

## MOMENTO-CURVATURA DE SECCIONES DE HORMIGÓN ARMADO SISMORRESISTENTES UTILIZANDO REDES NEURONALES

Oscar Möller<sup>a</sup>, Ricardo O. Foschi<sup>b</sup>, Marcelo Rubinstein<sup>a</sup> y Laura M. Quiroz<sup>a</sup>

<sup>a</sup>*Instituto de Mecánica Aplicada y Estructuras (IMAE), Universidad Nacional de Rosario,  
Riobamba y Berutti, 2000 Rosario, Argentina, moller@fceia.unr.edu.ar*

<sup>b</sup>*Civil Engineering Department, University of British Columbia, 6250 Applied Sciences  
Lane, Vancouver, B.C., Canada V6T 1Z4, rowfal@civil.ubc.ca*

**Keywords:** Redes neuronales, Momento-curvatura, Análisis no lineal, Ingeniería Sísmica.

**Resumen.** En el análisis de la confiabilidad de sistemas estructurales no lineales bajo acciones sísmicas, donde es necesario aplicar métodos de simulación, resulta muy conveniente y efectivo aproximar la respuesta del sistema con un “sustituto” como es la técnica numérica de redes neuronales. En este trabajo se construyen redes neuronales para representar los valores medios y desvíos standard de los parámetros de la relación no lineal momento-curvatura de secciones de vigas y columnas, considerando como variables las dimensiones de la sección, materiales, cuantías de armadura, confinamiento y esfuerzo normal. Se considera adecuadamente la dispersión de los valores calculados con la red, y también la correlación obtenida entre los diferentes parámetros que caracterizan la relación momento-curvatura.

**Abstract.** For the reliability analysis of non linear structural systems under seismic actions, where simulation methods are needed to apply, it is convenient and effective to approximate the response of the system with a solver surrogate, like neural networks. In this paper neural networks are built to represent mean values and standard deviations of the parameters of non linear moment-curvature relationship of beam and column sections, where the variables are section dimensions, materials, ratio of reinforcement, confinement and ratio of axial force. It is considered properly the dispersion of the neural network results, and the correlation obtained between the parameters of the moment-curvature relationship.

## 1 INTRODUCCIÓN

El diseño sismorresistente actual se realiza dentro del marco de la “Ingeniería Sísmica basada en el desempeño”, SEAOC (1995), FEMA (1997), en el cual se definen varios “niveles de desempeño” con diferentes requisitos de diseño a cumplir en cada uno de ellos.

Las importantes incertidumbres presentes en las variables que gobiernan el problema hacen conveniente que la formulación se realice en términos probabilísticos, evaluando la probabilidad de falla, o de excedencia anual, de cada nivel de desempeño o estado límite.

Además, el problema es dinámico no lineal y no existe relación explícita entre los parámetros de respuesta estructural  $R(\mathbf{X})$  y las variables básicas  $\mathbf{X}$ . Entonces la evaluación de la probabilidad de falla debe realizarse por simulación, Melchers (1987), Thoft Christensen and Baker (1982), pero la tarea computacional es enorme, a veces impracticable. Por ejemplo para  $P_f \cong 10^{-3}$  son necesarias  $10^5$  a  $10^6$  simulaciones con análisis dinámico no lineal.

Un camino para superar estas dificultades es encontrar un *sustituto* del análisis completo por elementos finitos, Hurtado (2004), tal que con muy poca cantidad de análisis dinámico no lineal se puedan optimizar los parámetros del sustituto. Luego en el análisis de confiabilidad, cada vez que se requiera calcular la respuesta estructural  $R(\mathbf{X})$  se la aproxima con el sustituto  $F(\mathbf{X})$ , que es explícito y para su evaluación prácticamente no se consume tiempo.

