando o método apresentado por Nabaki et al. (2019) em casos bidimensionais encontrados na literatura.

2 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

A aplicação do método BESO para minimizar a tensão da norma-P modificada objetiva encontrar a melhor topologia numa dada estrutura sujeita a um volume prescrito, observando a cada iteração a distribuição da tensão de von Mises e a sensibilidade dos elementos à tensão da norma-P. Dessa forma num projeto de sólido-vazio, o problema de otimização pode ser representado pelas expressões da Eq. (1),

$$\begin{aligned} \text{minimizar : } \sigma_G^{PN}(x) &= \left(\frac{1}{N_i} \sum_{i=1}^{N_i} (\sigma_i^{vm}(x))^P \right)^{\frac{1}{P}} \\ \text{sujeito a : } &\begin{cases} V^* - \sum_{i=1}^{N_i} V_i x_i = 0 \\ x_i = x_{\min} \text{ ou } 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

onde σ_G^{PN} é a medida de tensão da norma-P modificada, V^* é o volume especificado para a estrutura final e V_i o volume de cada elemento. x_i é a variável de projeto binária do i -ésimo elemento, e x_{\min} (e.g. 10^{-3}) é usado para denotar um elemento vazio. O expoente P é o fator da norma-P, σ_i^{vm} é a tensão de von Mises no centróide dos elementos e N_i é o número total de elementos na estrutura.

2.1 Análise de elementos finitos

A estrutura é discretizada por uma malha de elementos finitos e submetida a uma carga estática para avaliar a tensão dos elementos. O equilíbrio da estrutura é descrito pela Eq. (2),

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}\mathbf{U}, \quad (2)$$

onde \mathbf{K} é a matriz de rigidez global, \mathbf{U} é o vetor de deslocamentos da estrutura e \mathbf{F} é o vetor força. A matriz de rigidez global é montada de acordo com a Eq. (3).

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^{N_i} x_i^q \mathbf{K}_i^0, \quad (3)$$

onde \mathbf{K}_i^0 é a matriz de rigidez do elemento sólido e q é o expoente de penalização; $q = 3$ é adotado nesta equação. O tensor de tensões de cada elemento é dado pela Eq. (4),

$$\boldsymbol{\sigma}_i = \mathbf{D}_i \mathbf{B}_i \mathbf{u}_i = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}\}, \quad (4)$$

onde \mathbf{D}_i é a matriz constitutiva do material, \mathbf{B}_i é a matriz deformação-deslocamento e \mathbf{u}_i é o vetor de deslocamentos de cada elemento. Empregando o modelo de material sólido isotrópico com penalização (SIMP) para interpolar o material e considerando o estado plano de tensões, \mathbf{D}_i é calculado conforme a Eq. (5),

$$\mathbf{D}_i = \frac{E^0 x_i^q}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

onde E^0 e ν são, respectivamente, o módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson. Nesta equação foi considerado $q = 1$.

A matriz \mathbf{B}_i para o elemento bilinear quadrado de quatro nós é calculada conforme a Eq. (6),

$$\mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} & \frac{\partial N_4}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

onde N_i são as funções de forma do elemento, dadas pela Eq. (7),

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,25(1-\xi_1)(1-\xi_2) \\ 0,25(1+\xi_1)(1-\xi_2) \\ 0,25(1+\xi_1)(1+\xi_2) \\ 0,25(1-\xi_1-\xi_2) \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Finalmente, a tensão de von Mises pode ser determinada por meio da Eq. (8),

$$\sigma_i^{vm} = \left(\sigma_{ix}^2 - \sigma_{ix} \sigma_{iy} + \sigma_{iy}^2 + 3\tau_{ixy}^2 \right)^{0.5}. \quad (8)$$

2.2 Análise de sensibilidade

A determinação de como a estrutura deve ser modificada é realizada com base em uma estimativa de como a função objetivo se comporta diante da remoção ou adição dos elementos. Para tanto, é calculada a derivada desta função em relação a cada elemento, sabendo que estes

são tratados como variáveis de projeto, que representa neste caso a variação esperada do valor da tensão da estrutura, que ocorre quando um dado elemento é removido ou adicionado.

