

## UNA FORMULACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS INVERSOS BASADA EN MEDIDAS EULERIANAS

### AN INVERSE FINITE ELEMENT METHOD BASED ON EULERIAN MEASURES

**Fernando G. Flores<sup>a</sup>, Victor Fachinotti<sup>b</sup> y Alejandro Albanesi<sup>b</sup>**

<sup>a</sup>*Instituto de Estudios Avanzados en Ingeniería y Tecnología (IDIT) UNC-CONICET, y Departamento de Estructuras, FCEFYN, Universidad Nacional de Córdoba, Av. Velez Sarsfield 1611, 5016 Córdoba, Argentina. fernando.flores@unc.edu.ar, <http://www.inv.idit.efn.uncor.edu>*

<sup>b</sup>*Centro de Investigación de Métodos Computacionales (CIMEC), Universidad Nacional del Litoral (UNL)/ CONICET, Predio CONICET Dr. Alberto Cassano", Colectora Ruta Nac. 168 km 0, Paraje El Pozo, CP 3000, Santa Fe, Argentina.*

**Palabras clave:** Método Inverso, Elementos Finitos, Medidas Eulerianas

**Resumen:** En este trabajo se presenta una formulación para el tratamiento de problemas inversos elásticos. Es decir al problema de dada una configuración deformada y un estado de carga obtener la configuración original. La hipótesis principal es que el material es isótropo. La ventaja principal es que las medidas de deformación y tensión y las integrales se escriben sobre la configuración deformada (fija) por lo cual muchas de las operaciones numéricas se realizan al comienzo del proceso. Se muestra como implementar la formulación en elementos finitos estándar en 2 y 3 dimensiones. Se presenta dos ejemplos que muestran la calidad de los resultados que se obtienen y las excelentes propiedades de convergencia.

**Keywords:** Keywords: Inverse Method, Finite Elements, Eulerian Measures.

**Abstract:** In this paper a formulation for the treatment of inverse elastic problems is presented. I.e. to get the original configuration given a deformed configuration and a state of loads. The main hypothesis is that the material is isotropic. The principal advantage is that strain and stress measurements and integrals are written on the deformed (fixed) configuration so many of the numerical operations are performed at the beginning of the process. It is shown how to implement present formulation in standard two and three dimensional finite elements. Two examples are presented showing the quality of the results obtained and the excellent convergence properties.

## 1. INTRODUCCIÓN

El método de elementos finitos inverso (IFEM de su acrónimo en inglés) es la aplicación del método de elementos finitos (FEM de su acrónimo en inglés) para la obtención la geometría indeformada de un cuerpo cuya configuración deformada y solicitaciones actuantes es conocida. Esto es principalmente de interés en estructuras esbeltas donde los desplazamientos y rotaciones son relativamente grandes y también en materiales con grandes deformaciones elásticas como elastómeros y tejidos vivos. Este problema de diseño y/o análisis inverso puede ser extremadamente complejo, puede no tener solución o no tener solución única. La complejidad del problema dependerá de las hipótesis de trabajo incluyendo que: la configuración deformada corresponda a un estado poscrítico, el comportamiento no lineal del material constitutivo y las condiciones cinemáticas de contorno e interacción con otros cuerpos (contacto). Una revisión de las formulaciones para el abordaje de este tipo de problemas puede verse en [Lu y Li \(2016\)](#), donde se estudia la equivalencia entre las formulaciones directa e inversa y se establecen condiciones para los casos de material isótropo y anisótropo. En este trabajo nos limitaremos al caso de un material isótropo elástico y condiciones de contorno cinemáticas homogéneas. El objetivo del trabajo es mostrar una implementación sencilla de materiales elásticos isótropos con pequeñas o grandes deformaciones en elementos de sólido estándar, como un paso previo para el abordaje de materiales anisótropos.