En este sentido se ha empleado el *Método de la superficie de respuesta*, Möller (2001), Möller and Foschi (2003) con la siguiente expresión genérica:

$$R(\mathbf{X}) \cong F(\mathbf{X}) = a + \sum_{i=1}^N b_i X_i + \sum_{i=1}^N c_i X_i^2 = \sum_{i=1}^N w_i h_i(\mathbf{X}) \quad (1)$$

donde  $h_i(\mathbf{X})$  son funciones de potencia de las coordenadas y  $w_i$  parámetros que se optimizan a partir de conocer al menos  $2N+1$  valores de  $R(\mathbf{X})$ .

El problema es la ubicación de los puntos para evaluar  $R(\mathbf{X})$  y éstos deben estar próximos al punto de diseño para aproximar correctamente la función  $F(\mathbf{X})$  en la zona de mayor contribución a la probabilidad de falla. Se recurre a procesos iterativos, o a valoraciones globales de  $F(\mathbf{X})$  haciendo cumplir requisitos del problema, Möller y Rubinstein (2004).

Esta técnica tiene características de (i) Funciones  $h_i(\mathbf{X})$  son no adaptables al no depender de los puntos elegidos para definir  $F$ . La responsabilidad de la aproximación es únicamente de los pesos  $w_i$ , y entonces el modelo es muy sensible a la ubicación de dichos puntos que determinan los valores de  $w_i$ ; (ii) Funciones  $h_i(\mathbf{X})$  son no flexibles debido a que tienen efecto sobre todo el dominio y los errores que pueda haber en alguna evaluación de  $R(\mathbf{X})$  afectan a toda la aproximación.

También se han aplicado las *Teorías de aprendizaje estadístico*, Hurtado (2004), y en particular el algoritmo de *Redes neuronales*, Foschi et al.(2002), Zhang (2003), Hurtado (2004), Zhang and Foschi (2004), Möller et al.(2005a,b), cuyo nombre se debe a la similitud con el funcionamiento de estructuras biológicas y de ahí el nombre también utilizado de *Inteligencia artificial*.

La expresión genérica es

$$R(\mathbf{X}) \cong F(\mathbf{X}) = h \left( \sum_{k=0}^m w_k h \left( \sum_{i=1}^N w_{ki} X_i \right) \right) \quad (2)$$

donde  $h(t) = 1 / (1 + \exp(-t))$  es una función no lineal llamada sigmoide.

Se mejoran las características del método de la superficie de respuesta ya que el modelo de redes neuronales es (i) Adaptable: los parámetros de las funciones son determinados por los puntos utilizados en la optimización de la red ; (ii) Flexible: la región activa de cada función base  $h_i(t)$  es limitada, de manera que valores de X alejados de su zona de influencia no producen resultados de significación. Así los errores o diferencias en algún punto no se difunden ; (iii) Capacidad para *aprender* de la experiencia y ejemplos: la red se entrena a partir de un conjunto de datos y resultados conocidos del análisis completo del sistema.

Dentro del análisis de la vulnerabilidad sísmica de estructuras de barras, es importante la relación no lineal momento-curvatura de las secciones que conforman los elementos estructurales. Esta relación se caracteriza por una curva envolvente definida por los siguientes parámetros, Möller (2001): momento de fluencia  $M_y$ , rigidez  $EI$ , momento máximo  $M_m$ , curvatura última  $\phi_u$ , pendiente de endurecimiento  $hEI$  (desde  $M_y$  a  $M_m$ ) y pendiente de ablandamiento  $sEI$  (desde  $M_m$  hasta  $\phi_u$ ), y también definida por reglas de histéresis.

Para obtener rápidamente los parámetros que definen esta relación, en este trabajo se desarrollan redes neuronales entrenadas a partir de un conjunto limitado de casos resueltos con análisis no lineal cíclico momento-curvatura.

Las aplicaciones se realizan sobre secciones rectangulares de vigas y columnas donde las variables aleatorias son las dimensiones, resistencia de los materiales, cuantías de armadura, confinamiento y grado de esfuerzo normal.

Los resultados son redes neuronales para valores medios y desvíos standard de los parámetros, y la matriz de coeficientes de correlación entre ellos. Se muestra la muy buena aproximación lograda entre los resultados del análisis cíclico y los calculados con la red neuronal.

