

MODELACIÓN NUMÉRICA DE LA FALLA EN COMPUESTOS DE HORMIGÓN REFORZADO CON FIBRAS

NUMERICAL MODELLING OF THE FAILURE FOR FIBER REINFORCED CONCRETE COMPOUNDS

Marcos E. Gerez Albornoz y Sonia M. Vrech

Centro de Métodos Numéricos y Computacionales en Ingeniería (CEMNCI). Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología Universidad Nacional de Tucumán. Av. Independencia 1800, 4000 S. M. de Tucumán, Argentina, marcosgerez@gmail.com - svrech@herrera.unt.edu.ar

Palabras clave: EFEM, hormigón, fibras de acero, falla localizada.

Resumen. El análisis del proceso de fisuración de un material es un tema desafiante en diversos campos académicos e industriales. Uno de los materiales más ampliamente utilizados en las obras civiles es el hormigón, sobre el que se realizaron grandes avances respecto a la introducción de mejoras en su tecnología, en particular en el desarrollo y producción de hormigones reforzados con fibras de acero. El objetivo de este trabajo es estudiar y predecir el comportamiento de falla en elementos estructurales confeccionados con este material mediante la técnica de Elementos Finitos Enriquecidos (EFEM) con un modelo constitutivo basado en la Teoría de Mezclas, considerando tres fases que intervienen: la matriz de hormigón y los mecanismos que tienen en cuenta las interacciones fibra-hormigón: deslizamiento y efecto dovela. Se analiza el inicio de la discontinuidad aplicando la condición de falla localizada mediante la evaluación del tensor acústico, combinado con una técnica para el seguimiento de la discontinuidad basada en una analogía con el problema de conducción de calor. La capacidad del modelo se verifica realizando simulaciones numéricas para predecir el comportamiento mecánico de elementos sometidos a tracción, compresión y corte. Se compara la respuesta con los correspondientes resultados experimentales en términos de curva Carga vs. Desplazamiento, forma de la fractura y malla deformada.
Keywords: EFEM, concrete, steel fibers, localized failure.

Abstract. The cracking process analysis of a material is a challenging issue in academic and industrial fields. One of the most widely used materials in civil works is concrete. Great advances were made regarding the introduction of improvements in its technology, particularly in the development and production of Steel Fibers Reinforced Concrete (SFRC). The objective of this work is the study and prediction of the failure behavior in structural elements through the technique of Enriched Finite Elements Method (EFEM) regarding a constitutive model based on the Theory of Mixtures, considering three involved phases: the concrete matrix and the mechanisms that take into account fiber-concrete interactions: bond-slip and dowel effect. The onset of discontinuity is analyzed by applying the localized failure condition by evaluating the acoustic tensor, combined with a technique for monitoring the discontinuity based on an analogy with the heat conduction problem. The capacity of the model is verified by performing numerical simulations to predict the mechanical behavior of structural elements subjected to traction, compression and shear. The response is compared with the corresponding experimental results in terms of the Load vs. Displacement curves, fracture shape and deformed mesh.

1. INTRODUCCIÓN

En la actualidad, es conocido el efecto de la adición de fibras para incrementar la ductilidad y resistencia de la matriz cementicia. El rol principal de las fibras acontece con la matriz fracturada, evitando la propagación y apertura de las fisuras.

Como lo evidencian estudios experimentales, luego de que la matriz cementicia se fisura, las tensiones de tracción comienzan rápidamente a decrecer, sin embargo con la adición de una cierta cantidad de fibras, éstas son capaces de mantener una capacidad de carga, evitando y retrasando la falla frágil. Sin embargo la principal ventaja de la adición de fibras está directamente relacionada con la capacidad de transferencia de esfuerzos a través de las fisuras.

Este proceso depende de la estructura interna del compuesto y los principales factores que intervienen son: i) la estructura de la matriz cementicia, ii) la forma y distribución de las fibras, iii) la interacción fibra-matriz.

En las últimas décadas se incrementó el uso del Hormigón Reforzado con Fibras de Acero (HRFA) en un amplio rango de elementos para obras civiles obligando al desarrollo de modelos numéricos para simular su comportamiento. Existen en la literatura diversos enfoques, la idea más básica es el desarrollo de modelos a partir de la calibración de campañas experimentales como por ejemplo [S. K. y Ramaswamy \(2002\)](#). En general tales modelos son de aplicación reducida porque sólo son capaces de predecir elementos de igual forma y carga que los utilizados para desarrollar dicho modelo. Otra alternativa es el desarrollo de modelos analíticos tales como [Lee et al. \(2012\)](#), [Zhan y Meschke \(2014\)](#) implementados en programas computacionales, los cuales consideran los efectos de la geometría de las fibras, distribución, orientación, características del arrancamiento y su influencia en la respuesta de un elemento en particular. Existen otros modelos con propiedades promedio basados en Teoría de Mezclas de [Truesdell y Toupin \(1960\)](#) como [Manzioli et al. \(2008\)](#), [Vrech et al. \(2016\)](#), en los cuales las tensiones son determinadas por la adición de las tensiones de cada material constituyente, los cuales son afectados en función de su participación volumétrica. Otros realizan un tratamiento discreto de las fibras como [Pros et al. \(2016\)](#), [Kang y Bolander \(2016\)](#), entre otros, con la consideración que la distribución de las fibras es un factor altamente dependiente para la respuesta de un elemento simulado. Los modelos generalmente consideran a la interacción fibra-matriz con modelos de adherencia perfecta o con leyes calibradas a partir de ensayos de pull-out, ver [Cunha et al. \(2011\)](#).