## 2. MÉTODO INVERSO

Conocida la forma espacial (deformada final)  $\mathbf{x}$  bajo un campo de fuerzas másicas  $\mathbf{m}(\mathbf{x})$  en  $\Omega$ , fuerzas  $\mathbf{t}(\mathbf{x})$  sobre el contorno  $\delta\Omega_t$ , condiciones de contorno esenciales homogéneas  $\mathbf{X} = \mathbf{x}$  en  $\delta\Omega_d$ , se requiere obtener la configuración original (indeformada)  $\mathbf{X}(\mathbf{x})$ . Las deformaciones locales se pueden escribir en función del gradiente de la deformación  $\mathbf{F}$  o su inversa

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \quad \text{o} \quad \mathbf{F}^{-1} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{f} \quad (1)$$

donde la segunda expresión es la que resulta de evaluación directa pues  $\mathbf{x}$  es conocido (fijo) y  $\mathbf{X}$  es la incógnita a determinar (variable). Los desplazamientos y sus variaciones por definición son

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{x} - \mathbf{X} \\ \delta \mathbf{u} &= \delta \mathbf{x} \end{aligned} \quad (2)$$

la última resulta necesaria para el planteo del equilibrio aunque  $\mathbf{x}$  sea fijo.

La medida de deformación material mas sencilla para trabajar en formulaciones con grandes desplazamientos elásticos es el tensor de deformaciones de Green Lagrange (en función del gradiente de la deformación  $\mathbf{F}$  o el tensor de deformación derecho de Cauchy-Green  $\mathbf{C}$ )

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} [\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}] = \frac{1}{2} [\mathbf{C} - \mathbf{1}] \quad (3)$$

Como medida de deformación espacial e se puede usar al tensor de Almansi que es el “push-forward” del tensor de deformaciones de Green-Lagrange

$$\mathbf{e} = \mathbf{F}^{-T} \mathbf{E} \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^{-T} \frac{1}{2} [\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{1}] \mathbf{F}^{-1} \quad (4)$$

$$= \frac{1}{2} [\mathbf{1} - \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1}] \quad (5)$$

$$= \frac{1}{2} [\mathbf{1} - \mathbf{b}^{-1}] \quad (6)$$

$$= \frac{1}{2} [\mathbf{1} - \mathbf{V}^{-2}] \quad (7)$$

donde se ha definido el tensor de deformación izquierdo de Cauchy-Green  $\mathbf{b}$  y el tensor de estiramiento izquierdo  $\mathbf{V}$  proveniente de la descomposición polar  $\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R}$ . Por supuesto no son las únicas posibilidades, a partir de los autovalores  $\lambda_i$  de  $\mathbf{U}$  y  $\mathbf{V}$  y sus autovectores  $\mathbf{r}_i$  y  $\mathbf{l}_i$  (relacionados por  $\mathbf{l}_i = \mathbf{R}\mathbf{r}_i$ ) se puede por ejemplo definir el tensor de deformación logarítmico tanto en la configuración material como la espacial, lo cual permite utilizar la misma medida de deformación en ambas configuraciones.

$$\mathbf{E}_{ln} = \sum_{i=1}^3 \ln(\lambda_i) \mathbf{r}_i \mathbf{r}_i^T \quad (8)$$

$$\mathbf{e}_{ln} = \sum_{i=1}^3 \ln(\lambda_i) \mathbf{l}_i \mathbf{l}_i^T \quad (9)$$

$$\mathbf{e}_{ln} = \mathbf{R} \mathbf{E}_{ln} \mathbf{R}^T \quad (10)$$

Para los problemas de elevada esbeltez donde el material es elástico lineal en pequeñas deformaciones, es posible utilizar ecuaciones constitutivas que relacionan una medida de tensión  $\mathbf{s}$  (que puede asociarse con el tensor de tensiones de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  o también con el de Kirchoff  $\boldsymbol{\tau}$ ) con las deformaciones de Almansi  $\mathbf{e}$  a través de la misma relación constitutiva  $\mathbf{c} = \mathbf{C}$  que se usa entre el 2do tensor de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{S}$  y las deformaciones de Green-Lagrange  $\mathbf{E}$ , lo cual permite simplificar un poco la formulación,

$$\mathbf{s} = \mathbf{c} \mathbf{e} \quad (11)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{C} \mathbf{E} \quad (12)$$

Esta simplificación puede usarse incluso para materiales ortótropos si se tiene cuidado en una adecuada definición de los sistemas locales donde se definen las deformaciones. Si bien las formulaciones directa e inversa no resultan en tal caso equivalentes, desde el punto de vista ingenieril los errores asociados resultan de importancia menor. La ecuación constitutiva (11) basada en deformaciones pequeñas requiere para materiales anisótropos y para elementos estructurales una adecuada elección del sistema local sobre la geometría deformada en la cual evaluar sus componentes.