## 2 RELACIÓN MOMENTO-CURVATURA DE SECCIONES DE H°A° CONFINADO

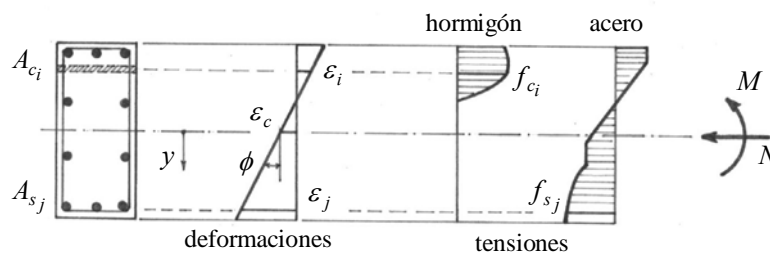
### 2.1 Análisis no lineal cíclico

El análisis del comportamiento momento flector-curvatura, para una carga axial constante, se realiza en forma incremental, Möller (2001). En cada paso se impone un incremento de curvatura, se determina por iteración la posición del eje neutro de manera de equilibrar el esfuerzo normal interno con el externo, y entonces se evalúa el momento flector asociado.

Como condición de compatibilidad se utiliza la ley de las secciones planas, ver fig.1.

$$\varepsilon_i = \varepsilon_c + \phi y_i \quad (3)$$

Para evaluar las condiciones de equilibrio, la sección se divide en franjas dispuestas perpendicularmente al plano de la flexión como se representa en la fig.1.



**Figura 1:** Deformaciones y tensiones en la sección dividida en franjas

Las ecuaciones de equilibrio son:

$$\begin{aligned}
 N_{ext} = N_{int} &= \sum_{i=1}^n A_{ci} f_{ci} + \sum_{i=1}^m A_{si} f_{si} \\
 M_{ext} = M_{int} &= \sum_{i=1}^n A_{ci} f_{ci} y_i + \sum_{i=1}^m A_{si} f_{si} y_i
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

donde el significado de los términos se puede ver en la fig.1.

Las relaciones constitutivas tensión-deformación del hormigón confinado y del acero siguen los modelos utilizados por Mander et al.(1984).

En forma incremental resulta

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\phi \\ \Delta\varepsilon \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta M_{int} \\ \Delta N_{int} \end{Bmatrix}
 \tag{5}$$

con  $S_{11} = \sum E_i A_i y_i^2$  ;  $S_{12} = S_{21} = \sum E_i A_i y_i$  ;  $S_{22} = \sum E_i A_i$  , siendo  $E_i$  el módulo tangente en correspondencia con  $\varepsilon_i$ .

En el proceso incremental la curvatura es llevada sucesivamente hasta  $+\phi_u$  y  $-\phi_u$  en 1 ciclo y en 4 ciclos. El caso de 1 ciclo es apropiado para análisis dinámico no lineal paso a paso donde el daño por disipación de energía es considerado durante el proceso dinámico. El caso de 4 ciclos es apropiado para análisis tipo push-over, donde la degradación con los ciclos ya se considera en el valor de  $\phi_u$ .

En cada caso la curvatura última se define cuando al final del proceso cíclico se alcanza justo algún estado límite: (i) Degradación del momento resistente en un 20%; (ii) Agotamiento de la capacidad de absorber energía por parte de la armadura transversal, esto determina la deformación última a compresión del hormigón; (iii) Deformación última de la armadura longitudinal, a tracción o a compresión.