En este trabajo se desarrolla un modelo constitutivo para HRFA basado en la Teoría de Mezclas, aplicando EFEM. Para la matriz de hormigón se considera un modelo constitutivo elastoplástico, mientras que para las fibras de acero se aplican leyes cohesivas que contemplan la interacción fibra-matriz, tanto para comportamientos de deslizamiento como para el efecto dovela. La formulación constitutiva que tiene en cuenta la proporción, distribución y orientación de las fibras se implementa en un código de elementos finitos para la evaluación de elementos de HRFA sometidos a estados de carga variables, calibrado a partir de resultados experimentales con la siguientes consideraciones:

- Técnicas de EFEM, las cuales evitan la dependencia de la solución respecto de la malla y permiten la no utilización de técnicas de regularización.
- Las fibras son simuladas como distribuidas tanto en la malla de elementos finitos como en la discontinuidad utilizando la Teoría de Mezclas de [Truesdell y Toupin \(1960\)](#).
- El número de grados de libertad del problemas se mantiene constante e independiente de la dosificación de fibras.

- El proceso de fisuración se considera discreto.
- Se propone la utilización de un tensor constitutivo modificado que tiene en cuenta la posición y volumen de fibra en múltiples direcciones.
- Se proponen leyes cohesivas para simular la apertura normal y tangencial de fisuras, utilizando la Teoría de Mezclas de [Truesdell y Toupin \(1960\)](#), que permiten tener en cuenta el deslizamiento fibra-matriz y el efecto dovela.

En la Sección 2 se describe la formulación basada en EFEM y las modificaciones necesarias para tener en cuenta la presencia de las fibras, luego en la Sección 3 la condición de falla localizada y en la 4 el algoritmo para el seguimiento de la discontinuidad. En la Sección 5 se enuncia el modelo constitutivo para HRFA y en la 6 las leyes constitutivas que se aplican en la discontinuidad. Por último en la Sección 7 se presenta la simulación de ensayos de elementos bajo estados de tracción, compresión y corte y un ensayo de corte Push-off para mostrar la capacidad predictiva de fisura. Finalmente se enuncian las conclusiones en la Sección 8.

2. MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS ENRIQUECIDOS (EFEM)

Esta técnica de elementos finitos ha sido desarrollada especialmente para la simulación de discontinuidades en sólidos, ver [Armero \(1999\)](#). En este trabajo se desarrollan elementos enriquecidos con interpolaciones lineales de los saltos en los campos de desplazamientos normales y tangenciales debido a la discontinuidad, identificando los modos de deformación (normal, tangencial y rotación) y capturando no sólo los movimientos de cuerpo rígido del elemento dividido, sino también una deformación relativa entre las partes del mismo, tal cual se desarrolla en el trabajo [Gerez y Vrech \(2016\)](#).

Modificaciones del EFEM para simular HRFA

Para la formulación del EFEM se plantea el equilibrio en la discontinuidad, donde se ponen de manifiesto todas las fuerzas que actúan, siendo

$$\int_{\Omega_e^h} \mathbf{G}_{(e)}^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega - \int_{\Gamma_e^h} \mathbf{J}^T \mathbf{T}_{\Gamma \text{ HRFA}} \, d\Gamma = 0 \quad (1)$$

donde $\mathbf{G}_{(e)}^T$ es el operador de equilibrio cuya función es trasladar las tensiones $\boldsymbol{\sigma}$ determinadas en los puntos de Gauss del elemento a la discontinuidad Γ_e^h , integradas en el volumen Ω del elemento Ω_e^h . Mientras \mathbf{J}^T contiene las interpolaciones relacionadas a los modos de apertura de la fisura (normal, tangencial, rotación) y $\mathbf{T}_{\Gamma \text{ HRFA}}$ contiene las leyes cohesivas normales y tangenciales para simular la respuesta de la discontinuidad. En la Fig. (1) se muestra un esquema de análisis de los elementos. Para mayores detalles ver [Gerez y Vrech \(2016\)](#). Teniendo en cuenta el equilibrio definido en la ec. (1), deben considerarse además las leyes cohesivas correspondientes al comportamiento de las fibras. Teniendo en cuenta la Teoría de Mezclas de [Truesdell y Toupin \(1960\)](#), resulta

$$\mathbf{T}_{\Gamma \text{ HRFA}} = \omega_f \mathbf{T}_{\Gamma f} + (1 - \omega_f) \mathbf{T}_{\Gamma m} \quad (2)$$

siendo ω_f la proporción volumétrica de fibras, $\mathbf{T}_{\Gamma f}$ la fuerza desarrollada por las fibras de acero y $\mathbf{T}_{\Gamma m}$ la fuerza de la matriz de hormigón.