Por otra parte si se trabaja con modelos materiales en grandes deformaciones elásticas (elastómeros), la medida de tensión a utilizar es  $\boldsymbol{\tau}$ , que se puede obtener a partir de la energía interna de deformación  $w$  usando la fórmula de Doyle-Ericksen

$$\boldsymbol{\tau} = 2 \frac{\partial w}{\partial \mathbf{b}} \mathbf{b} \quad (13)$$

Las ecuaciones de balance (equilibrio) pueden obtenerse a partir del principio de mínima energía potencial total. La energía interna de deformación por unidad de volumen original  $v_0$  para un material elástico y lineal se escribe para un material elástico lineal como

$$w_0 = \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbf{S} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{e} \mathbf{F}) : \mathbf{S} = \frac{1}{2} \mathbf{e} : (\mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T) = \frac{1}{2} \mathbf{e} : \boldsymbol{\tau} = \frac{v}{v_0} \frac{1}{2} \mathbf{e} : \boldsymbol{\sigma} \quad (14)$$

luego la energía interna de deformación responde a

$$W(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \mathbf{S} : \mathbf{E} d\Omega_0 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{e} d\Omega \quad (15)$$

en tanto que el potencial de fuerzas externas debidas a fuerzas másicas  $\mathbf{m}$  por unidad de volumen y fuerzas de superficie  $\mathbf{t}$  a

$$V(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{m} d\Omega + \int_{\delta\Omega_t} \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} d\delta\Omega \quad (16)$$

que permiten definir la energía potencial total

$$\pi(\mathbf{u}) = W(\mathbf{u}) - V(\mathbf{u}). \quad (17)$$

En general las integrales anteriores se refieren a la configuración original del sólido, sin embargo el cambio volumétrico en el dominio de integración no resulta particularmente relevante en la mayoría de los materiales de interés, es decir la relación  $\frac{v}{v_0} \cong 1$ . Por otro lado la integral de volumen puede corregirse en forma iterativa en función del valor de  $\frac{v}{v_0}$  en cada punto de integración.

La ecuación de equilibrio (condición de estacionario) resulta

$$\delta\pi(\mathbf{u}) = \delta W(\mathbf{u}) - \delta V(\mathbf{u}) = 0 \quad (18)$$

Observar que

$$\delta w_0 = (\mathbf{F}^T \nabla_{\mathbf{x}} \delta \mathbf{u}) : \mathbf{S} = (\mathbf{F}^T \nabla_{\mathbf{x}} \delta \mathbf{u} \mathbf{F}) : \mathbf{S} = \nabla_{\mathbf{x}} \delta \mathbf{u} : (\mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T) = \nabla_{\mathbf{x}}^{sim} \delta \mathbf{u} : \boldsymbol{\tau} \quad (19)$$

luego

$$\int_{\Omega} \nabla_{\mathbf{x}}^{sim} \delta \mathbf{u} : \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{m} d\Omega + \int_{\delta\Omega_t} \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} d\delta\Omega \quad (20)$$

La obtención de  $\mathbf{X}$  usando el MEF mediante técnicas de Newton-Raphson (predictor-corrector) implica escribir las ecuaciones de equilibrio (20) (pasando a notación de Voigt)