### 2.2 Modelo de comportamiento histerético

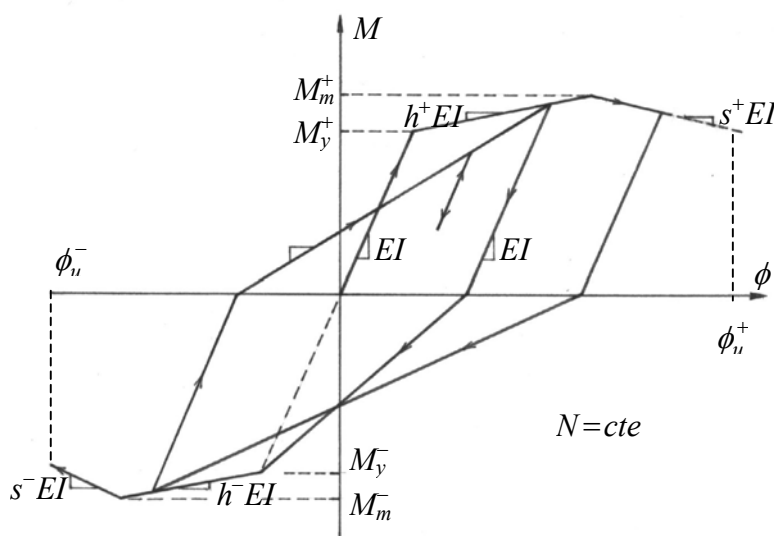


Figura 2: Modelo de comportamiento histerético momento – curvatura

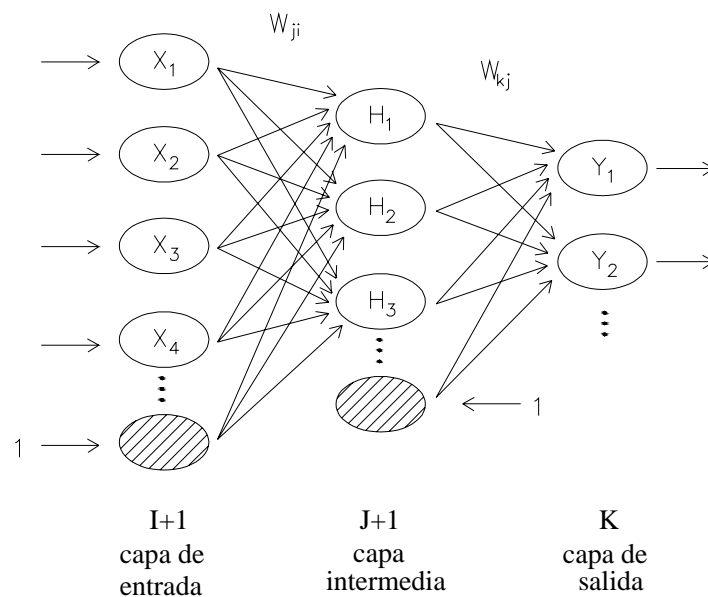
La relación momento curvatura obtenida con el proceso incremental descrito en 2.1, es utilizada para determinar los parámetros de un modelo simplificado que se muestra en la fig.2.

### 3 REDES NEURONALES

Las redes neuronales artificiales son dispositivos computacionales compuestos por una cantidad de unidades de procesamiento interconectadas. Cada una de ellas retiene información localmente y es capaz de realizar simples cálculos. La red en conjunto tiene la habilidad de responder frente a estímulos de entrada y producir las respuestas correspondientes, además puede adaptarse a diferentes situaciones aprendiendo de la experiencia.

#### 3.1 Aproximación de la respuesta

Existen muchos algoritmos de redes neuronales artificiales entre los cuales se encuentra el de “Red Neuronal Multicapa”. Este comprende los siguientes elementos básicos: una capa de neuronas de entrada, una o varias capas de neuronas intermedias u ocultas y una capa de neuronas de salida. Son las capas ocultas las que cumplen un rol fundamental en el entrenamiento de la red. Gracias a las mismas la red puede modelar relaciones no lineales entre las variables de entrada y de salida. En la fig.3 se muestra un esquema de la arquitectura de la red implementada en este trabajo.



**Figura 3:** Red neuronal multicapa

Las neuronas de la capa de entrada sólo reciben información, es decir los datos de entrada del problema, y la transmiten a las neuronas de la capa oculta. Estas procesan esta información y obtienen resultados parciales que luego son transmitidos a las neuronas de la capa siguiente, de salida. Estas últimas son las que producen las predicciones de la red.