Los grados de libertad del problema se mantienen sin cambios y son independientes del contenido de fibras. De esta manera el EFEM sigue teniendo consistencia variacional, no hay

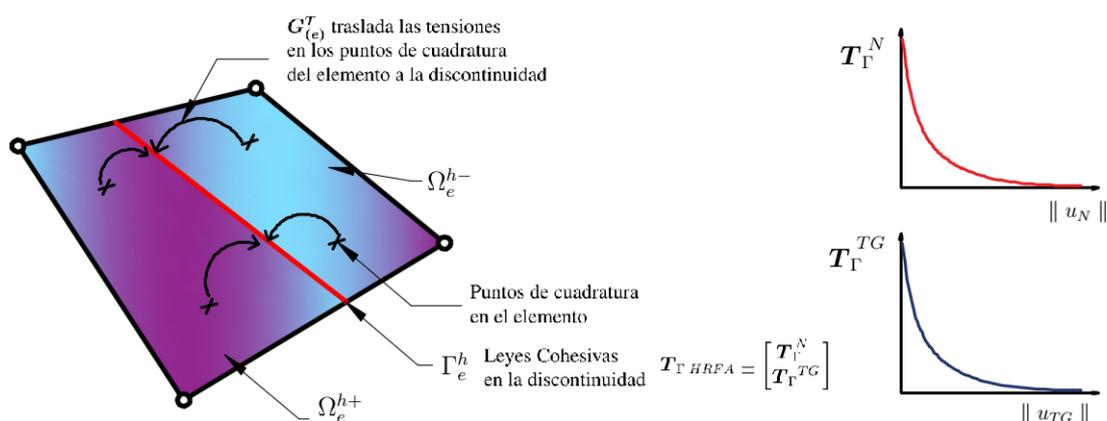


Figura 1: Elemento finito con una discontinuidad. Esquema de análisis.

limitaciones en la elección del elemento finito a utilizar, se respeta la cinemática propia del método, no se producen problemas tales como bloqueo de tensiones o tensiones espurias.

3. INDICADOR DE FALLA LOCALIZADA

El indicador de falla localizada utilizado en esta formulación consiste en la singularidad del tensor elastoplástico de localización o tensor acústico Q^{ep} , ver [Ottosen y Ruesson \(1991\)](#), de acuerdo a

$$\det[Q^{ep}] = 0 \quad , \quad Q^{ep} = N \cdot E_{ep}^{HRFA} \cdot N \quad (3)$$

siendo E_{ep}^{HRFA} el tensor constitutivo elastoplástico del HRFA y N la dirección normal a la discontinuidad. Realizando el análisis numérico de la condición de falla localizada es posible obtener las direcciones críticas en las que se produce la discontinuidad. A modo de ejemplo en la Fig. (2) se muestra los resultados obtenidos para ensayos de tracción, compresión y corte con proporción de fibra variable desde 0% (hormigón simple) hasta 4%. Pueden compararse los ángulos de localización para fibras orientadas a 30°, 45°, 60° respecto de la horizontal.

4. ALGORITMOS PARA EL SEGUIMIENTO DE LA DISCONTINUIDAD

Para la aplicación del EFEM es necesario determinar el camino de la discontinuidad en los elementos en base a la información obtenida en los puntos de Gauss. Para obtener la línea de discontinuidad se pueden aplicar dos procedimientos, (i) *elemento a elemento* consiste en establecer de a un elemento por vez la dirección de la discontinuidad mediante, por ejemplo, un análisis de localización de la falla y a partir del primero ir trazando la trayectoria teniendo como información previa un punto de paso de la misma en el escalón de carga anterior y la dirección determinada por el análisis de localización. Es una estrategia muy eficiente y robusta con una excelente capacidad para problemas bidimensionales, ([Oliver, 1995](#)), (ii) *seguimiento global* propuesto por [Oliver \(2002\)](#), se basa en considerar las direcciones normales críticas obtenidas de un análisis de bifurcación discontinua y a partir de éstas crear una familia de curvas bi ó tridimensionales que representan todas las posibles direcciones de propagación de las discontinuidades y luego seleccionar aquellas que representan las condiciones del problema a resolver. Esto se realiza mediante una analogía con un problema de conducción del calor, lo que facilita la percepción del mismo. En este trabajo se aplicó este enfoque y todos los detalles de la implementación pueden consultarse en [Gerez y Vrech \(2018\)](#).