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{r}(\mathbf{X}) &= - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{B}_0^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{m} d\Omega + \int_{\delta\Omega_f} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{f} d\delta\Omega = 0 \\ &= -\delta \mathbf{u}^T \mathbf{g}(\mathbf{X}) + \delta \mathbf{u}^T \mathbf{g}_{ext} = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

como una primera aproximación en serie de Taylor:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{r}(\mathbf{X} + \Delta \mathbf{X}) &= \delta \mathbf{u}^T \mathbf{r}(\mathbf{X}) + \frac{\partial [\delta \mathbf{u}^T \mathbf{r}(\mathbf{X})]}{\partial \mathbf{X}} \Delta \mathbf{X} = 0 \\ \frac{\partial [\delta \mathbf{u}^T \mathbf{r}(\mathbf{X})]}{\partial \mathbf{X}} \Delta \mathbf{X} &= -\delta \mathbf{u}^T \mathbf{r}(\mathbf{X}) \\ \mathbf{K}_T \Delta \mathbf{X} &= -\mathbf{r}(\mathbf{X}) = \mathbf{g}(\mathbf{X}) - \mathbf{g}_{ext} \end{aligned} \quad (22)$$

donde se ha definido

$$\mathbf{B}_0 \delta \mathbf{u} = \nabla_{\mathbf{x}}^{sim} \delta \mathbf{u} \quad (23)$$

En este caso

$$\begin{aligned} \frac{\partial [\delta \mathbf{u}^T \mathbf{r}(\mathbf{X})]}{\partial \mathbf{X}} \Delta \mathbf{X} &= - \frac{\partial [\delta \mathbf{u}^T \mathbf{g}(\mathbf{X})]}{\partial \mathbf{X}} \Delta \mathbf{X} \\ &= - \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \{ \delta \mathbf{u}^T \mathbf{B}_0^T \boldsymbol{\sigma} \} \Delta \mathbf{X} d\Omega \end{aligned} \quad (24)$$

$$= - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{B}_0^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{X}} \Delta \mathbf{X} d\Omega \quad (25)$$

$$\begin{aligned} &- \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial \delta \mathbf{u}^T \mathbf{B}_0^T}{\partial \mathbf{X}} \Delta \mathbf{X} \right] \boldsymbol{\sigma} d\Omega \\ &= \delta \mathbf{u}^T [\mathbf{K}_M + \mathbf{K}_G] \Delta \mathbf{X} \end{aligned} \quad (26)$$

donde

$$- \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{X}} \Delta \mathbf{X} = - \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \mathbf{e}} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \mathbf{X}} \Delta \mathbf{X} = \mathbf{c} [\mathbf{F}^{-T} \nabla_{\mathbf{x}} \Delta \mathbf{X}]^{sim} = \mathbf{cB} \Delta \mathbf{X} \quad (27)$$

$$\frac{\partial (\delta \mathbf{u}^T \mathbf{B}_0^T)}{\partial \mathbf{X}} \Delta \mathbf{X} = \mathbf{0} \quad (28)$$

luego

$$- \frac{\partial [\delta \mathbf{u}^T \mathbf{g}(\mathbf{X})]}{\partial \mathbf{X}} \Delta \mathbf{X} = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{B}_0^T \mathbf{cB} \Delta \mathbf{X} d\Omega \quad (29)$$

por lo cual la matriz material tangente resulta no simétrica y la matriz geométrica es nula. Lo cual ocurre por las siguientes razones:

- la no simetría de la matriz material resulta de que se plantea el equilibrio en un sistema  $\mathbf{x}(\delta \mathbf{u})$  y las incógnitas se buscan en otro  $\mathbf{X}(\Delta \mathbf{X})$ . Por otro lado en el caso de elasticidad no-lineal la relación constitutiva tangente  $\mathbf{c}$  conduce a una matriz no simétrica
- que la matriz geométrica sea nula, resulta de que al estar fija la configuración donde se plantea el equilibrio, la dirección de las tensiones  $\boldsymbol{\sigma}$  es fija, es decir no rotan.

Observar que inicialmente la matriz  $\mathbf{K}_M$  es simétrica y que en (22) las cargas externas tienen el signo cambiado, por lo que los incrementos  $\Delta \mathbf{X}$  serán inicialmente opuestos a las cargas como es de esperar.

