

ESTUDIO DE LA PROPAGACIÓN DE ONDAS GUIADAS SOBRE UN RIEL FERROVIARIO FIJO

STUDY OF THE PROPAGATION OF GUIDED WAVES ON A FIXED RAIL RAIL

Javier L. Idzi^a, Marcos E. Amado^a, Fernando Gutierrez^a, Gustavo D. Saralegui^a y
Eduardo Becker Groth^b

^a*UIDET Ingeniería Aplicada en Mecánica y Electromecánica (IAME), Facultad de Ingeniería,
Universidad Nacional de La Plata. Calle 48 y 116, La Plata, Argentina, iame@ing.unlp.edu.ar.*

^b*Laboratório de Metalurgia Física LAMEF, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, BRASIL*

Palabras clave: Ondas guiadas, Riel ferroviario, Curvas de dispersión, Elementos finitos.

Resumen. La propagación de ondas elásticas en estructuras donde por lo menos una de las dimensiones es mucho mayor que las otras dos, son llamadas ondas guiadas, es un tema vinculado a técnicas de Ensayos No Destructivos. Otra de las características de los métodos de detección de daño basados en la propagación de este tipo de ondas es que permite también escanear con rapidez grandes regiones de inspección. El estudio de estas ondas es fundamental en el cálculo de las llamadas curvas de dispersión que serán específicas para cada geometría estudiada. Estas curvas de dispersión permiten describir, dada una excitación aplicada sobre la estructura en análisis, en qué ondas modales dicha excitación se va a descomponer. En este contexto en el presente trabajo se calculan las curvas de dispersión de un riel (BS85A) empotrado y fijo. Los resultados obtenidos son discutidos y los mismos permiten entender la propagación de ondas guiadas en este tipo de geometría, con este tipo de fijación, información esencial para aplicar estos conceptos en técnicas de detección de defectos con métodos no destructivos.

Keywords: Guided waves, Rail, Dispersion Curves, Finite Elements.

Abstract. The guided waves are a technique used to detect damages in structures. This technique is based in the propagations of elastic waves in 3D medium where at least one dimension is much longer than the other two, so that, it is linked whit the Non-Destructive techniques (NDT). Also, the guided waves method allows to scan quickly large inspections regions so, the study of this kind waves is very important in order to calculate the so-called dispersion curves and we will use to detect damages in structures with specific geometries included in the present study. Applying one specific excitation in the structure under study through the dispersion curves is possible to know in which modal waves this excitation is going to decompose. In the present work the dispersion curves were calculated in one rail (BS85A) recessed and fixed. The results obtained are discussed and allow us to understand the phenomenon of the propagation of the guided waves in each geometry proposed with the respective fixations.

1. INTRODUCCIÓN

La utilización de técnicas de detección de daño basadas en propagación de ondas en sólidos ha crecido en las últimas décadas gracias a la disponibilidad de instrumentos cada vez más sensibles y precisos. Para aprovechar este potencial es mandatorio conocer los fundamentos de la propagación de ondas en sólidos.

El estudiar la propagación de una guía de onda con geometría específica utilizando las curvas de dispersión permite entender qué frecuencias pueden propagar en que forma modal sobre la guía de ondas.

De esta forma se puede determinar que en perfiles con forma tubular inducir ondas torsionales permite generar perturbaciones que propagan grandes distancias con una baja dispersión, o en rieles, determinar en qué frecuencias viajan ondas por el patín o por la cabeza del riel, o procurar ondas que tengan sus componentes modales mayores en el interior de la guía disminuyendo así el amortiguamiento debido al poder disipativo del revestimiento o contactos con el medio ambiente.

Asociar la técnica de ultrasonido con la propagación de ondas guiadas tiene una buena relación costo-beneficio debido a la simplicidad y rapidez de inspección. Esta metodología permite localizar daños en estructuras inaccesibles debido a estar sumergidas, enterradas o aisladas. Esto es porque cuando se aplica una vibración que se extenderá como una onda guiada sólo se requiere una pequeña área de acceso [Rose, 2014]. En este caso, es posible, con un mismo sensor emisor receptor obtener información de defectos localizados a distancias considerables (20-30 metros), en estructuras de acero de difícil acceso. Es cierto que este tipo de metodología no permite un diagnóstico preciso de la magnitud y tipo de daño identificado, pero permite realizar una localización de potenciales regiones críticas donde deberá ser realizada una intervención con otras técnicas de Ensayo No Destructivo (END).

Los patrones de estas curvas dependen de la sección geométrica, debido fundamentalmente a la interacción de las mismas, con las fronteras del cuerpo. Estos patrones pueden ser analizados con las curvas de dispersión.

En este contexto, se presenta en este trabajo el análisis de un riel de ferrocarril, donde serán calculadas las curvas de dispersión para dicha estructura para una franja de frecuencias y un número de onda determinado, por dos métodos.

2. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Las expresiones básicas de propagación de ondas en un medio, la propagación de las ondas longitudinales en barras delgadas, la solución de D'Alembert con la cual logramos las ecuaciones fundamentales y las relaciones entre ellas, como así también la atenuación y la reflexión de ondas mecánicas fueron presentados en J L Idzi [2017], es por ello por lo que no lo introducimos en este trabajo.

La solución a la ecuación de onda encontrada por D'Alembert introduce un cambio de variables, llegando a la ecuación (1), en la que "f" y "g" son funciones arbitrarias determinadas por las condiciones iniciales o funciones de potencia de un problema específico que representan la propagación de perturbaciones [Graff, 2012].

$$y(x, t) = f(x - c_0 t) + g(x + c_0 t) \quad (1)$$

Es importante destacar que f y g representan perturbaciones que se propagan y que, independientemente de la forma de las perturbaciones, se mantienen durante la propagación. Luego las ondas se propagan sin distorsión. Para el caso particular en el que la excitación es una función armónica, el comportamiento se describe por la Ecuación (2).

$$u(x, t) = B \cos(kx - \omega t) = B \cos[k(x - c_0 t)] \quad (2)$$

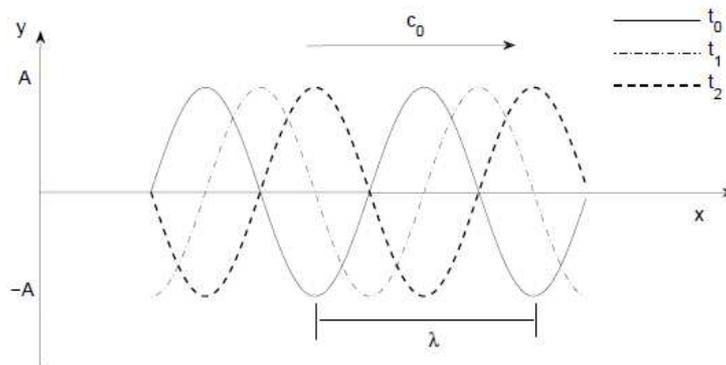


Figura 1 - Propagación de la onda.

Donde B es una constante que está relacionada con la amplitud, ω es la frecuencia angular, k es el número de onda y c_0 la velocidad de propagación de la onda. Otras relaciones importantes se pueden escribir en las siguientes formas:

$$\omega = 2\pi f \quad (2.1)$$

$$k = 2\pi/\lambda \quad (2.2)$$

$$c_0 = \omega/k \quad (2.3)$$

$$f = 1/T \quad (2.4)$$

Donde T es el periodo de la onda por segundo, λ es la longitud de onda, f es la frecuencia en [Hz].