Esta transferencia de información de neuronas de capas adyacentes se realiza a través de unos coeficientes de peso  $w$  y de una función de transferencia  $h(x)$ . Si en la fig.3 se considera que el número de neuronas en la capa de entrada, oculta y de salida son  $I+1$ ,  $J+1$  y  $K$  respectivamente; y que  $X_i^p$  es el  $p$ -ésimo dato de la  $i$ -ésima neurona de la capa de entrada,  $I_j^p$

el  $p$ -ésimo dato de la  $j$ -ésima neurona de la capa oculta,  $H_j^p$  el  $p$ -ésimo resultado de la  $j$ -ésima neurona de la capa oculta,  $I_k^p$  el  $p$ -ésimo dato de la  $k$ -ésima neurona de la capa de salida, e  $Y_k^p$  el  $p$ -ésimo resultado de la  $k$ -ésima neurona de la capa de salida, luego resultan las siguientes expresiones:

$$I_j^p = \sum_i^I w_{ji} X_i^p + w_{j0} \quad H_j^p = h(I_j^p) \quad (6)$$

$$I_k^p = \sum_j^J w_{kj} H_j^p + w_{k0} \quad Y_k^p = h(I_k^p) \quad (7)$$

donde  $w_{ji}$  son los factores de peso que conectan la  $i$ -ésima neurona de la capa de entrada en la  $j$ -ésima neurona de la capa oculta,  $w_{kj}$  son los factores de peso que conectan las neuronas  $j$ -ésima con la  $k$ -ésima y  $h(\cdot)$  es la función de transferencia dada por:

$$h(x) = \frac{1.0}{(1 + \exp(-x))} \quad (8)$$

La red es entonces entrenada presentándole una base de datos y resultados disponibles, optimizando los factores de peso  $w_{ji}$ ,  $w_{kj}$ . De acuerdo al principio de minimización del riesgo empírico logra minimizar la diferencia entre los resultados obtenidos con análisis estructural y los obtenidos con la red. Luego de ser entrenada, con los factores de peso ya optimizados, la red puede ser usada para predicciones.

### 3.2 Entrenamiento de la red

El primer paso es definir la arquitectura de la red, es decir el número de capas ocultas y el número de neuronas por capa. En este trabajo se utiliza una sola capa intermedia y una capa de salida con una única neurona, es decir que cada red sólo se utiliza para obtener un único resultado a partir de la información de entrada. El número de neuronas de la capa de entrada resulta de la cantidad de variables de entrada más una neurona, y puede tener un valor máximo de 50.

Para seleccionar las combinaciones de los valores de las variables de entrada que se utilizarán para entrenar la red, se aplica la teoría de diseño de experimentos, ver punto 4.

Existen relaciones empíricas entre el número óptimo de neuronas de la capa intermedia u oculta y el número de variables de entrada, pero en general debe determinarse de acuerdo a cada problema en particular.

En general una red con pocas neuronas en la capa intermedia no logra capturar las relaciones entre los datos y los resultados, mientras que una con muchas neuronas tiende a no poder generalizar para datos distintos a los de entrenamiento.

El número máximo de neuronas, para poder realizar el cálculo de los factores de peso, está en función del número de variables de entrada  $NINT$  y del número de conjunto de datos  $NDAT$

$$NEUMAX = \frac{0.8 NDAT - 1}{NINT + 2} \quad (9)$$

El proceso para encontrar el número óptimo de neuronas de la capa intermedia consiste en evaluar el error generalizado para diferente cantidad de neuronas desde 1 a  $NEUMAX$ , y adoptar la de menor error.

En cada arquitectura, el total de la muestra de datos y resultados se divide en 5 conjuntos,

de los cuales 4 se utilizan para entrenar la red, es decir el 80%, y el restante, 20%, para la validación de los resultados obtenidos. Se realizan 5 pruebas en las que se combinan los grupos de entrenamiento y de validación de a uno por vez, es decir para el primer caso el primer grupo para validación y los demás para entrenamiento, y así sucesivamente para los 5 grupos. En cada una de estas pruebas se determina el error generalizado (total), el cual se minimiza utilizando un algoritmo iterativo de retropropagación de errores. Es un método de gradiente descendente en el cual los factores de peso  $w$  se van optimizando iterativamente (aprendizaje) en forma proporcional a la diferencia entre los valores objetivos  $T_k$  (resultados disponibles) y las predicciones de la red  $Y_k$ .