### 3. FORMULACIÓN DEL ELEMENTO DE SÓLIDO

Se trabaja sobre elementos de sólido en dos (cuadriláteros  $NN = 4$ ) y tres (hexaedros  $NN = 8$ ) dimensiones donde  $NN$  es el número de nudos. Las geometrías inicial y deformada del elemento están descritas por las aproximaciones isoparamétricas estándar

$$\mathbf{X}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{I=1}^{NN} N^I(\boldsymbol{\xi}) \mathbf{X}^I = \sum_{I=1}^{NN} N^I(\boldsymbol{\xi}) (\mathbf{x}^I - \mathbf{u}^I) \quad (30)$$

donde  $\mathbf{X}^I$ ,  $\mathbf{x}^I$ , y  $\mathbf{u}^I$  son respectivamente las coordenadas materiales (incógnitas), coordenadas espaciales (fijas) y desplazamientos del nudo  $I$ . Las funciones de forma  $N^I(\boldsymbol{\xi})$  son las habituales funciones de forma Lagrangeanas en función de las coordenadas locales  $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta, \zeta)$  del elemento maestro correspondiente. La evaluación de las derivadas cartesianas del mapeamiento se realiza en forma estándar, definiendo la matriz jacobiana en cada punto de integración

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \quad (31)$$

$$N_{,x}^I = \mathbf{J}^{-1} N_{,\xi}^I \quad (32)$$

En cada punto de interés del elemento se define un sistema cartesiano local, que puede ser coincidente con las direcciones principales de ortotropía del material u otra condición conveniente, para el caso tridimensional tiene la forma

$$\mathbf{T} = [\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3] \quad (33)$$

de tal forma que las derivadas cartesianas referidas a este sistema ( $\mathbf{y}$ ) resultan

$$N_{,y}^I = \mathbf{T}^T N_{,x}^I \quad (34)$$

lo que permite evaluar la inversa del gradiente de deformación  $\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{f}$  en función de las coordenadas actuales de los nudos

$$f_{ij} = \sum_{I=1}^{NN} N_{,y_j}^I X_i^I \quad (35)$$

y las componentes del tensor  $\mathbf{b}^{-1} \doteq \mathbf{d}$  (para evitar llevar el exponente  $-1$ )

$$d_{ij} = f_{ki} f_{kj} = \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}_j \quad (36)$$

A partir de las cuales se puede evaluar las componentes cartesianas del tensor de deformaciones de Almansi (índices latinos van de 1 a la dimensión del espacio considerado)

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (\delta_{ij} - d_{ij}) \quad (37)$$

### 3.1. Elemento estándar

A continuación se ejemplifica el caso 3D. Las matrices  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{B}_0$  necesarias para evaluar las fuerzas nodales equivalente en  $\mathbf{g}(\mathbf{X})$  y la matriz de rigidez tangente  $\mathbf{K}_T$  son

$$\mathbf{B} \Delta \mathbf{X}_e = \sum_{I=1}^{NN} \begin{bmatrix} N_{,1}^I \mathbf{f}_1^T \\ N_{,2}^I \mathbf{f}_2^T \\ N_{,3}^I \mathbf{f}_3^T \\ N_{,2}^I \mathbf{f}_1^T + N_{,1}^I \mathbf{f}_2^T \\ N_{,3}^I \mathbf{f}_1^T + N_{,1}^I \mathbf{f}_3^T \\ N_{,2}^I \mathbf{f}_3^T + N_{,3}^I \mathbf{f}_2^T \end{bmatrix} \Delta \mathbf{X}^I \quad (38)$$

$$\mathbf{B}_0 \delta \mathbf{u}_e = \sum_{I=1}^{NN} \begin{bmatrix} N_{,1}^I \mathbf{t}_1^T \\ N_{,2}^I \mathbf{t}_2^T \\ N_{,3}^I \mathbf{t}_3^T \\ N_{,2}^I \mathbf{t}_1^T + N_{,1}^I \mathbf{t}_2^T \\ N_{,3}^I \mathbf{t}_1^T + N_{,1}^I \mathbf{t}_3^T \\ N_{,2}^I \mathbf{t}_3^T + N_{,3}^I \mathbf{t}_2^T \end{bmatrix} \delta \mathbf{u}^I \quad (39)$$

donde las  $N_{/i}^I = \frac{\partial N^I}{\partial y_i}$  son las derivadas de las funciones de forma respecto al sistema local definido en (33) como se indica en (35). Notar que la matriz  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{B}_0$  puede obtenerse con la misma rutina (usando como argumento  $\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{f}$  en el primer caso y  $\mathbf{T}$  en el segundo en vez de  $\mathbf{F}$ ) que se utiliza en el caso de que la medida de deformación utilizada fuera el tensor de deformaciones de Green-Lagrange. Las ecuaciones de equilibrio tienen la forma

$$\int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{B}_0^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{m} d\Omega + \int_{\delta\Omega_f} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{t} d\delta\Omega \quad (40)$$

y la matriz de rigidez

$$\mathbf{K}_T = \int_{\Omega} \mathbf{B}_0^T \mathbf{c} \mathbf{B}^T d\Omega \quad (41)$$