Conforme Nabaki et al. (2019), pela característica de minimização deste problema a sensibilidade do elemento, α_i , é determinado pelo gradiente negativo da tensão da norma-P, conforme expresso pela Eq. (9),

$$\alpha_i = -\frac{\partial \sigma_G^{PN}(x)}{\partial x_i} = -\left[\frac{\partial \sigma_G^{PN}(x)}{\partial \sigma_i^{vm}} \left(\frac{\partial \sigma_i^{vm}(x)}{\partial \sigma_i} \right)^T \frac{\partial \mathbf{D}(x)}{\partial x_i} \mathbf{B}\mathbf{u} - \lambda^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}(x)}{\partial x_i} \mathbf{u} \right) \right]. \quad (9)$$

O vetor contendo a variável adjunta λ é definido pela Eq. (10),

$$\lambda^T = \frac{\partial \sigma_G^{PN}(x)}{\partial \sigma_i^{vm}} \left(\frac{\partial \sigma_i^{vm}(x)}{\partial \sigma_i} \right)^T \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{K}^{-1}, \quad (10)$$

e pode ser resolvido pelo sistema da Eq. (11),

$$\mathbf{K}\lambda = \frac{\partial \sigma_G^{PN}(x)}{\partial \sigma_i^{vm}} \mathbf{B}^T \mathbf{D}^T \frac{\partial \sigma_i^{vm}(x)}{\partial \sigma_i}. \quad (11)$$

2.3 Otimização estrutural evolucionária bidirecional

O método BESO começa com uma arquitetura inicial e com um esquema de iteração, o volume vai gradualmente sendo alterado em direção ao volume desejado, observando o quesito sensibilidade. Mas antes de dar início ao processo de remoção e adição dos elementos, é necessário determinar a fração de volume para a próxima iteração, que poderá aumentar ou diminuir, até que se atinja a fração do volume desejado, dentro de uma tolerância pré-estabelecida.

A taxa evolucionária ER , que é um parâmetro de entrada do algoritmo de otimização, tem sua importância no controle na variação do volume das iterações subsequentes, conforme a Eq. (12), onde V_k se refere à fração do volume alvo da k -ésima iteração, e V_{k-1} da iteração anterior,

$$V_k = V_{k-1}(1 - ER). \quad (12)$$

Em cada iteração, após o cálculo da sensibilidade elementar α_i , os elementos passam por um processo de filtragem definido pelo parâmetro do raio mínimo de filtragem r_{min} , cujo procedimento é dado a seguir. Em cada nó j da malha é calculado uma sensibilidade nodal auxiliar α_j^n , que leva em consideração todos os M elementos conectados ao j -ésimo nó de acordo com a Eq. (13), onde os pesos w_i são detalhados pela Eq. (14) e r_{ij} é a distância entre o j -ésimo nó e o i -ésimo elemento,

$$\alpha_j^n = \sum_{i=1}^M w_i \alpha_i, \quad (13)$$

$$w_i = \frac{1}{M-1} \left(1 - \frac{r_{ij}}{\sum_{i=1}^M r_{ij}} \right). \quad (14)$$

Por fim, as sensibilidades nodais são projetadas por todos os K nós localizados dentro do

subdomínio com raio r_{min} centralizado em cada elemento da malha através das Eqs. (15) e (16), tal que sejam por fim obtidas as sensibilidades filtradas de cada elemento da malha original. Este filtro, originalmente detalhado por Huang e Xie (2010) tem como finalidade garantir uma independência da malha nos resultados obtidos, além de evitar possíveis problemas do tipo “tabuleiro de xadrez” nas topologias finais.

$$\alpha_i = \frac{\sum_{j=1}^K w(r_{ij}) \alpha_j^n}{\sum_{j=1}^K w(r_{ij})}, \quad (15)$$

$$w(r_{ij}) = r_{min} - r_{ij} \quad (j = 1, 2, \dots, K). \quad (16)$$

Após o processo de filtragem, os elementos são por fim ordenados de acordo com os valores de seus números de sensibilidade de forma decrescente. No processo de atualização, um limite de sensibilidade $\tilde{\alpha}_{del}^{ath}$ é adotado para a remoção dos elementos, e outro $\tilde{\alpha}_{add}^{ath}$ para a inserção, tal que elementos sólidos com o número de sensibilidade mais baixa do que o limite, conforme a condição da Eq. (17), poderão ser alterados para vazios atribuindo $x = x_{min}$; já elementos vazios com o número de sensibilidade acima do limite, conforme condição da Eq. (18), poderão ser alterados para sólidos atribuindo $x = 1$. A fim de se evitar instabilidades numéricas, um x_{min} muito pequeno (e.g. 10^{-3}) pode ser utilizado,