En el caso de estructuras unidimensionales elásticas como un riel de tren, por ejemplo, la determinación de curvas de dispersión se vuelve compleja e imposible de calcular en forma analítica y para obtener dichas curvas se deben emplear técnicas numéricas. El método de elementos finitos, combinado con condiciones de contorno especiales o soluciones analíticas, es actualmente la herramienta utilizada. Estos métodos son llamados métodos híbridos, ya que combinan las soluciones analíticas con técnicas numéricas, en la literatura son conocidos como Método de Elementos Finitos Semi Analítico (SAFE) (Rose, 2014).

3. METODOLOGÍA

En este trabajo se construyeron las curvas de dispersión por medio de dos métodos descriptos a continuación, en primer lugar se aplicó el método axisimétrico a un riel ferroviario tipo B.S.85A para así obtener las curvas de dispersión en condiciones de cuerpo libre estos resultados fueron obtenidos en J L Idzi [2017], luego se aplicó la misma metodología al mismo riel, ahora restringiendo los desplazamientos en los ejes (x,y) dejando libre el desplazamiento el eje z, y en segundo lugar se realiza un análisis modal sobre un FEM tridimensional (3D), sobre el cual se aplican condiciones de borde periódicas en dirección de la propagación de la onda.

3.1 Determinación de las curvas de dispersión con un modelo Axisimétrico

Este método consiste en modelar la sección transversal en análisis como un aro de gran radio ($R > 10L$, siendo R el radio adoptado y L una dimensión característica de la sección transversal estudiada).

Los softwares comerciales de elementos finitos permiten calcular frecuencias naturales de vibración de un modelo axisimétrico, restringiendo el número de lóbulos en la dirección circunferencial que los modos asociados deben tener al vibrar. Esto es equivalente a encontrar frecuencias para un número de onda determinado, ver la ilustración en la Figura 2. Definiendo así líneas verticales de las curvas de dispersión que se está construyendo. Este método es explicado en detalle en Cegla [2008], y fue implementado en el sistema de elementos finitos diferencial ANSYS®. En estos casos resulta importante determinar el coeficiente C_{order} , que representa el número porque debemos dividir la longitud de la circunferencia del modelo axisimétrico analizado para poder determinar la longitud de onda λ definida como:

$$\lambda = \frac{2 \pi R}{C_{order}} \quad (3.1)$$

donde:

$$\lambda = \frac{2 \pi}{k} \quad (3.2)$$

Operando con estas dos ecuaciones es posible vincular C_{order} con el número de onda k de la siguiente forma:

$$C_{order} = kR \quad (3.3)$$

Realizando un análisis modal con un modelo axisimétrico, variando k dentro de los valores requeridos para el estudio y fijando el radio (R) de la simetría axial, de dimensiones mayores que las dimensiones de la sección transversal ($R > 10L$), se pueden obtener los valores de las frecuencias naturales de la estructura para cada valor de C_{order} , a partir del cual se obtendrían los puntos para cada valor de k de la curva de dispersión.

Graficando la nube de puntos obtenidos del estudio modal para cada valor de k y uniéndolos podemos generar las curvas de dispersión.

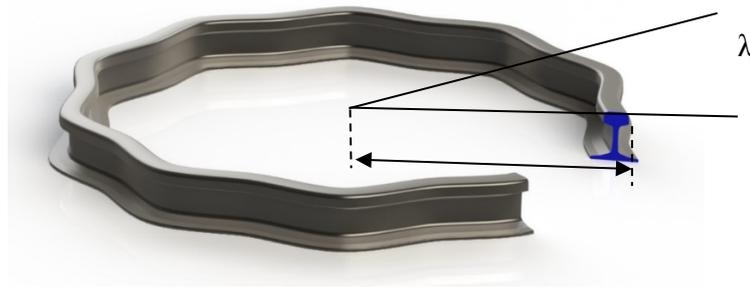


Figura 2 - Esquema del modelo axisimétrico para un riel.

3.2 Método que utiliza un modelo de elementos finitos tridimensional con condiciones de contorno periódicas

Esta segunda metodología consiste en calcular modos y frecuencias de la guía de onda, aumentando o disminuyendo su longitud y colocando en sus extremos condiciones de contorno periódicas simétricas y anti-simétricas de modo a permitir que aparezcan los modos correspondientes a las ondas modales buscadas.

Estas condiciones de contorno hacen que el acoplamiento entre los desplazamientos de las caras del modelo como se aprecia en la Figura 3. El desplazamiento de la cara A va a tener un deslizamiento igual al de la cara B, o el deslizamiento de la cara A será igual al de B en módulo, pero en sentido opuesto.

Las condiciones de contorno periódicas (simetría) son aplicadas en el modelo en las caras de las secciones extremas, de manera que cada nodo de la cara A tenga su respectivo par de la cara B y ambos estén acoplados.

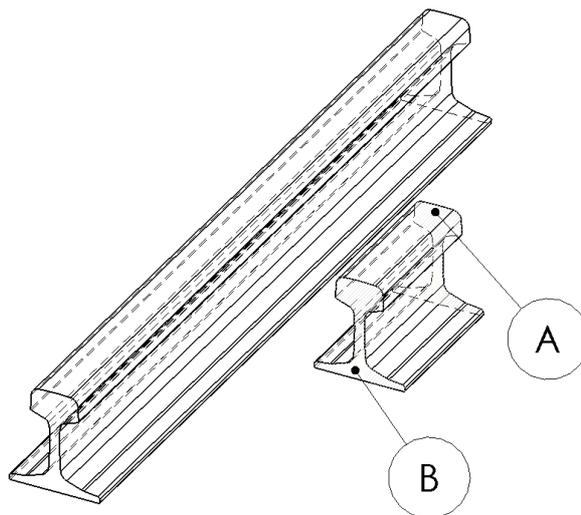


Figura 3 - Detalle de las caras A y B, para modelo de condiciones periódicas.

Aplicando las condiciones de contorno periódico simétrico o antisimétricos sobre los extremos del perfil y calculando sobre el modelo así definido, modos y frecuencias es posible

por inspección encontrar las frecuencias y modos correspondientes a puntos de las curvas de dispersión generadas con el otro método.

En la práctica, la determinación de cada uno de los puntos de la curva de dispersión depende de un análisis visual de cada uno de los modos calculados. El objetivo del método consiste, con las condiciones de contorno impuestas, en hacer que el modelo imite el comportamiento de las ondas guiadas, para una determinada longitud de onda. La gran ventaja de esta metodología es la posibilidad de visualizar el modo de propagación en un modelo 3D; la desventaja está en la dificultad de la automatización del método.

Por lo mencionado anteriormente, con este método no se obtuvieron las curvas de dispersión, sino solo puntos característicos de la misma para poder visualizar los modos asociados a las curvas de dispersión obtenidas con el método basado en el modelo axisimétrico anteriormente explicado.

4. APLICACIONES

4.1 Cálculo de curvas de dispersión en un perfil de riel libre

En la implementación del método basado en el método axisimétrico se ha dejado fijo el radio en un valor determinado por los parámetros de cálculo, para nuestro caso particular $R=1050$ m se ha hecho variar k entre un valor mínimo de $0,01$ rad/m y un valor máximo de 350 rad/m, el intervalo de variación de k es de $0,01$ rad/m.

Los resultados de las frecuencias encontradas entre las frecuencias máximas y mínimas establecidas para cada valor de k son graficados en conjunto lo cual permite visualizar las curvas de dispersión.

El contorno del perfil es introducido como output de un archivo neutro, (*.igs), de esta manera podemos, a través de este tipo de archivos, importar directamente cualquier perfil que sea requerido para su estudio.