La utilización de un elemento así dentro de un código de elementos finitos (CEF) estándar con capacidad no lineal requiere:

1. Leer la geometría deformada  $\mathbf{x}$  que en el CEF se asocia naturalmente a las coordenadas iniciales del problema
2. Leer el estado de carga, que será naturalmente conservativa pues corresponde al estado final.
3. Avanzar usando el método de Newton-Raphson, notando que las incógnita es  $\mathbf{X}$  de tal forma que en cada iteración  $i$  de un paso  $n$  lo que se tendrá es un cambio  $\Delta \mathbf{X}_i^n$  por lo que la actualización implica cambiar el signo de la actualización habitual (otra opción es cambiar el signo al residuo  $\mathbf{r}(\mathbf{X})$ )

$$\mathbf{X}_i^n = {}^{n-1}\mathbf{X} + \Delta^n \mathbf{X}_i = \mathbf{X}_{i-1}^n - \Delta \mathbf{X}_i^n \quad (42)$$

donde  ${}^{n-1}\mathbf{X}$  son las coordenadas convergidas del paso anterior  $n - 1$ ,  $\mathbf{X}_i^n$  son las coordenadas iterativas en el paso  $n$  al final de la iteración  $i$  y  $\Delta \mathbf{X}_i^n$  es el incremento iterativo de la configuración original en el paso  $n$  al final de la iteración  $i$  y por lo tanto para un paso  $n$  cualquiera, el incremento en el paso es

$$\Delta^n \mathbf{X}_i = \sum_{j=0}^i \Delta \mathbf{X}_i^j \quad (43)$$

y el incremento total para un paso  $k$

$${}^k \mathbf{X} - \mathbf{x} = \sum_{n=1}^k \Delta^n \mathbf{X} = \sum_{n=1}^k \sum_i \Delta \mathbf{X}_i^n \quad (44)$$

4. hay que considerar matrices no simétricas.

A los efectos de utilizar el elemento de sólido tridimensional en problemas de láminas con grandes desplazamientos es necesario mejorar sustancialmente el comportamiento del mismo, ya sea manteniendo su condición de sólido (Flores y Oñate (2011)) es decir que requiere varios elementos en el espesor o convertirlo a elemento de sólido-lámina Flores (2016) que permite modelar la lámina con un solo elemento en el espesor.

## 4. EJEMPLOS

### 4.1. Viga en voladizo con su extremo cargado

Consideremos una viga en voladizo (Fachinotti et al. (2015)) cuyas dimensiones son longitud  $L = 10$ , ancho  $b = 1$  y espesor  $h = 0,1$ . La viga se deforma debido a una carga uniformemente distribuida sobre su extremo libre cuya resultante es  $F = 4$  en la dirección del espesor. El material es elástico lineal con propiedades  $E = 1,2 \times 10^6$  y  $\nu = 0,0$ . Considerando un elemento cuadrilátero de 4 nudos en tensión plana, se utiliza una malla estructurada uniforme de 400 elementos (100 divisiones a lo largo de la viga y 4 en el espesor). El análisis directo (MEF) conduce a un desplazamiento del centro del extremo cargado de  $v_C = 5,75$  lo cual está muy lejos de una solución convergida (6,73) debido a las limitaciones del cuadrilátero bilineal, pero a los efectos de estudiar el comportamiento de la formulación la discretización es adecuada. En la Figura 1 se muestra el contorno de la deformada del análisis directo, de la cual se parte para llegar a la geometría original en el análisis inverso. Se incluye un mapa de colores de la diferencia (módulo) entre los desplazamientos del análisis directo y el inverso. Puede verse que el máximo valor es el 0.086 % del espesor  $h$ . Por otro lado la convergencia es excelente. El análisis inverso requiere de un sólo paso y 6 iteraciones de Newton-Raphson completas.