$$\tilde{\alpha}_i \leq \alpha_{th}, \quad (17)$$

$$\tilde{\alpha}_i > \alpha_{th}. \quad (18)$$

Uma vez alcançado o volume prescrito V^* , ou seja, a fração do domínio ocupada pela estrutura, conforme a Eq. (1), o processo de adição/remoção de elementos continuará na busca pela minimização da tensão, até que não haja variação significativa na tensão máxima durante as últimas 10 iterações, adotando-se um erro máximo permitido, conforme a Eq. (19),

$$erro = \frac{\left| \sum_{i=1}^N (\sigma_{max,k-i+1} - \sigma_{max,k-N-i+1}) \right|}{\sum_{i=1}^{Ni} \sigma_{max,k-i+1}} \leq 0.01, \quad (19)$$

onde σ_{max} é a tensão de von Mises máxima e N um número inteiro, onde foi adotado 5. O fluxograma apresentado na Figura 1, descreve o procedimento evolucionário do BESO que foi implementado no Matlab.

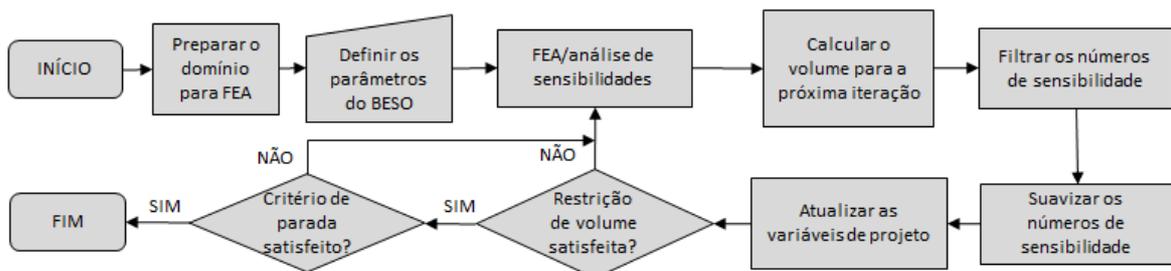


Figura 1: Fluxograma de procedimentos do BESO.

3 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Nesta seção, o método descrito acima foi aplicado a exemplos numéricos em 2D submetidos a minimização de tensões com restrição de volume. Os domínios foram discretizados com elementos quadriláteros bilineares (Q4) considerando o estado plano de tensões. O módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson são, respectivamente, $E = 1$ MPa e $\nu = 0,3$. A influência dos parâmetros do BESO foi avaliada para dois casos apresentados por Xia et al. (2018). Diferentes combinações de parâmetros como ER , P e r_{min} foram testadas para ambos os exemplos. Para fins de comparação da máxima tensão de von Mises, os dois problemas também foram resolvidos pelo método da minimização de flexibilidade.

3.1 Viga em balanço com carga distribuída na extremidade

A viga apresentada na Figura 2 foi submetida a uma carga de 5 N distribuída sobre 10 nós no topo da extremidade direita enquanto a extremidade esquerda encontra-se engastada. A estrutura possui espessura de 1 mm e esta discretizada por 20000 elementos com 1 mm de lado.

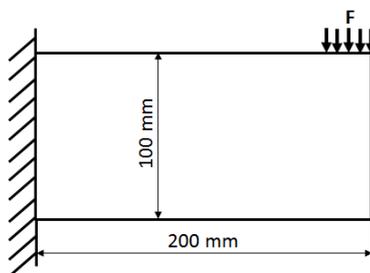


Figura 2: Viga em balanço com carga distribuída.

A Figura 3 apresenta o histórico de otimização ao lado da topologia obtida pela minimização de flexibilidade e também a máxima tensão de von Mises resultante deste método. Os parâmetros utilizados para raio de filtragem, taxa de evolução e o volume especificado foram, respectivamente, $r_{min} = 5$ mm, $ER = 0,02$ e $V^* = 0,5$.