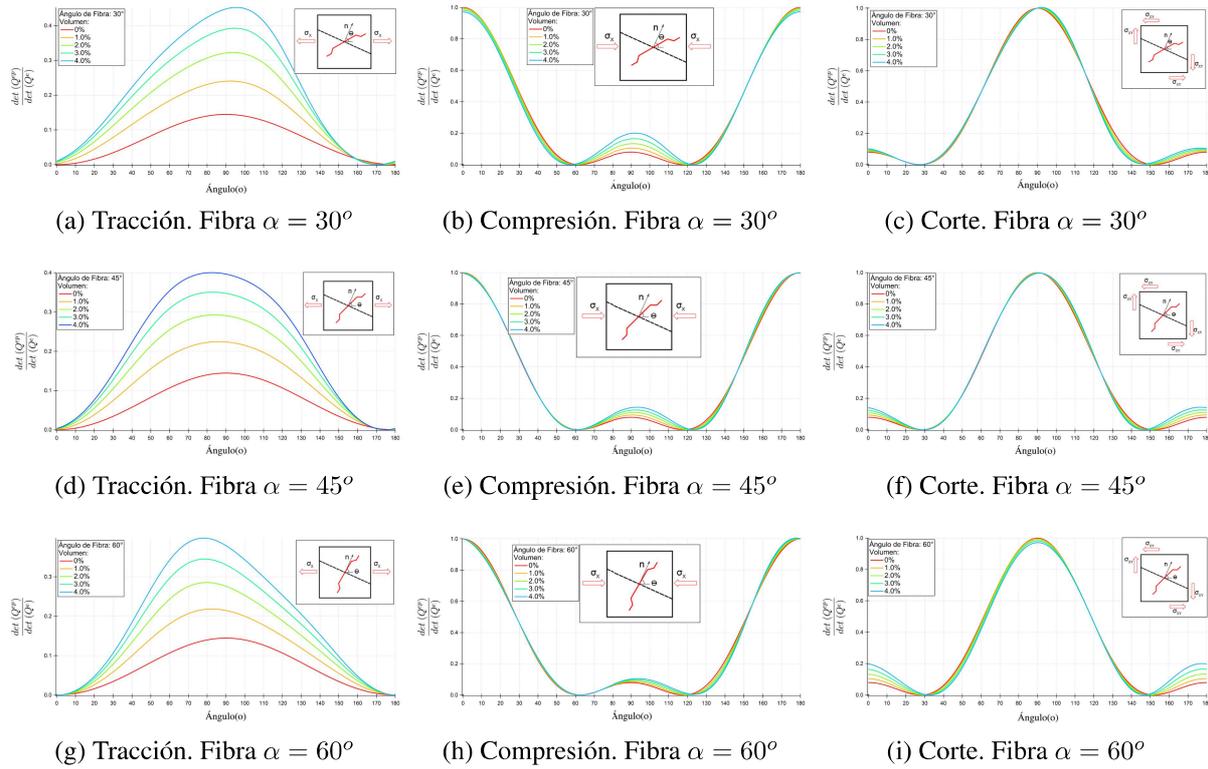


Figura 2: Ángulos críticos de localización para una probeta de HRFA con proporciones de fibra del 0 al 4 % sometida a tracción, compresión y corte simple.

5. MODELO CONSTITUTIVO PARA EL MATERIAL CONTINUO

En la formulación constitutiva propuesta se considera al HRFA como un material compuesto por una matriz de hormigón y fibras de acero, y está basada en la Teoría de Mezclas de [Truesdell y Toupin \(1960\)](#) que supone la igualdad de los campos cinemáticos del continuo equivalente y sus componentes en un volumen infinitesimal. A partir de estas consideraciones el tensor constitutivo elástico se calcula de acuerdo a

$$\mathbf{E}^{HRFA} = \omega^m \mathbf{E}^m + \omega_i^f (\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i) \otimes (\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{r}_i) E^f + \omega_i^f 2 [(\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{s}_i)^s \otimes (\mathbf{r}_i \otimes \mathbf{s}_i)^s] G^f \quad (4)$$

donde ω^m y ω_i^f representan la fracción volumétrica de hormigón y fibras en la dirección \mathbf{r}_i respectivamente, mientras \mathbf{s}_i es la dirección normal a \mathbf{r}_i , \mathbf{E}^m es el tensor constitutivo elástico correspondiente al hormigón, E^f y G^f son los módulos de elasticidad axial y transversal de las fibras, respectivamente. Del mismo modo, las tensiones en el compuesto se definen como

$$\boldsymbol{\sigma}_{HRFA} = \omega^m \boldsymbol{\sigma}^m + \omega_i^f (\sigma_{N_i}^f \mathbf{r}_i + \sigma_{T_i}^f \mathbf{s}_i) \quad (5)$$

Para la matriz de hormigón se considera el comportamiento elastoplástico siendo $\boldsymbol{\sigma}^m = \mathbf{E}^m : (\boldsymbol{\epsilon}_e^m - \boldsymbol{\epsilon}_p^m)$, con $\boldsymbol{\epsilon}_e^m$ y $\boldsymbol{\epsilon}_p^m$ los tensores de deformación elástico y plástico, respectivamente. Se adopta el criterio de falla de Drucker-Prager parabólico y el potencial plástico, de acuerdo a

$$F(I_1, J_2) = J_2 + \alpha I_1 - k = 0 \quad \text{y} \quad F^*(I_1, J_2) = J_2 + \eta \alpha I_1 - k = 0, \quad (6)$$

siendo I_1 el primer invariante del tensor de tensiones J_2 el segundo invariante del tensor desviador de tensiones, mientras η es el parámetro de no asociatividad. Los parámetros α y k se