Los parámetros de cálculo son los siguientes:

| Nomenclatura | Valor | Descripción | Unidad |
|--------------|-------|------------------------------------|---------|
| E | 210e9 | Módulo de Young's | N/m^2 |
| ν | 0.3 | Coefficiente de Poisson | Ad |
| ρ | 7850 | Densidad | N/m^3 |
| R | 1050 | Radio de Simetría | m |
| T | 0.001 | Tamaño característico del elemento | m |
| N_{mod} | 100 | Cantidad de Modos calculados | ad |
| K_{min} | 0.01 | Numero de Onda Mínimo | rad/m |
| K_{max} | 350 | Numero de Onda Máximo | rad/m |
| K_{inc} | 0.01 | Intervalo de Numero de Onda | rad/m |

Tabla 1 - Propiedades y características utilizadas en el cálculo del perfil de riel libre.

A partir de todos estos parámetros y características definidas previamente se construyó la gráfica de la Figura 4 que muestra las curvas de dispersión para el caso del riel sin ni una restricción, ó sea de cuerpo libre.

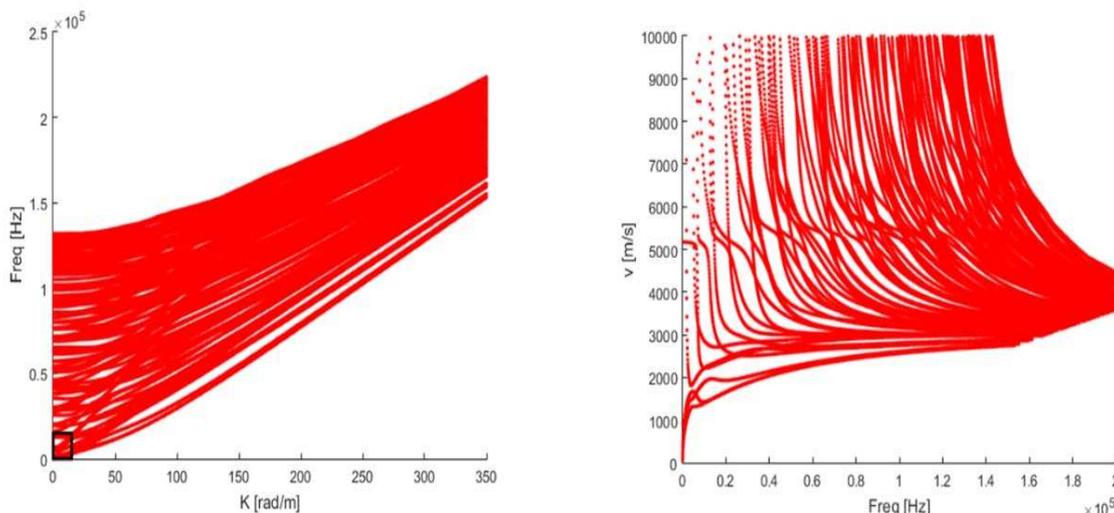


Figura 4: Curvas de dispersión riel BS85 A generadas por el modelo Axisimétrico.

En la Figura 4 se presentan las curvas de dispersión del riel calculadas en el dominio de velocidad de fase vs frecuencia.

Para obtener las curvas de dispersión, en el dominio de velocidad de fase vs frecuencia (C_0 vs f), se calcula por medio de las ecuaciones (2.2) y (2.4), que combinándola queda:

$$C_0 = \frac{2\pi f}{K} \tag{4.1}$$

De esta manera, los valores obtenidos, son calculados en el dominio de la velocidad y frecuencia, donde para cada par de valores (f ; k), se obtiene un nuevo par de valores (v ; f).

Si restringimos el estudio a un rango de frecuencia menor (observar la ventana indicada en la Figura 4), en el intervalo de frecuencias entre 0 y 10 kHz, con k entre 0,1 y 15 rad/m, ya que se pretende enfocar los futuros ensayos reales a esta franja de frecuencias. En la Figura 5 se presenta las curvas de dispersión en el dominio (f , k) y en el dominio (v , f) en el rango mencionado, resultados obtenidos en J L Idzi [2017].

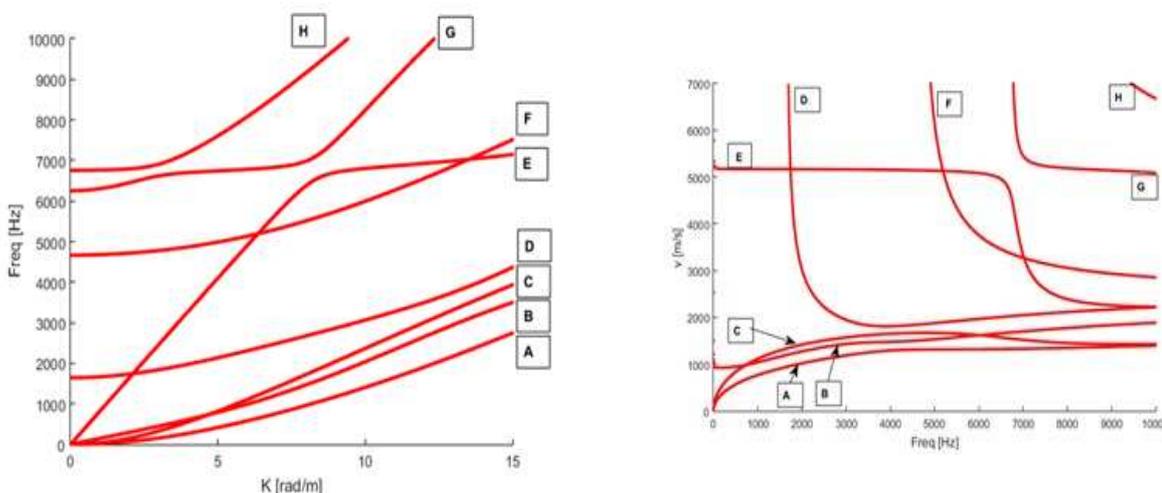


Figura 5: Curvas de dispersión riel de 42,18kg/m - Perfil B.S. 85 A. (Zoom ver Figura 4)

4.2 Cálculo de curvas de dispersión en un perfil de riel con restricciones en su base.

Utilizando el mismo método basado en el modelo axisimétrico, se han utilizado los siguientes parámetros de cálculo, $R=500$ m se ha hecho variar k entre un valor mínimo de 0,01 rad/m y un valor máximo de 35 rad/m, el intervalo de variación de k es de 0,01 rad/m.

Los resultados de las frecuencias encontradas entre las frecuencias máximas y mínimas establecidas para cada valor de k son graficados en conjunto lo cual permite visualizar las curvas de dispersión.

Los parámetros de cálculo son los siguientes:

| Nomenclatura | Valor | Descripción | Unidad |
|--------------|--------|------------------------------------|---------|
| E | 210e9 | Módulo de Young's | N/m^2 |
| ν | 0.3 | Coefficiente de Poisson | Ad |
| ρ | 7850 | Densidad | N/m^3 |
| R | 500 | Radio de Simetría | m |
| T | 0.0098 | Tamaño característico del elemento | m |
| N_{mod} | 20 | Cantidad de Modos calculados | ad |
| K_{min} | 0 | Numero de Onda Mínimo | rad/m |
| K_{max} | 35 | Numero de Onda Máximo | rad/m |
| K_{inc} | 0.01 | Intervalo de Numero de Onda | rad/m |

Tabla 2 - Propiedades y características utilizadas en el cálculo del perfil de riel con restricciones.

En la Figura 6, se muestra el mallado utilizado, el elemento es "PLANE 83", con este elemento y el tamaño seleccionado fueron suficientes para conseguir resultados muy similares.