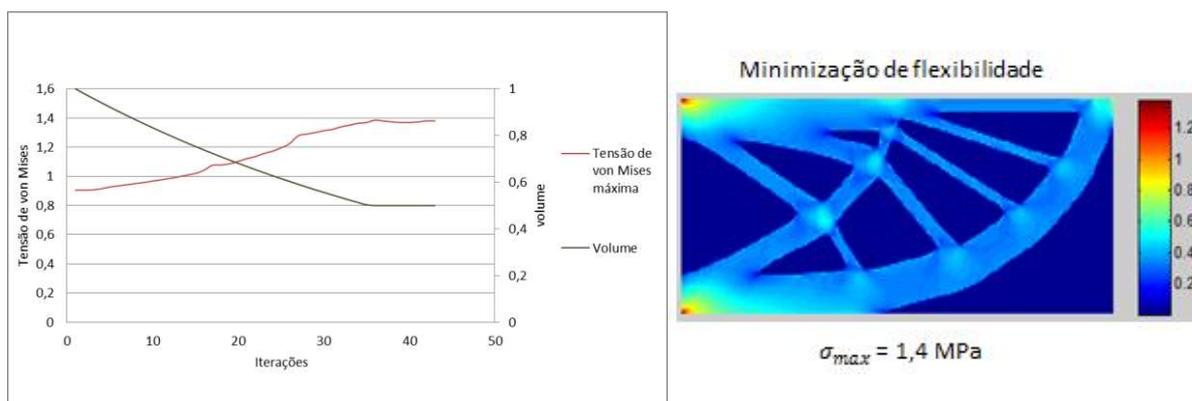


Figura 3: Histórico de otimização e resultados obtidos por minimização de flexibilidade.

Na Figura 4 são comparados os resultados obtidos pela minimização de tensão variando os parâmetros de raios de filtragem e as taxas de evolução, estão apresentadas as topologias obtidas, o valor da tensão máxima de von Mises (σ_{max}) e o número de iterações realizadas (Iter). O volume especificado e o fator da norma-P utilizados são, respectivamente, $V^* = 0,5$ e $P = 4$.

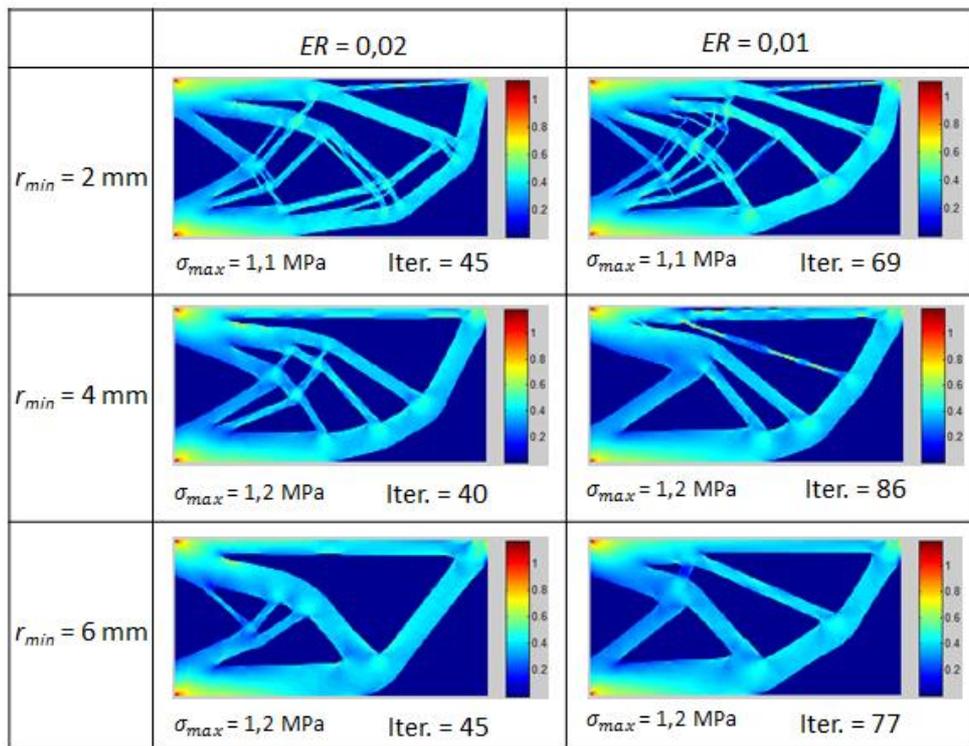


Figura 4: Resultados de minimização de tensão com variação de r_{min} e ER .

Em seguida, avaliou-se a influência da taxa de evolução e do fator da norma-P considerando um raio de filtragem de 6 mm. Os resultados estão ilustrados na Figura 5.