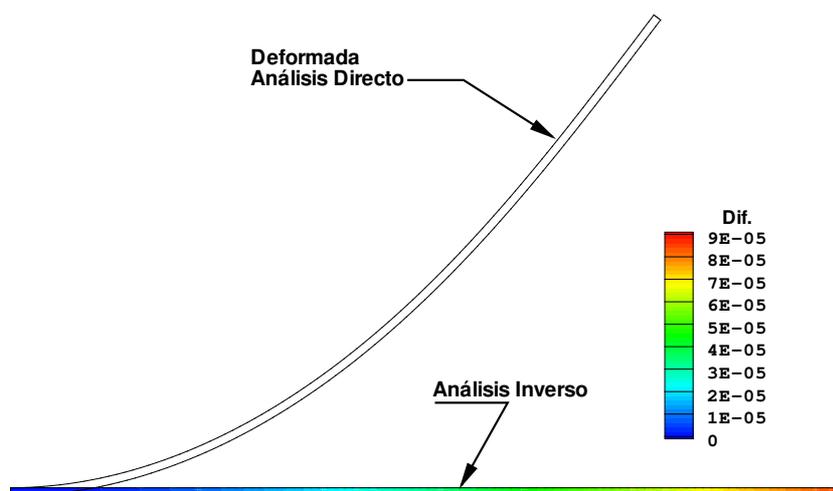


Figura 1: Viga en voladizo con carga en el extremo. Análisis inverso 2D

Por otro lado en la Figura 2 se muestra el mismo problema pero resuelto con un elemento de sólido 3D, con posibilidades de modelar lámina (Flores y Oñate (2011)) por lo cual el desplazamiento máximo vertical es 6.716 muy cercano al convergido. La malla es idéntica el caso 2D, incluye 100 elementos a lo largo del eje de la viga, cuatro en el espesor y un elemento en el semi-ancho. La convergencia se alcanza en un solo paso y 5 iteraciones.

En ambas versiones la relación constitutiva se basa en deformaciones logarítmicas en las direcciones principales de deformación por lo cual las medidas de tensión en la versión directa e inversa son equivalentes. Además en la cesión inversa se modifica el volumen de integración en forma iterativa usando el determinante de  $f$ .

### 4.2. Tracción de un elastómero

Este ejemplo intenta mostrar el comportamiento en grandes deformaciones. Una barra prismática de longitud  $L = 8\text{mm}$  y de sección cuadrada de lado  $a = 1\text{mm}$  con una relación  $L/a = 8$

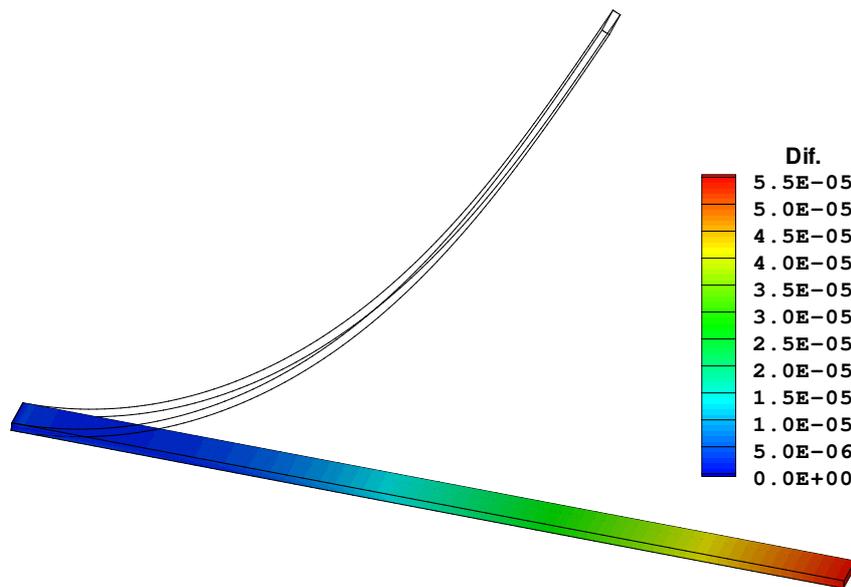


Figura 2: Viga en voladizo con carga en el extremo. Análisis inverso 3D

es sometida a tracción axial hasta duplicar su longitud inicial. La energía interna de deformación corresponde al modelo de Mooney-Rivlin