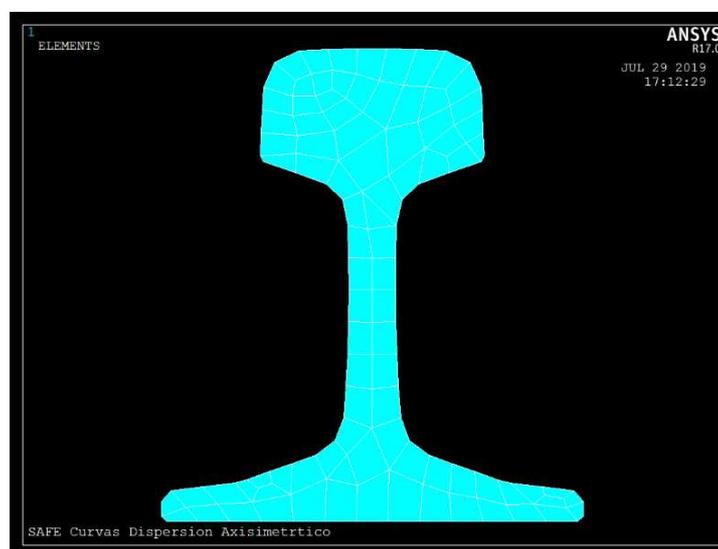


Figura 6: Malla para modelo axisimétrico del riel BS85A Base Fija.

En la Figura 7, se puede observar el modelo que fija la base, se ha fijado cada nodo de la misma en las direcciones de los ejes "x" e "y" de manera de simular su retención en funcionamiento, quedando libre la dirección de la vía, que si bien el dispositivo de fijación ejerce una roce es el sentido del eje "z", no lo restringe en un 100% mientras que los otros movimientos están restringidos por el mismo artefacto. Con estos planteos el modelo que da de la siguiente manera.

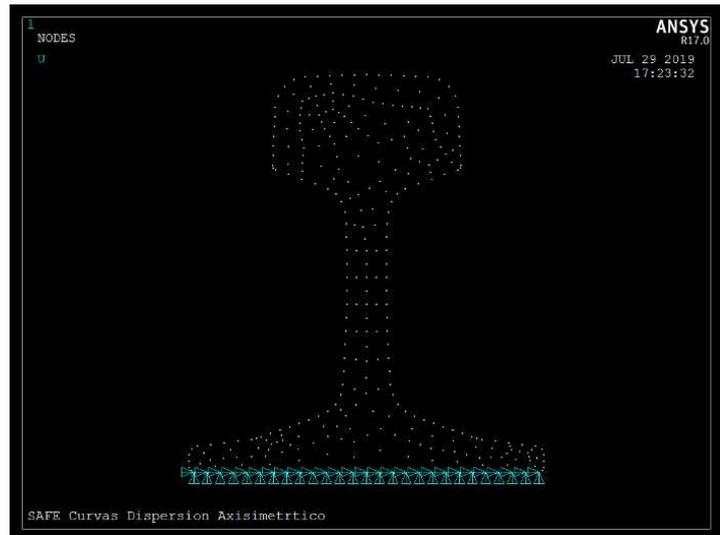


Figura 7: Modelo de retención de los nodos de la Base Fija

A partir de todos estos parámetros y características de la fijación de los nodos de la base, se construyo la gráfica de la Figura 8 donde son presentadas las curvas de dispersión para este caso en particular.

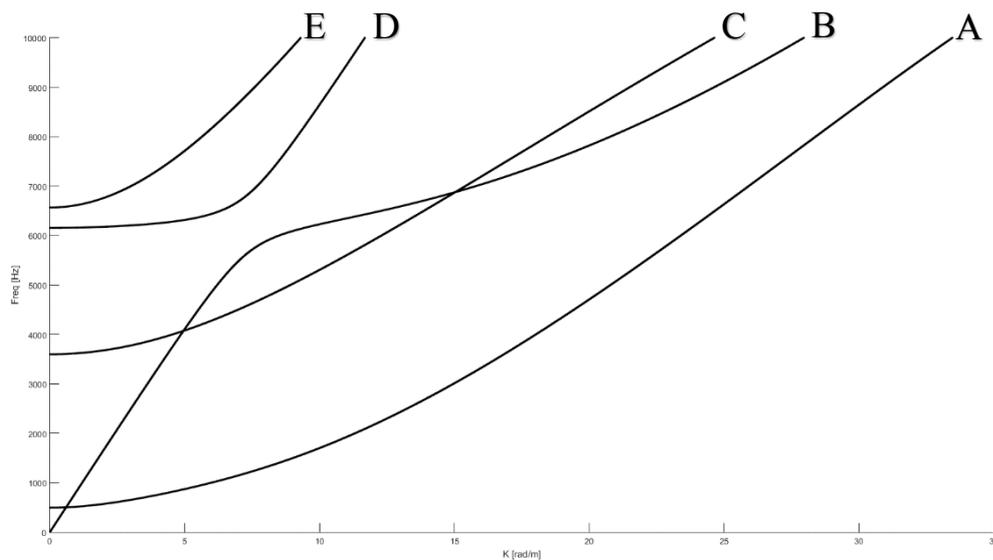


Figura 8 - Curvas de dispersión del riel con su base fija (k vs. f)

En la Figura 9 se presentan las curvas de dispersión del riel calculadas en el dominio de velocidad de fase vs frecuencia. De esta manera, los valores obtenidos, son calculados en el dominio de la velocidad y frecuencia, donde para cada par de valores ($f ; k$), se obtiene un nuevo par de valores ($v ; f$).

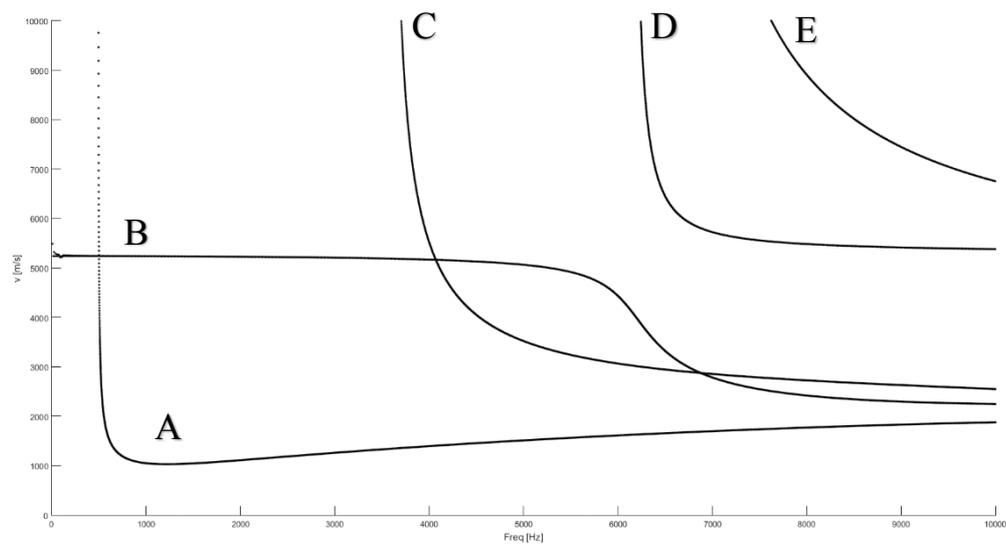


Figura 9 - Curvas de dispersión del riel con su base fija (f vs. v)

En la Figura 10 se muestra las curvas de dispersión superpuestas, en rojo las que corresponden al riel sin restricciones, y las negras corresponden al riel fijo, con las restricciones en su base. Como puede verse hay modos que ya no existen y la cantidad de curvas se reducen. Luego de caracterizar cada una de ellas veremos porque sucede esto.