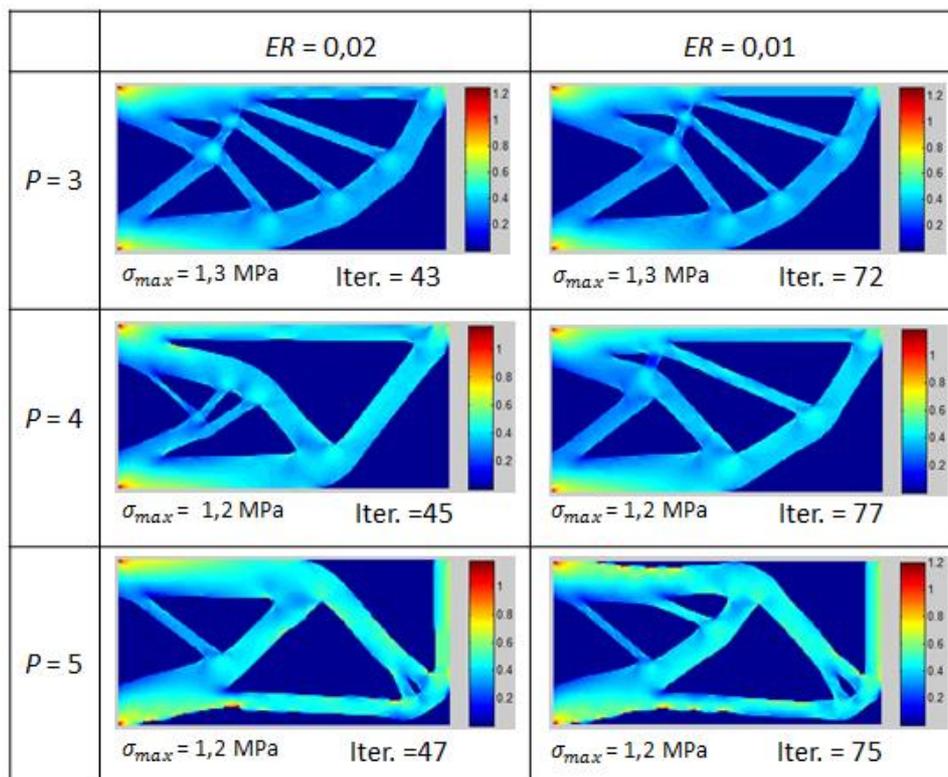


Figura 5: Resultados de minimização de tensão com variação de ER e P .

3.2 Viga bi-apoiada com uma trinca

A viga bi-apoiada apresentada na Figura 6 foi submetida a uma carga de 10 N distribuída sobre os 11 nós centrais da face superior da viga. A viga possui uma espessura de 1 mm e seu domínio foi discretizado por 10800 elementos com 1 mm de lado.

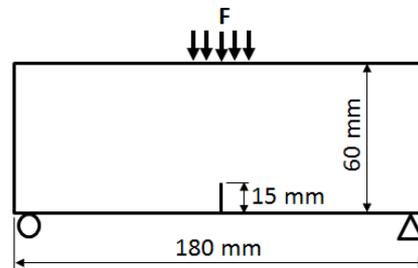


Figura 6: Viga bi-apoiada com uma trinca.

Os resultados obtidos por minimização de flexibilidade são apresentados na Figura 7, juntamente com o histórico de otimização. O raio de filtragem, taxa de evolução e o volume especificado foram, respectivamente, $r_{min} = 4$ mm, $ER = 0,02$ e $V^* = 0,5$.