Este error generalizado, sobre las muestras de entrenamiento y de validación, se calcula:

$$E = \frac{1}{2} \sum_p \sum_k (Y_k^p - T_k^p)^2 \quad (10)$$

Luego para minimizarlo se debe cumplir para los coeficientes de peso que conectan la capa oculta con la capa de salida:

$$w_{kj}(g+1) = w_{kj}(g) + \Delta w_{kj}(g) = w_{kj}(g) - \eta \frac{\partial E}{\partial w_{kj}} \quad (11)$$

donde  $g$  es el número de la iteración y  $\eta$  es la tasa de entrenamiento.

Usando la regla de derivación en cadena, se puede escribir:

$$\Delta w_{kj} = \eta \sum_p (Y_k^p - T_k^p) h'(I_k^p) H_j^p \quad (12)$$

Llamando:

$$\delta_k^p = (Y_k^p - T_k^p) h'(I_k^p) \quad (13)$$

Entonces (12) resulta:

$$\Delta w_{kj} = \eta \sum_p \delta_k^p H_j^p \quad (14)$$

Para las neuronas de la capa oculta, para las cuales no hay valores objetivos de salida, se propaga el error hacia atrás según el mismo criterio.

$$w_{ji}(g+1) = w_{ji}(g) + \Delta w_{ji}(g) = w_{ji}(g) - \eta \frac{\partial E}{\partial w_{ji}} \quad (15)$$

Usando la regla de derivación en cadena

$$\Delta w_{ji} = \eta \sum_p \sum_k (Y_k^p - T_k^p) h'(I_k^p) w_{kj} h'(I_j^p) X_i^p = \eta \sum_p \delta_j^p X_i^p \quad (16)$$

donde:

$$\delta_j^p = h'(I_j^p) \sum_k \delta_k^p w_{kj} \quad (17)$$

La tasa de entrenamiento  $\eta$  depende de cada problema, en general si es demasiado alta la red podrá no converger nunca al resultado para algunas muestras, si en cambio es demasiado baja la convergencia será muy lenta. En este trabajo se utilizó  $\eta = 0.01$ .

En este método de retropropagación el entrenamiento es rápido al principio pero luego se

hace lento en una región plana de la superficie del error. Para mejorar esta situación se fijan inicialmente los coeficientes de peso a valores pequeños y se agrega un segundo término de momento.

$$\Delta w(g) = -\eta \nabla E(g) + \alpha \Delta w(g-1) \quad (18)$$

donde  $g$  es el número de la iteración y  $\alpha$  es el denominado momento. En este trabajo se utilizó  $\alpha = 0.05$ .

El número de iteraciones límite  $g_{lim}$  para determinar el mínimo error generalizado en la selección del número óptimo de neuronas de la capa oculta es:

$$g_{lim} = NITET \sqrt{NHID} \quad (19)$$

siendo  $NITET$  una constante y  $NHID$  el número de neuronas de la capa intermedia. En este trabajo se utilizó  $NITET = 5000$ .

Una vez determinada la arquitectura óptima se procede al entrenamiento de la red. En primer lugar se divide de la misma forma la muestra en 5 subconjuntos y se utiliza el mismo algoritmo de retropropagación del error para actualizar los coeficientes de peso  $w$ . Se calcula el error relativo de entrenamiento y de validación para cada elemento de la muestra y se obtiene el mayor de todos.

$$\max E_{rel} = \max (Y_k^p - T_k^p) / T_k^p \quad (20)$$

En caso que este error máximo no sea inferior a un error límite de 10% se reordenan los grupos que se utilizaban para entrenar y para validar, ubicando a las muestras con mayores errores relativos en el conjunto de entrenamiento y a las que tenían errores menores en el de validación. Se vuelven a actualizar los coeficientes de peso  $w$  hasta que se cumpla la condición del error máximo del 10% o hasta un número de ciclos límite, igual a 50 para este trabajo.