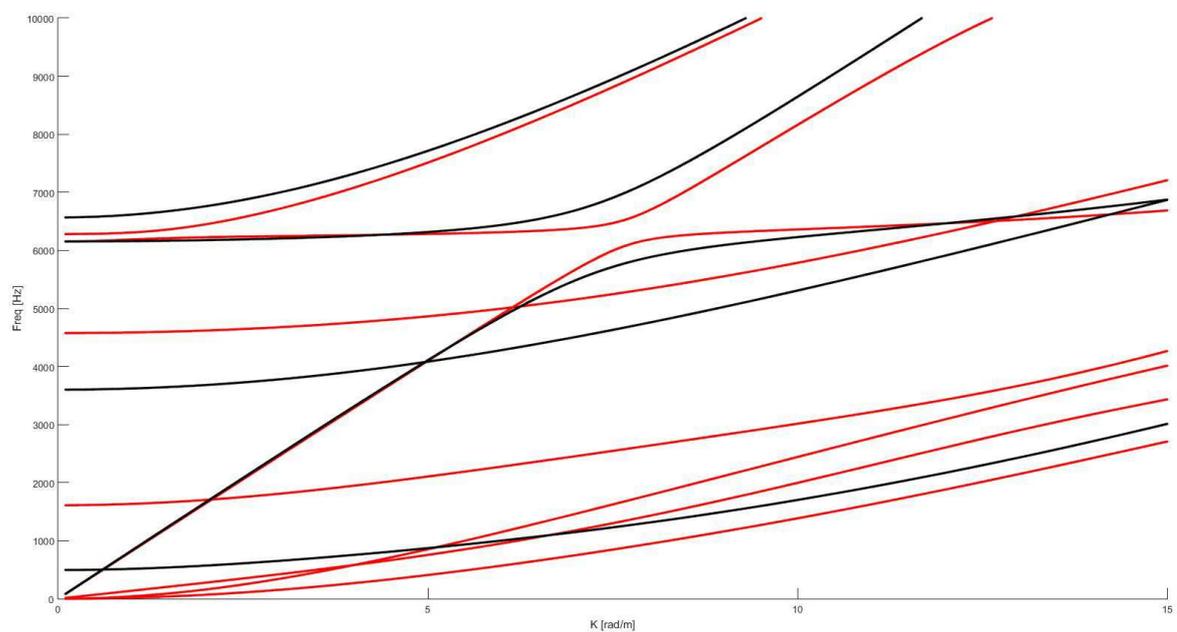


Figura 10 - Curvas de dispersión del riel superpuestas

4.3 Cálculo Por el método de condiciones periódicas con la base libre

En primer lugar, se presentan los resultados obtenidos en J L Idzi [2017], con el perfil en condiciones de cuerpo libre.

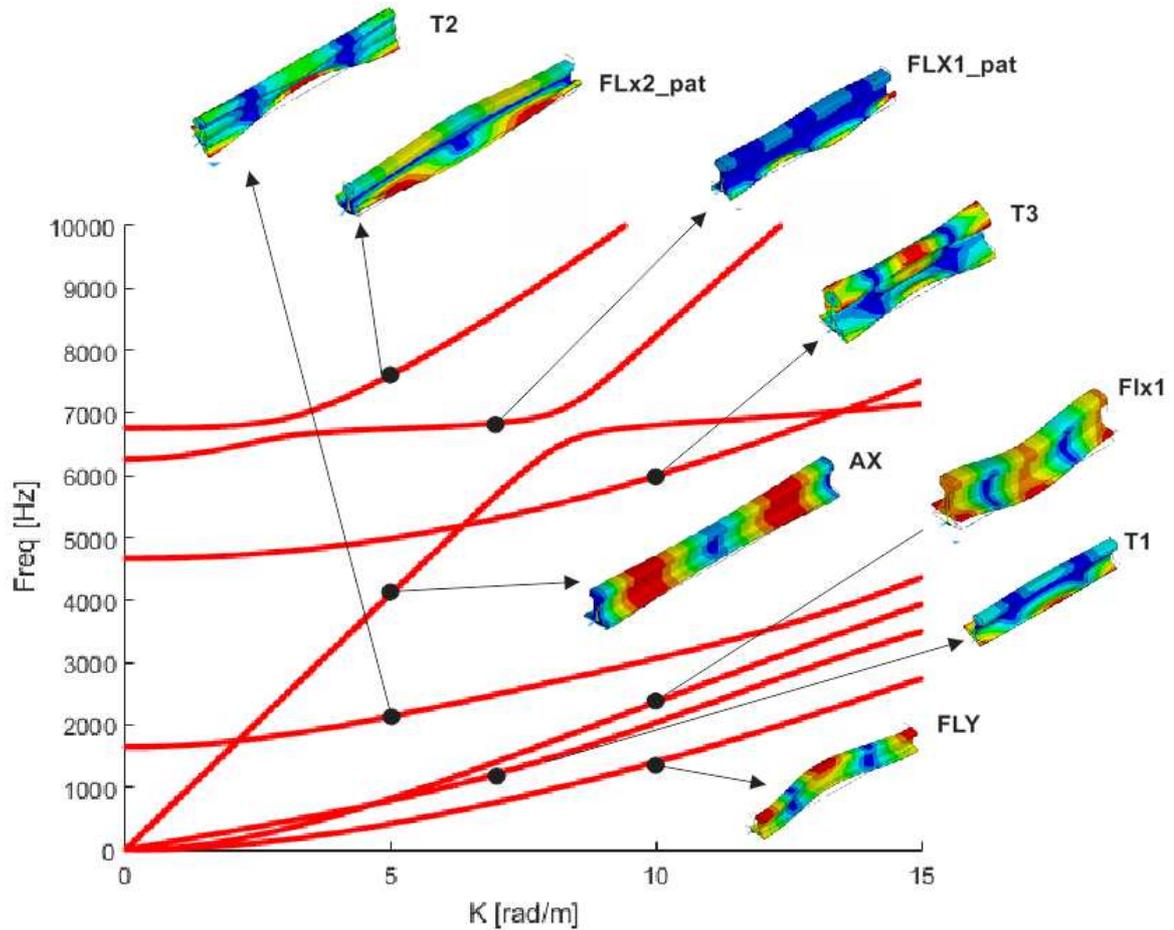


Figura 11 - Curvas de dispersión riel de 42,18kg/m - Perfil B.S. 85 A generadas por condiciones periódicas.

4.4 Cálculo Por el método de condiciones periódicas con la Base Fija

Con esta metodología fueron calculados los modos con elemento sólido, obteniendo las frecuencias de cada uno de ellos para un determinado K , y con ellos se construyen nuevamente las curvas de dispersión.

Se discretizo el riel con el elemento de ANSYS, SOLID187.

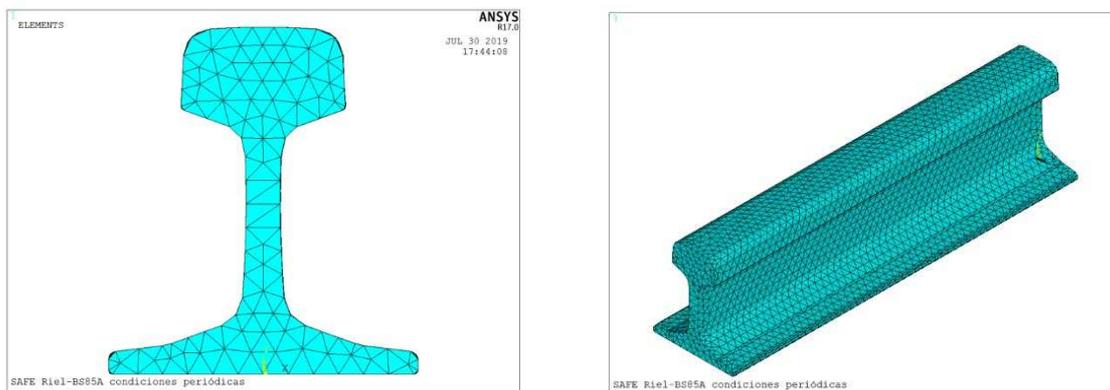


Figura 12: Malla para el modelo de condiciones periódicas.