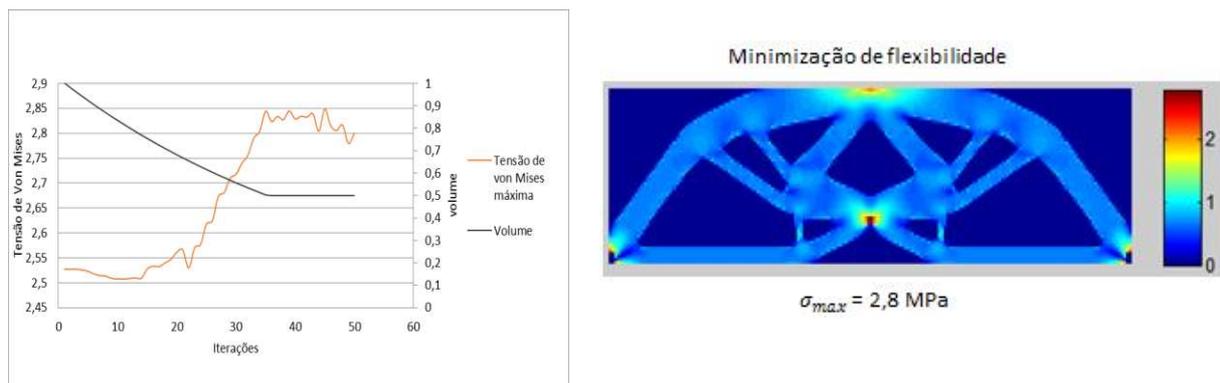


Figura 7: Histórico de otimização e resultados obtidos por minimização de flexibilidade.

Os resultados pela minimização de tensão considerando-se as variações da taxa de evolução e do raio de filtragem estão expostos na Figura 8. O volume especificado e o fator da norma-P utilizados são, respectivamente, $V^* = 0,5$ e $P = 4$.

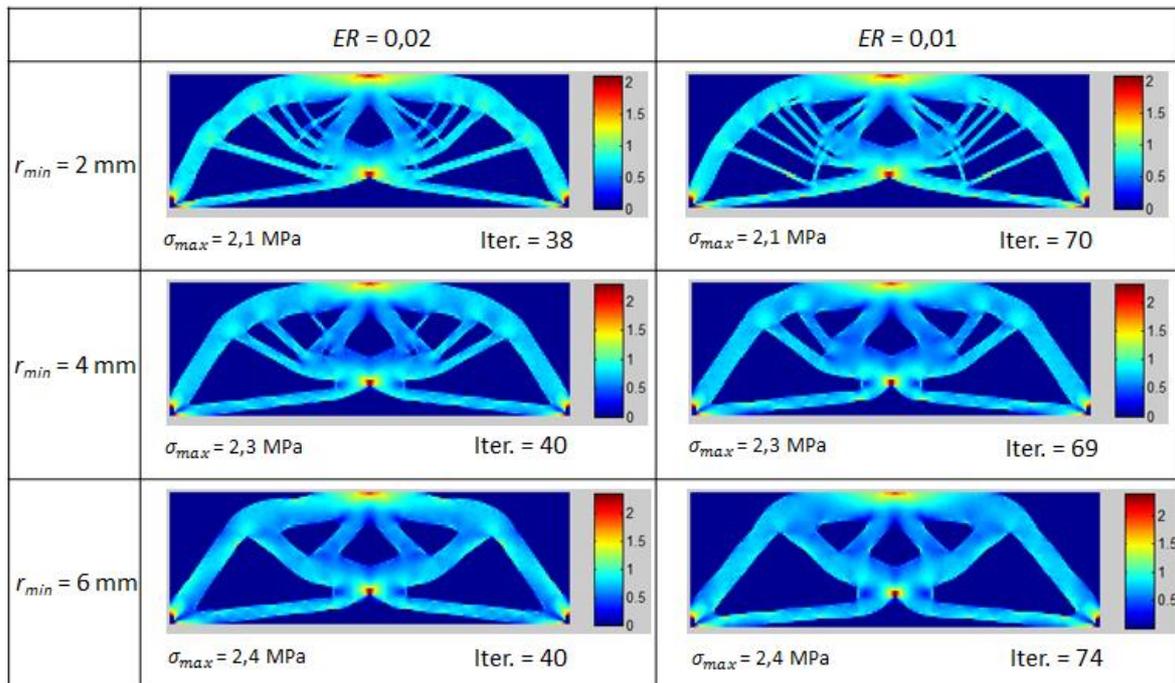


Figura 8: Resultados de minimização de tensão com variação de r_{min} e ER .

Por fim, avaliou-se a influência da taxa de evolução e o fator da norma-P considerando um raio de filtragem de 6 mm. Os resultados obtidos estão ilustrados na Figura 9.