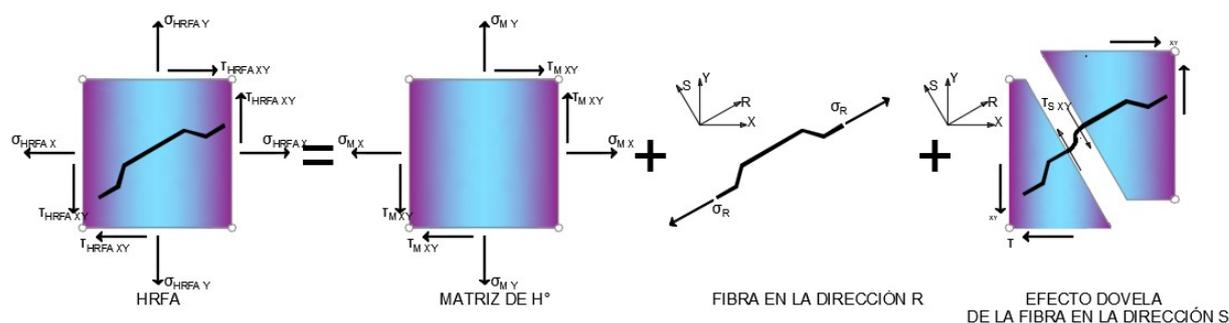


Figura 3: Modelo constitutivo del material compuesto.

calibran respecto de las resistencia a compresión y tracción del hormigón f_c y f_t , respectivamente, resultando $\alpha = \frac{f_c - f_t}{3}$ y $k = \frac{f_c f_t}{3}$. La función de carga y la evolución de las tensiones disipativas en modo de compresión pueden consultarse en Vrech et al. (2016). El comportamiento de las fibras fuera de la discontinuidad se considera elástico, siendo $\sigma_N^f = E^f \varepsilon_N^f$ y $\sigma_T^f = G^f \varepsilon_T^f$ con ε_N^f y ε_T^f , las deformaciones elásticas normales y tangenciales de las mismas, respectivamente.

6. LEYES CONSTITUTIVAS EN LA DISCONTINUIDAD

Una vez detectada la falla localizada, se inicia la apertura de la fisura de la matriz de hormigón y la interacción matriz de hormigón-fibras de acero mediante los efectos de deslizamiento (axiales) y dovela (corte). En esta sección se describirá en la ley cohesiva que caracteriza el comportamiento de la matriz de hormigón y los modelos de deslizamiento y efecto dovela para las fibras. El modelo constitutivo del material compuesto se esquematiza en la Fig. (3).

6.1. Ley cohesiva para el hormigón

Para definir el aporte de la matriz cementicia en la fractura se considera para la ley cohesiva normal la expresión de tipo exponencial

$$\mathbf{T}_{\Gamma m}^N = f_t \exp(-a_n \| u_N \|), \quad (7)$$

siendo $\| u_N \|$ la apertura normal de la fisura y a_n es un parámetro que tiene en cuenta la energía de fractura. Para la ley cohesiva tangencial se utiliza una función lineal afectada por un factor de retención de corte q_m propuesto por Suidan y Schnobrich (1984), $\mathbf{T}_{\Gamma m}^{TG} = q_m \| u_{TG} \|$ siendo $\| u_{TG} \|$ el desplazamiento tangencial de la discontinuidad.

6.2. Modelo de deslizamiento de las fibras

El comportamiento axial de las fibras se representa mediante una función unidimensional de tipo Rankine $F^N = \sigma_N^f - \sigma_u^{pull-out} = 0$. Los parámetros necesarios para este modelo son la tensión máxima de adherencia fibra-matriz cementicia $\sigma_u^{pull-out}$, el módulo elástico de la interfaz E_i^f que puede ser obtenido mediante un ensayo de pull-out y el módulo elástico de la fibra de acero E^f , ver Oliver et al. (2008).

6.3. Efecto de dovela de la fibra

Del mismo modo para tener en cuenta el efecto dovela que se genera entre matriz de hormigón y las fibras al aplicar una fuerza de corte, se utiliza una función de falla unidimensional.

Para ello es necesario definir el módulo de elasticidad transversal G^f y una tensión límite de corte τ_y^f . La determinación de estos parámetros se basa en la analogía con el problema de una viga semi-infinita en una fundación elástica, ver [El-Ariss \(2007\)](#). Para determinar la tensión máxima de corte por el efecto dovela se utiliza la relación

$$\tau_y^f = \frac{k_{dow} d_f^2 \sqrt{f_c \sigma_f}}{A_f}, \quad (8)$$

donde d_f es el diámetro de la fibra, A_f es su sección y σ_f la tensión menor entre la tensión de la interface y de la fibra. Se adopta el valor de $k_{dow} = 1,27$ según los trabajos de [Dulacska \(1972\)](#).