En la Figura 13 son presentados 5 puntos obtenidos por esta metodología, pudiéndose apreciar la forma modal de cada curva.

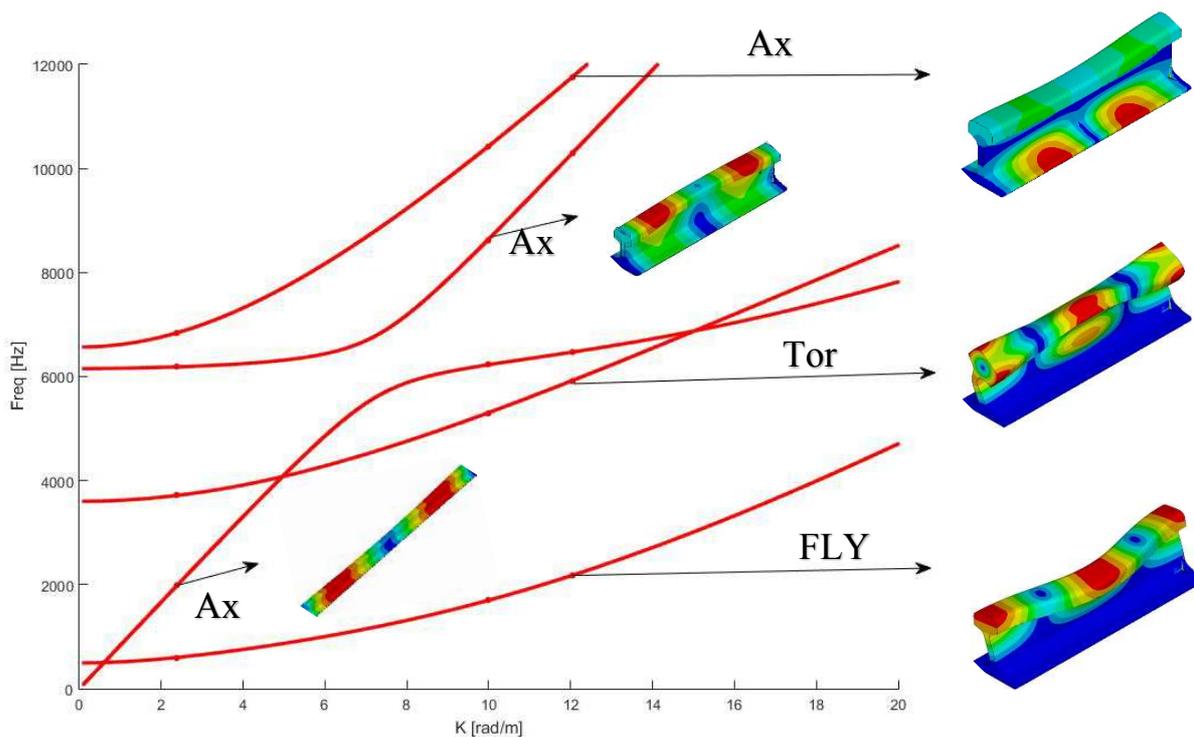
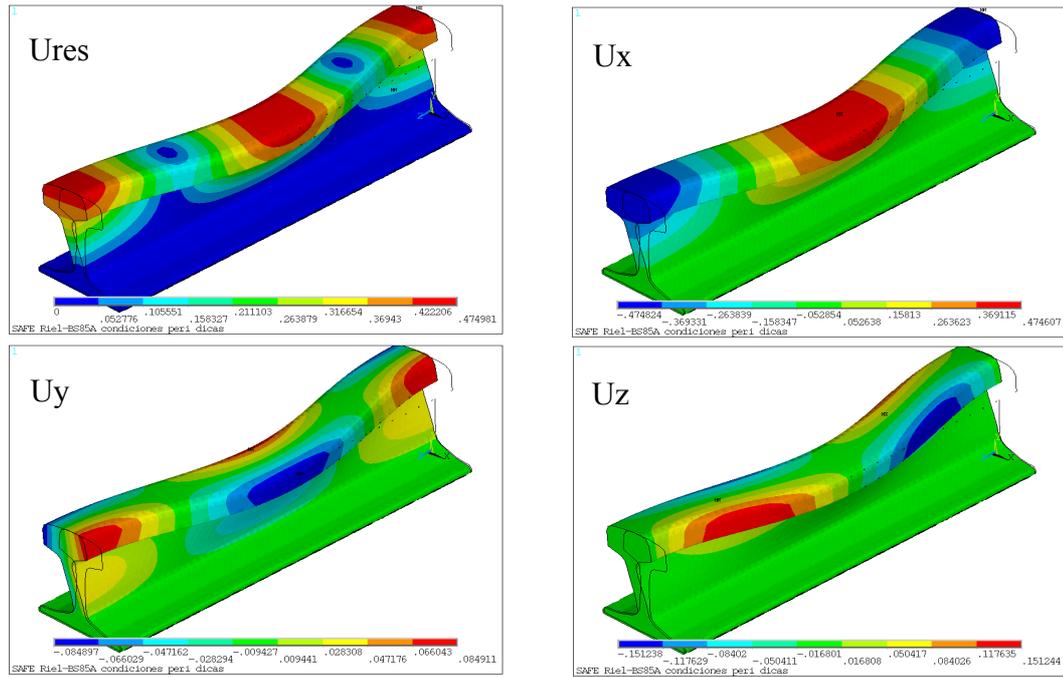
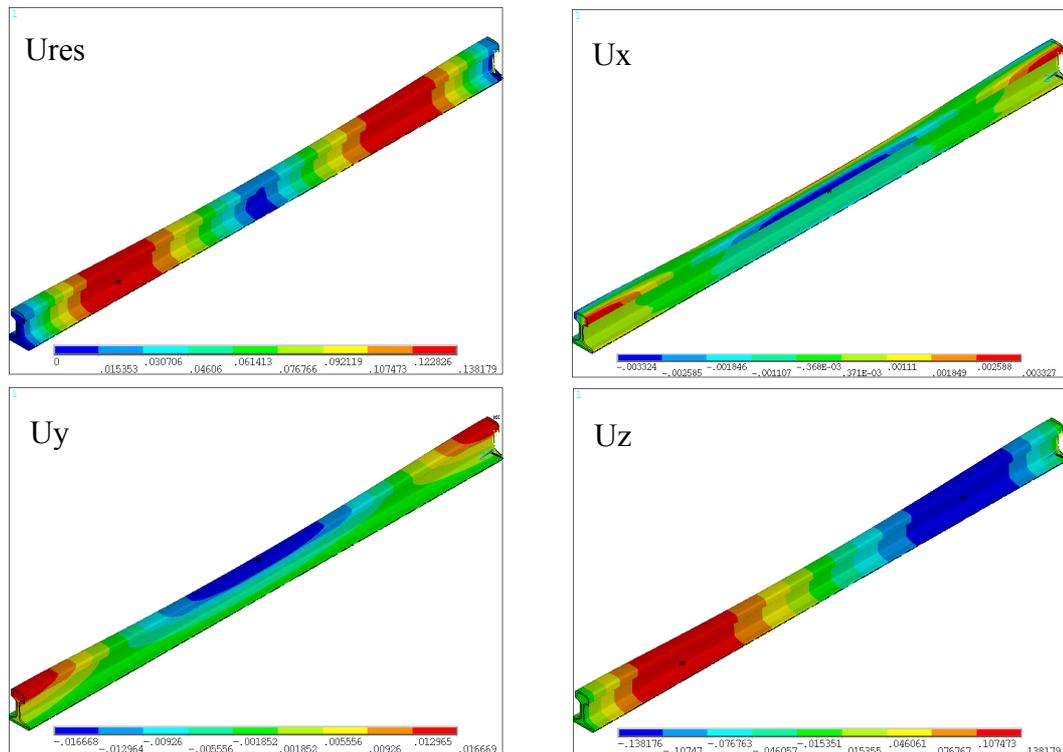