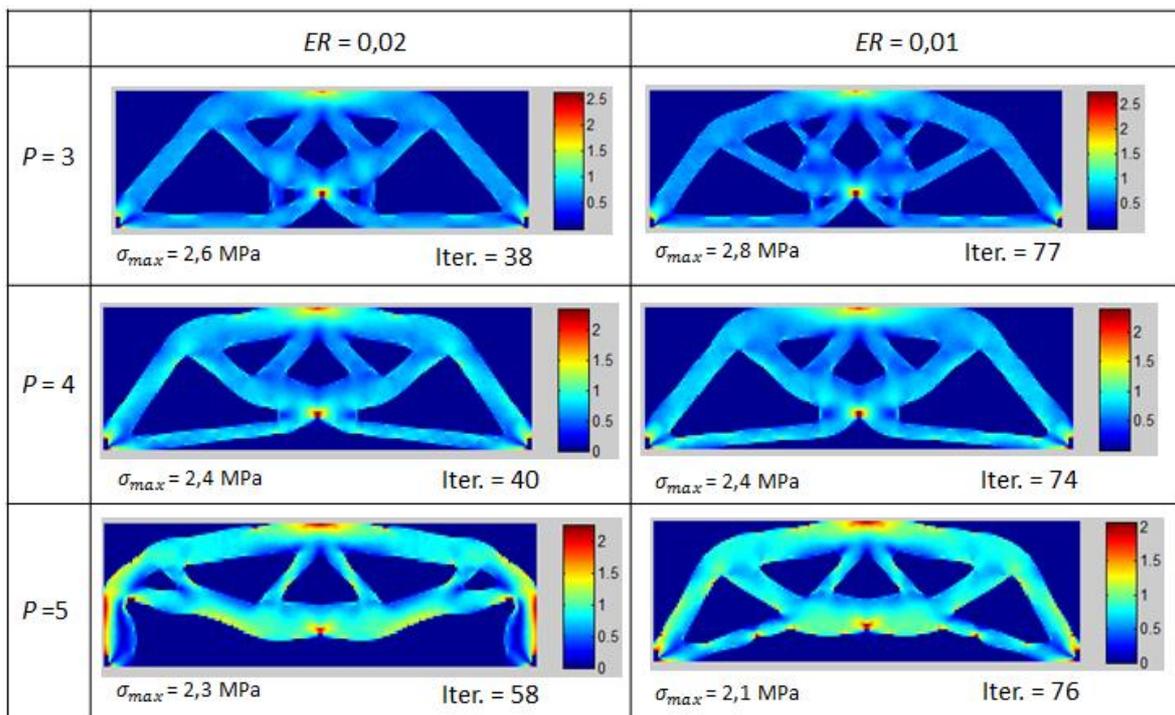


Figura 9: Resultados de minimização de tensão com variação de ER e P .

4 CONCLUSÕES

O código implementado possibilitou a avaliação dos principais parâmetros numéricos do método BESO, onde foram estudadas as suas influencias em duas estruturas distintas. Em

ambos os casos, verificou-se que os menores valores de tensão máxima encontrados nas estruturas foram obtidos com a utilização dos menores raios de filtragem. A taxa de evolução, além do maior custo computacional, demonstrou maior influência na topologia do que nos valores de tensão máxima. O fator da norma-P apresentou efeitos nos resultados finais, tanto na topologia quanto nos resultados de tensão. De um modo geral, pode-se concluir que uma boa avaliação dos parâmetros de entrada pode proporcionar a obtenção de uma estrutura otimizada mais adequada para manufatura.

5 AGRADECIMENTOS

O segundo autor agradece o suporte concedido pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS) através da subvenção à pesquisa da PROPESQ. O terceiro autor agradece o suporte financeiro concedido pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq N°. 148895/2016-6).

REFERÊNCIAS

- Deaton, J.D., e Grandhi, R. V., A survey of structural and multidisciplinary continuum topology optimization: post 2000. *Structural Multidisciplinary Optimization*, 49:1–38, 2014.
- Huang, X., e Xie, Y. M., *Evolutionary Topology Optimization of Continuum Structures: Methods and Applications*. John Wiley & Sons. Chichester, 1st edition, 2010.
- Le, C., Norato, J.A., Bruns, T., Ha, C., e Tortorelli, D., Stress-based topology optimization for continua. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 41(4): 605–620, 2010.
- Nabaki, K., Shen, J., e Huang, X., Stress minimization of structures based on bidirectional evolutionary procedure. *Journal of Structural Engineering*, 145: 605–620, 2019.
- Sigmund, O., Gersborg-Hansen, A., e Habe, R.B. A topology optimization for Multiphysics problems: A future FEMLAB application? *Nordic Matlab Conference (NMC2003)*, p. 237-242, 2003.
- Xia, L., Zhang, L., Xia, Q. and Shi, T., Stress-based topology optimization using bi-directional evolutionary structural optimization method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 333:356–370, 2018.