$$w = \frac{1}{2D} (J - 1)^2 + C_{10} (I_1 - 3) + C_{01} (I_2 - 3)$$

donde  $J$  es la raíz del determinante de  $\mathbf{C}$  (tensor de deformación derecho de Cauchy-Green),  $I_1$  e  $I_2$  son los 2 primeros invariantes de la componente desviadora de  $\mathbf{C}$  y los parámetros que definen el material son  $C_{10} = 0,1486[\text{MPa}]$ ,  $C_{01} = 0,4849[\text{MPa}]$  y  $D = 0,3945[\text{GPa}]^{-1}$ . La fuerza necesaria para duplicar la longitud es  $F = 1,3684\text{N}$ . En el análisis inverso se aplica dicha carga y la longitud original obtenida es igual a la objetivo hasta la sexta cifra significativa. En la Figura 3 se muestran las geometrías utilizadas (contorno) como datos en ambos análisis y las geometrías finales (sombreadas). Para el análisis se usó un único elemento de 8 nudos y la geometría final en el caso inverso se obtiene en 1 paso y 10 iteraciones. La matriz de constitutiva tangente (asimétrica) se obtiene usando una aproximación en diferencias finitas.

## 5. CONCLUSIONES

En el presente trabajo se ha presentado una formulación para el tratamiento de problemas inversos. Es decir cuando se supone conocida la configuración deformada bajo un estado de sollicitación dado y se requiere obtener la configuración original o indeformada. La presente formulación se basa en medidas de tensión y deformación definidas en la configuración espacial. La ventaja principal de esta formulación es que se trabaja directamente con la inversa del gradiente de la deformación por lo cual muchas de las operaciones numéricas se simplifican y por otro lado disminuye su número. La hipótesis principal utilizada aquí es que el material es isótropo y se usa el tensor de deformación logarítmico por lo cual las deformaciones son las mismas en ambas formulaciones y en consecuencia son equivalentes.

De los ejemplos presentados se concluye que los resultados son muy buenos y que la velocidad de convergencia es excelente.

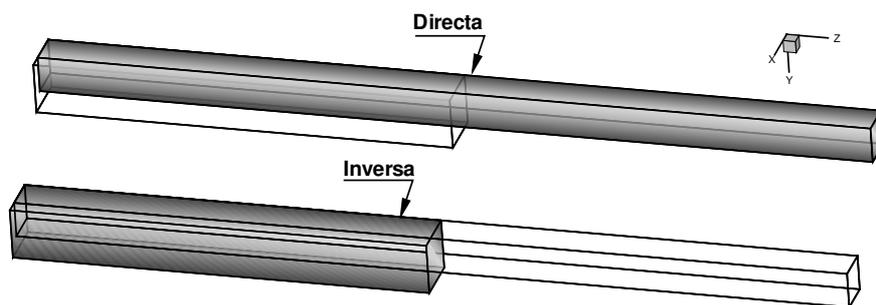


Figura 3: Tracción de un elastómero

### AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo financiero de CONICET. El primer autor además agradece el apoyo de la SeCyT-UNC.

### REFERENCIAS

- Fachinotti V., Albanesi A., y Martinez Valle J. Inverse finite element modeling of shells using the degenerate solid approach. *Computers and Structures*, 157:89–98, 2015.
- Flores F. A simple reduced integration hexahedral solid-shell element for large strains. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 303:260–287, 2016.
- Flores F. y Oñate E. Un elemento de sólido con una mejora en el comportamiento del corte transversal para el tratamiento de láminas. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 27(4):256–268, 2011.
- Lu J. y Li L. On referential and spatial formulations of inverse elastostatic analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 310:189–207, 2016.