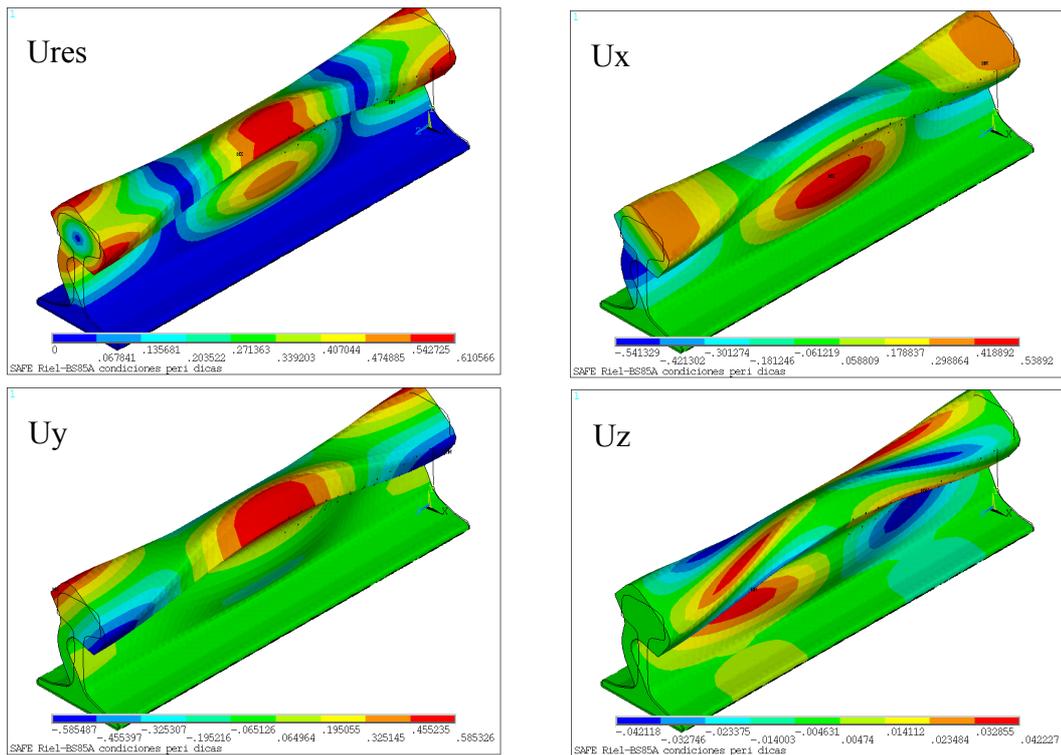
Figura 13: Curvas de dispersión con la base fija



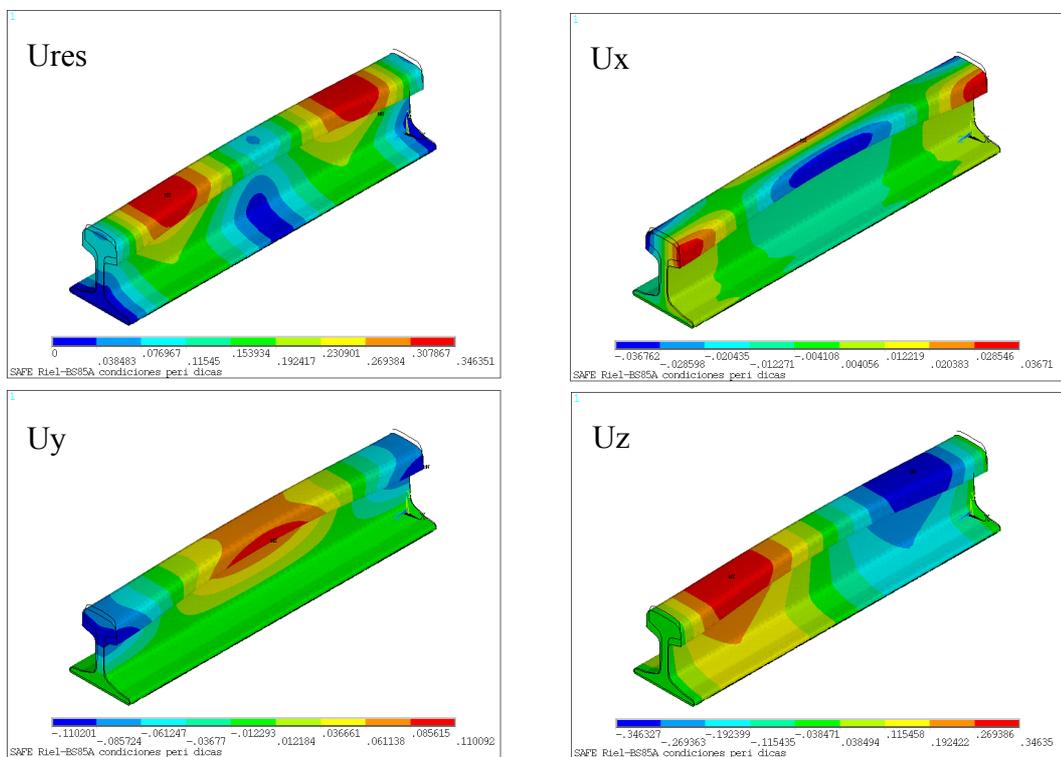
**Figura 14 – Curva A, Modo donde gobierna flexión del perfil respecto al eje Y (FLY);
Punto [k=12rad/m, f=2.172 kHz]**



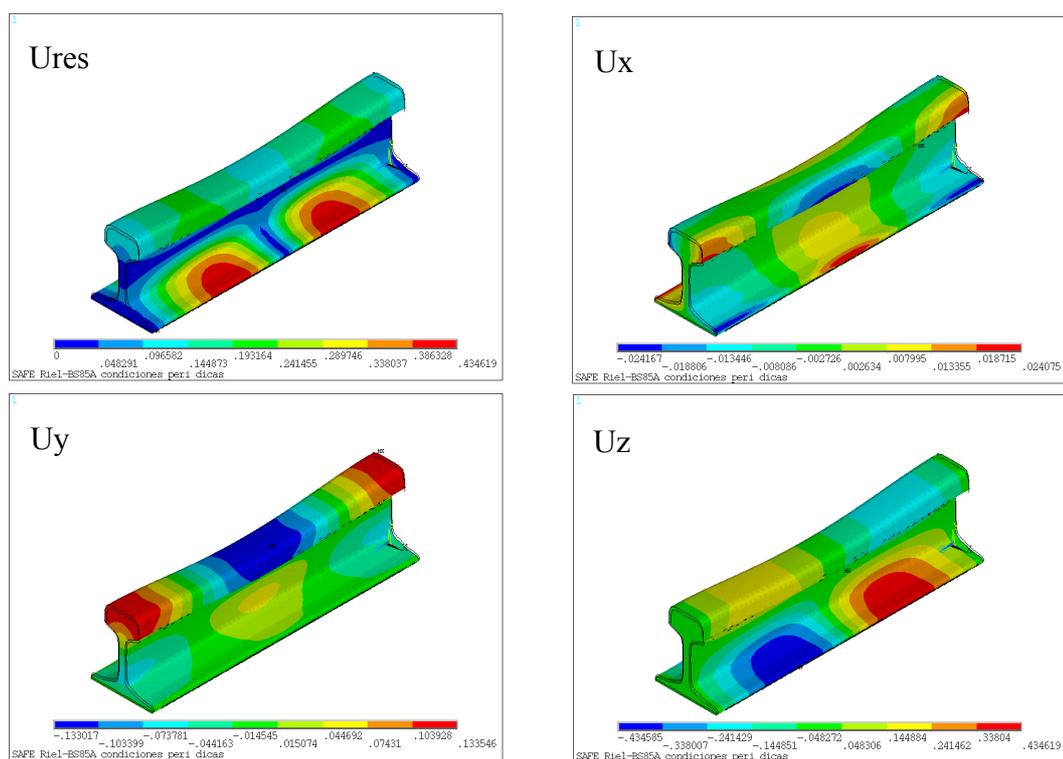
**Figura 15 - Curva B, Modo donde gobierna el modo longitudinal del perfil (Ax);
Punto [k=2.5rad/m, f=2.79 kHz]**