7. EJEMPLOS

En esta sección se resumen los resultados obtenidos de las simulaciones numéricas del modelo constitutivo propuesto. En primer lugar se muestran los resultados del análisis de un elemento sometido a estados simples de tracción, compresión y corte. Se validan las predicciones numéricas con los datos experimentales provistos por [Suwannakarn \(2009\)](#) a tracción, [Chern et al. \(1992\)](#) a compresión y [Mirsayah y Banthia \(2002\)](#) a corte. En las Figs. (4) a (6) se muestran las simulaciones de los casos citados.

Para poder demostrar la capacidad del modelo de predecir fractura se utiliza el ensayo de corte Push-off con los parámetros materiales provistos por [Barragán \(2002\)](#). En la Fig. (7a) se muestran las dimensiones de la probeta, en la Fig. (7b) la forma de falla del ensayo, donde se muestra la formación de la fisura principal y dos fisuras secundarias posteriores a la formación de la primera. En la Fig. (7c) se muestra la malla empleada y en las Figs. (7d) a (7g) la propagación de la fractura durante la simulación.

8. CONCLUSIONES

En este trabajo se presenta una formulación constitutiva para la simulación del comportamiento mecánico del HRFA a partir de la modificación del método EFEM, que no afecta la consistencia y robustez del mismo. Se aplica Teoría de Mezclas y se considera la posibilidad de disponer las fibras uniformemente tanto en la matriz como en la discontinuidad de acuerdo a direcciones determinadas.

El inicio y la trayectoria de la discontinuidad se basan en la condición de falla localizada y un algoritmo basado en el problema de la conducción del calor, respectivamente que muestran un buen grado de precisión.

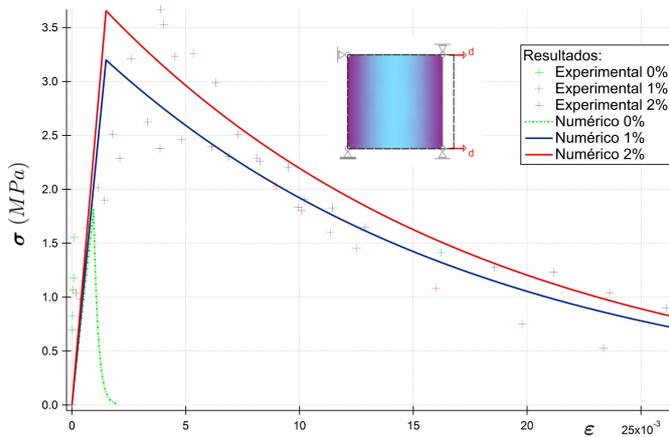
El modelo simula correctamente el comportamiento mecánico de la interacción matriz-fibras teniendo en cuenta el deslizamiento y el efecto dovela.

Teniendo en cuenta los resultados presentados, se demuestra la capacidad predictiva del modelo propuesto. Los resultados obtenidos son muy buenos en términos de curvas Tensión vs. Deformación y trayectoria de la fisura.

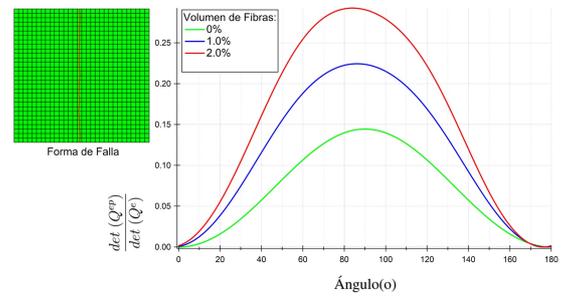
El modelo constitutivo se comporta adecuadamente tanto para representar la rigidez y el comportamiento previo a la formación de la fisura, como cuando ésta acontece.

REFERENCIAS

Armero F. Large-scale modelling of localized dissipative mechanisms in a local continuum: applications to the numerical simulation of strain localization in rate-dependent inelastic solids. *Mechanics of Cohesive-Frictional Materials*, 4:101 – 131, 1999.

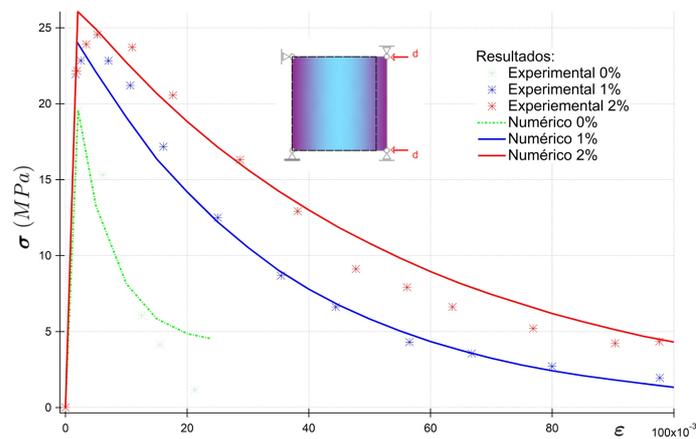


(a) Curva Tensión vs. Deformación

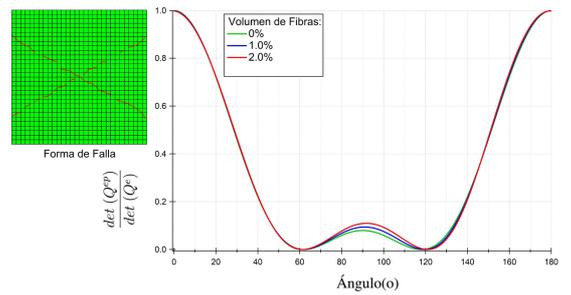


(b) Análisis de localización

Figura 4: Resultados para tracción simple.