#### 4 DISEÑO DE EXPERIMENTOS

Desde que la red “aprende” de las muestras presentadas a la misma, es necesario generar un número suficiente de muestras de entrenamiento.

Estas muestras deben cubrir todo el espacio de diseño desde el límite inferior al superior de cada variable. El problema de seleccionar aleatoriamente las muestras de las variables de diseño puede ser tratado con la teoría de diseño de experimentos, Zhang (2003).

Uno de los métodos de diseño es el de diseño óptimo basado en una grilla. Se comienza por escalar las variables a combinar al espacio [0;1] de la siguiente manera:

$$x_{ki} = \frac{X_{ki} - X_i^l}{(X_i^u - X_i^l)} \quad (21)$$

donde  $x_{ki}$  es la  $k$ -ésima muestra de la  $i$ -ésima variable en el espacio [0;1],  $X_i^l$  es el límite inferior de la  $i$ -ésima variable,  $X_i^u$  es el límite superior de la  $i$ -ésima variable, y  $X_k^i$  es la  $k$ -ésima muestra de la  $i$ -ésima variable en el espacio de diseño.

Para cada variable se define un límite inferior y un límite superior de acuerdo al dominio que se pretenda abarcar con la red neuronal. La distancia entre el límite inferior y superior se divide en sectores, por lo que se van generando hipercubos de caras rectangulares en el



espacio normalizado. Además se define el número de muestras en cada hipercubo. En caso de que alguna variable sea de mayor importancia que otras, se le asigna mayor cantidad de sectores.

Resulta así un número total de combinaciones dado por el número de variables, de sectores por variable y de muestras en cada hipercubo.

Con una secuencia de números aleatorios con distribución uniforme se generan las combinaciones de valores de las variables cubriendo los diferentes hipercubos. Este proceso se repite varias veces, calculándose en cada caso la mínima distancia entre todas las muestras generadas. Se elige finalmente el caso con distancia mínima mayor, evitando así el aglutinamiento de muestras.

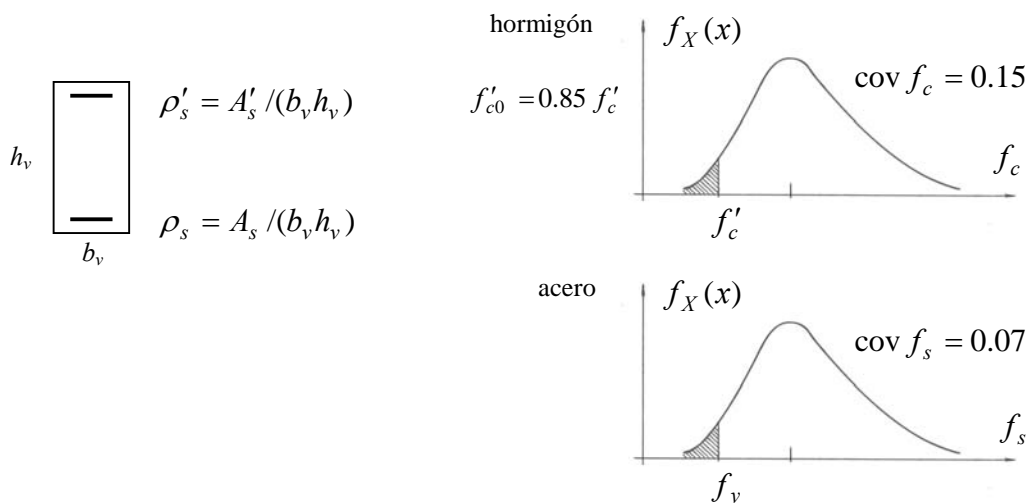
Por último las variables son escaladas al espacio de diseño. Estas transformaciones de variables se deben fundamentalmente a que las variables pueden tener distintas dimensiones, y calcular las distancias en el espacio original puede distorsionar la distribución de las muestras.