**Figura 16- Curva C, Modo donde gobierna el modo Torsional del perfil (Tor);
Punto [k=12 rad/m, f=5.92 kHz]**



**Figura 17 - Curva D, Modo donde gobierna el modo longitudinal del perfil (Ax);
Punto [k=10 rad/m, f=8.64 kHz]**



**Figura 18- Curva E, Modo donde gobierna el modo longitudinal del perfil (Ax);
Punto [k=12 rad/m, f=11.74 kHz])**

Del análisis de las Figura 9 y siguientes podemos decir que:

Las ondas modales que aparecen en las curvas de dispersión del riel fijo están asociados a movimientos de todas las regiones del perfil, vemos que solo las curvas G y H tienen componentes preferenciales en la zona del patín, mientras que en el riel con restricciones estas no son permitidas, con lo cual pasan a tener modos de axil.

En la Figura 10, podemos ver que las curvas que en ambos estudios se encuentran presentes con pequeñas consideraciones son: la curva A, E, F, G y H, ahora llamadas A, B, C, D y E respectivamente.

No son exactas, pero mantiene su orden de magnitud y forma.

Si analizamos la curva A, podemos observar como continúa gobernando el modo de flexión en el eje Y, claro que, en el nuevo estudio, solo en el alma y la cabeza, ya que el patín se encuentra restringido en sus desplazamientos.

Si observamos la Figura 10, la curva B, podemos apreciar que es la que más coincidencia tiene, respecto a su origen, su forma y también de sus valores. En ambos estudios se aprecia como aparece muy fuertemente el modo axil, esto es realmente importante, pues puede verse en la Figura 9, como hasta los 6 kHz. la velocidad de propagación es la misma, independiente de la frecuencia.

La curva C la comparamos con la F cuando el riel esta libre, en ambos estudios vemos que el modo que más se asemeja es el modo torsional, dado que cuando fijamos la base, no se puede

hablar de un modo torsional exacto, pero sí que en el alma y la cabeza existe esta tendencia a ser un modo torsional, y esto se mantiene en ambos estudios.

En las curvas D y E, el modo al cual más se asemejan es el axil, no es tan evidente como en el caso de la curva B, pues son complementos entre modos de flexión y axil, es muy evidente en la curva D, que para valores de k que van desde 0 a 6.5, el modo que gobierna es la flexión, mientras que de 6.5 en adelante el modo es el axil. Si comparamos la curva B con la D, podemos ver que, proyectando la recta de la B, esta mantiene la misma pendiente con el segmento recto de la curva D, en ese segmento de curva es donde el modo es axil prácticamente puro.

5. CONCLUSIONES

En este trabajo se realizó el estudio de propagación de ondas guiadas de un riel ferroviario aplicando restricciones al desplazamiento de la base en las direcciones de los ejes X e Y. Para ello se implementaron dos metodologías para calcular las curvas de dispersión. Aplicando dicha metodología se han calculado las curvas de dispersión y caracterizado cada una de ellas, y se ha comparado con los resultados obtenidos anteriormente con el riel totalmente libre. De esto se concluye que:

- La metodología utilizada, es útil para calcular las curvas de dispersión de geometrías transversales complejas, con restricciones, y logran arrojar buenos resultados.
- Se restringió el movimiento del patín, procurando simular la condición más próxima a la que tiene el riel cuando es instalado sobre la vía.
- Las curvas de dispersión obtenidas sobre el riel fijo han permitido entender mejor los tipos de ondas modales que pueden ser utilizadas para explorar defectos en este tipo de geometrías.
- Queda en evidencia que, fijando la base, las curvas de dispersión no se modifican sustancialmente.
- Es de gran interés la curva B, donde aparece una velocidad aproximadamente constante, independiente de la frecuencia, hasta los 7KHz aproximadamente, muy útil para ensayos no destructivos.

REFERENCIAS

- Achenbach, J. D. *Wave Propagation in Elastic Solids*. Volume I. Elsevier Science publishers B. V., 1973.
- Alleyene, D. and Cawley, P. *A two-dimensional Fourier transform method for the measurement of propagating multimode signals*. Journal of Acoustical Society of America, vol. 89, p. 1159–1168, 1991.
- Ansys, I. *Programmer's Manual for Mechanical APDL*. Ansys, Inc., 2009.
- Boeraeve, P. *Introduction to The Finite Element Method*. Institut Gramme-LIEGE, 2010.
- Cegla, F. B. *Energy concentration at the center of large aspect ratio rectangular waveguides at high frequencies*. Journal of Acoustical Society of America, vol. 123, p. 4218–4226, 2008.3
- D. Hesse and P. Cawley, *Surface wave modes in rails*. Department of Mechanical Engineering, Imperial College London, London SW7 2AZ, United Kingdom, 2005.
- Daniel Hesse, *Rail inspection Using Ultrasonic Surface Waves*. University of London, 2007.
- Das, B. M. *Fundamentals of Soil Dynamics*. Volume I. Elsevier Science publishers B. V., 1982.
- Davies, R. M. *A critical study of the Hopkinson pressure bar*. The Royal Society, vol. 240, 1948.
- Eduardo Becker Groth, *Curvas De Dispersão: No Contexto Da Determinação De Defeitos Em Estruturas Laminares Utilizando Ondas Guiadas*. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2016
- Hallquist, J. O. *LS-DYNA Theory Manual*. Livermore Software Technology Corporation, 2006.
- Hayashi, Song, W.-J., and Rose, J. L. *Guided wave dispersion curves for a bar with an arbitrary cross-section, a rod and rail example, Ultrasonics*. Vol. 41, p. 175–183, 2003.
- Idzi, Javier L., et al. "Estudio de la Propagación de Ondas Guiadas sobre un Riel Ferroviario." XXIII Congreso sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones. 2017.
- Manual Integral de Vías*, Nuevo Central Argentino, República Argentina, 2014.
- MathWorks. *Reference Manual*. The MathWorks, Inc., 2011.
- Normas Técnicas De Vías Y Obras*. Comisión Nacional de Regulación del Transporte, República Argentina
- Nucera y Lanza di Scalea (2014), *Modeling of Nonlinear Guided Waves and Applications to Structural Health Monitoring*. University of California, San Diego, Department of Structural Engineering, 9500 Gilman Drive, M.C. 0085, La Jolla, California, 92093-0085 USA.
- Ohtsu M (1996) *The history and development of acoustic emission in concrete engineering*. Magazine of concrete research 48(177): 321–330.].
- Peter Cawley, *Practical long range guided wave inspection – applications to pipes and rail, Department of Mechanical Engineering*, Imperial College, London, 2002.
- Polytec. *Basic Principle of Vibrometry*, 2016.
- Rose, J. L. *Dispersion Curves in Guided Wave Testing, Materials Evaluation*, vol. 240 2003.
- Rose, J. L. *Ultrasonic Guided Waves in Solid Media*. volume I. Cambridge University, Press, 2014.
- Takahiro HAYASHI, *Guided Wave Dispersion Curves Derived with a Semianalytical Finite Element Method and Its Applications to Nondestructive Inspection, Department of Mechanical Engineering*. Nagoya Institute of Technology, Japan, 2003.