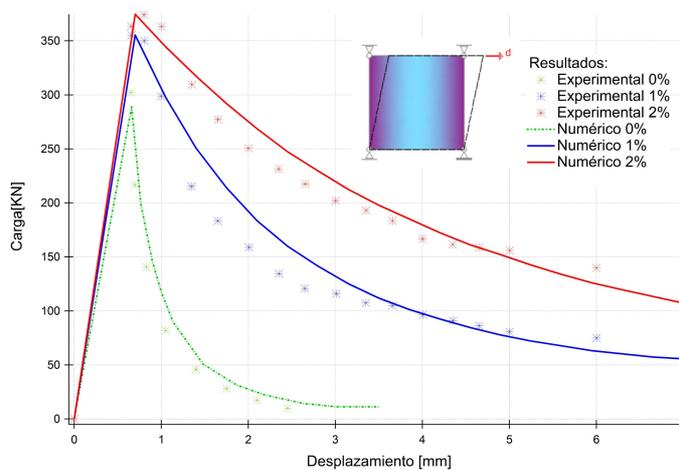


(a) Curva Tensión vs. Deformación

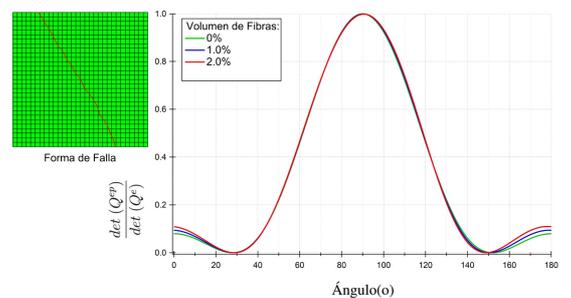


(b) Análisis de localización

Figura 5: Resultados para compresión simple.



(a) Curva Carga vs. Desplazamiento



(b) Análisis de localización

Figura 6: Resultados para corte simple.

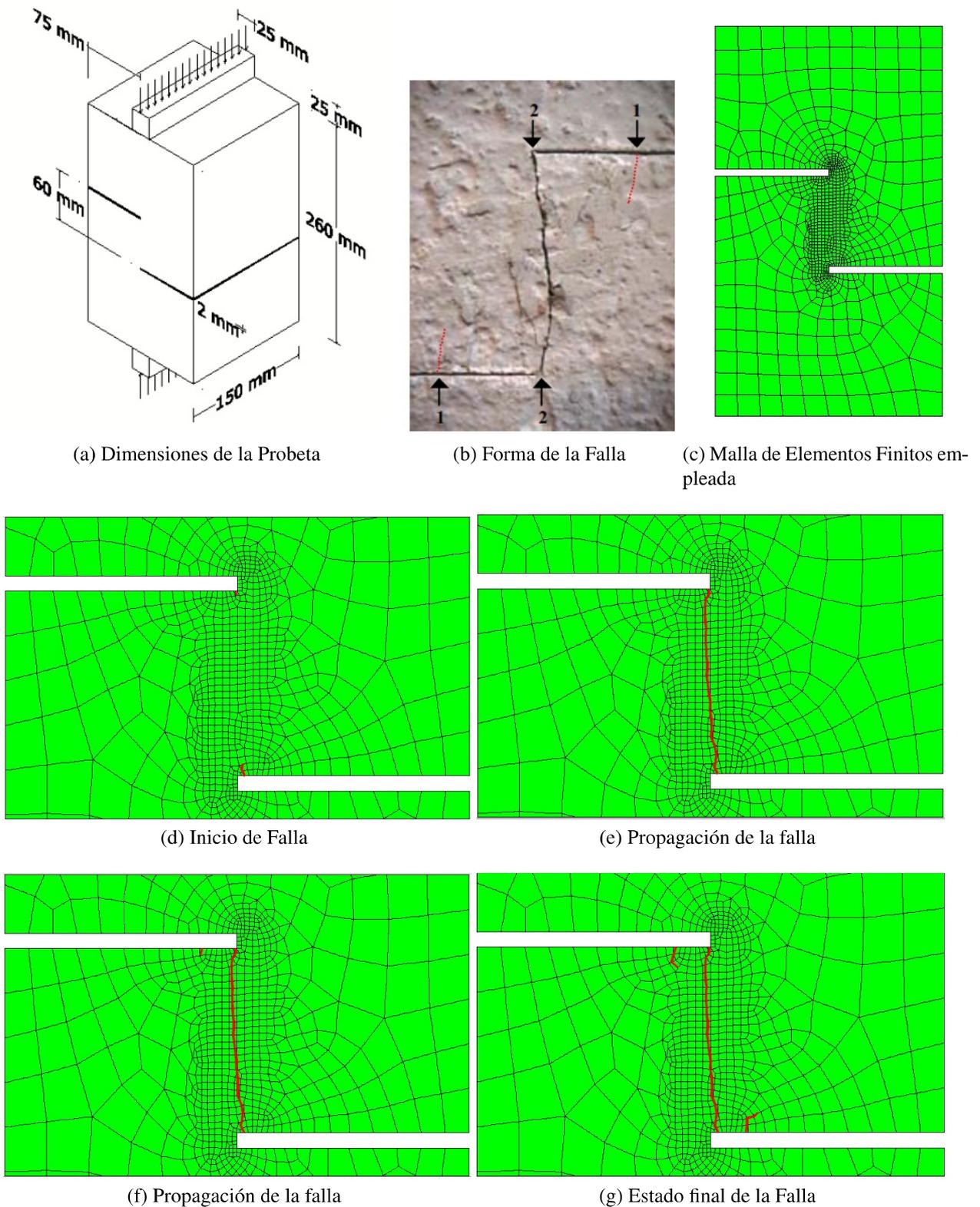


Figura 7: Resultados de la simulación numérica de la probeta Push-off.

- Barragán B.E. *Failure and Toughness of steel fiber reinforced concrete under tension and shear*. Tesis de Doctorado, Universidad Politécnica de Cataluña. España, 2002.
- Chern J., Yang H., y Chen H. Behavior of steel fiber-reinforced concrete in multiaxial loading. *ACI Material Journal*, 89(1):32–40, 1992.
- Cunha V., Barros J., y Sena Cruz J. An integrated approach for modelling the tensile behaviour of steel fibre reinforced self-compacting concrete. *Cem. and Concr. Res.*, 41(1):64–76, 2011.
- Dulacska H. Dowell action of reinforcement crossing cracks in concrete. *ACI Structural Journal*, 69(12):754–757, 1972.
- El-Ariss B. Behavior of beams with dowel action. *Eng. Struct.*, 29(6):899 – 903, 2007.
- Gerez M. y Vrech S. Comportamiento del hormigón modelado mediante elementos finitos enriquecidos EFEM. *Memorias del Congreso ENIEF*, XXXIV:2567–2582, 2016.
- Gerez M. y Vrech S. Hormigones reforzados con fibras de acero. Modelo numérico basado en EFEM. *Memorias del Congreso MECOM*, XXXVI:2591–3522, 2018.
- Kang J. y Bolander J. Multiscale modeling of strain-hardening cementitious composites. *Mechanics Research Communications*, 78, 2016.
- Lee D., Hwang J., Ju H., Kim K., y Kuchma D. Nonlinear finite element analysis of steel fibre-reinforced concrete members using direct tension force transfer model. *Finite Elements in Analysis and Design*, 50(0):266–286, 2012.
- Manzioli O., Oliver J., Huespe A., y Diaz G. A mixture theory based method for three-dimensional modeling of reinforced concrete members with embedded crack finite elements. *Computers and Concrete*, 5(6):401–416, 2008.
- Mirsayah A. y Banthia N. Shear strength of steel fiber-reinforced concrete. *ACI Material Journal*, 5:473–479, 2002.
- Oliver J. Continuum modelling of strong discontinuities in solid mechanics using damage models. *Computational Mechanics*, 17(1/2):49–61, 1995.
- Oliver J. Topics on failure mechanics. *Monograph CIMNE N68, Barcelona España*, 2002.
- Oliver J., Linero D., Huespe A., y Manzoli O. Two-dimensional modeling of material failure in reinforced concrete by means of a continuum strong discontinuity approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(5):332 – 348, 2008.
- Ottosen N.S. y Runesson K. Properties of discontinuous bifurcation solutions in elasto-plasticity. *Int. J. of Solids and Structures*, 27(4):401 – 421, 1991. ISSN 0020-7683.
- Pros A., Diez P., y Molins C. Modeling steel fiber reinforced concrete: numerical immersed boundary approach and a phenomenological mesomodel for concrete-fiber interaction. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 90(1):65–86, 2016.
- S. K. P. y Ramaswamy A. A finite element assessment of flexural strength of prestressed concrete beams with fiber reinforcement. *Cement Concrete Composites*, 24:229–241, 2002.
- Suidan M. y Schnobrich W. Finite element analysis of reinforced concrete. *Journal of Structural Division ASCE*, 29(2):1–42, 1984.
- Suwannakarn S.W. *Post-Cracking Characteristics of High Performance Fiber Reinforced Cementitious Composites*. Tesis de Doctorado, University of Michigan. EEUU, 2009.
- Truesdell C. y Toupin R. Principles of classical mechanics and field theory. *Encyclopedia of physics, Springer*, páginas 226–858, 1960.
- Vrech S., Etse G., y Caggiano A. Thermodynamically consistent elasto-plastic microplane formulation for fiber reinforced concrete. *International Journal of Solids and Structures*, 81, 2016.
- Zhan Y. y Meschke G. Analytical model for the Pullout behavior of straight and Hooked-end Steel Fibers. *Journal of Engineering Mechanics*, 140(12):04014091, 2014.