## 5 APLICACIONES

### 5.1 Secciones rectangulares de vigas

Para el entrenamiento de las redes se utilizan bases de datos y resultados del análisis no lineal cíclico momento-curvatura descrito en el punto 2.

Empleando la técnica de diseño de experimentos, ver punto 4, se generan en total 320 combinaciones de las siguientes variables: base de la sección  $b_v$ , altura de la sección  $h_v$ , tensión característica de rotura por compresión del hormigón  $f'_c$ , tensión característica de fluencia del acero  $f_y$ , cuantía de la armadura traccionada  $\rho_s$ , cuantía de armadura comprimida  $\rho'_s$ , y presión de confinamiento normalizada  $f_r / f'_{c0}$ , ver fig.4.



**Figura 4:** Secciones rectangulares de vigas

Los límites de las variables y los sectores considerados para cada una de ellas se indican en la tabla 1. Se trabaja con un único tipo de acero de  $f_y = 420 \text{ MPa}$ . Los valores de la resistencia del hormigón son  $f'_c = 20, 25, 30, 35, 40 \text{ MPa}$ , luego para cada tipo de hormigón se generan 64 muestras de las otras variables, colocando 2 muestras en cada hipercubo. De acuerdo a prescripciones reglamentarias se tiene en cuenta la relación  $\rho'_s \geq 0.5 \rho_s$ .

Descripción	Límite inferior	Límite superior	Nro. de sectores
$b_v$ : ancho sección	15 cm	30 cm	2
$h_v$ : altura sección	30 cm	70 cm	2
$f'_c$ : tensión caract. del hormigón	20 MPa	40 MPa	1
$\rho_s$ : cuantía traccionada	$\sqrt{f'_c} / (4 f_y)$	$(f'_c + 10) / (6 f_y)$	2
$\rho'_s$ : cuantía comprimida	$\sqrt{f'_c} / (4 f_y)$	$(f'_c + 10) / (6 f_y)$	2
$f_r / f'_{c0}$ : confinamiento	0.00	0.15	2

**Tabla 1:** Datos de las variables

En la tabla 2 se muestran, a modo de ejemplo, algunas de las combinaciones obtenidas.

Comb.N°	$b_v$ (mm)	$h_v$ (mm)	$f'_c$ (MPa)	$\rho_s$	$\rho'_s$	$f_r / f'_{c0}$
1	162	500	20	0.00501	0.00644	0.02520
2	213	600	25	0.00743	0.00528	0.01385
3	287	575	25	0.00982	0.00599	0.07707
4	198	416	30	0.01260	0.00842	0.11773
.....						
320	267	345	30	0.00804	0.01514	0.03596

**Tabla 2:** Combinaciones de las variables

Para cada una de las 320 combinaciones (64 x 5 valores de  $f'_c$ ) se obtienen 10 subcombinaciones ( $j$ ) considerando la aleatoriedad de las variables  $f'_c$  y  $f_y$ , con distribución lognormal y coeficiente de variación 0.07 para el acero y 0.15 para el hormigón.

Cada una de ellas es procesada con análisis cíclico momento-curvatura y los resultados son rectificadas de acuerdo al modelo descrito en 2.2, obteniéndose los parámetros  $R_i = M_{y_j}$ ,  $EI_j$ ,  $M_{m_j}$ ,  $\phi_{u_j}$ ,  $h_j$ ,  $s_j$  para la rama positiva y para la rama negativa.

Luego, para  $N = 10$ , se calculan los valores medios y desvíos standard con:

$$\bar{R}_i = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N R_{ki} \quad \sigma_{R_i} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (R_{ki} - \bar{R}_i)^2} \quad (22)$$

Los valores medios de los parámetros están correlacionados con:

$$\rho_{R_i R_j} = \frac{\sigma_{R_i R_j}}{\sigma_{R_i} \sigma_{R_j}} \quad \text{con} \quad \sigma_{R_i R_j} = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (R_{ki} - \bar{R}_i) (R_{kj} - \bar{R}_j) \quad (23)$$

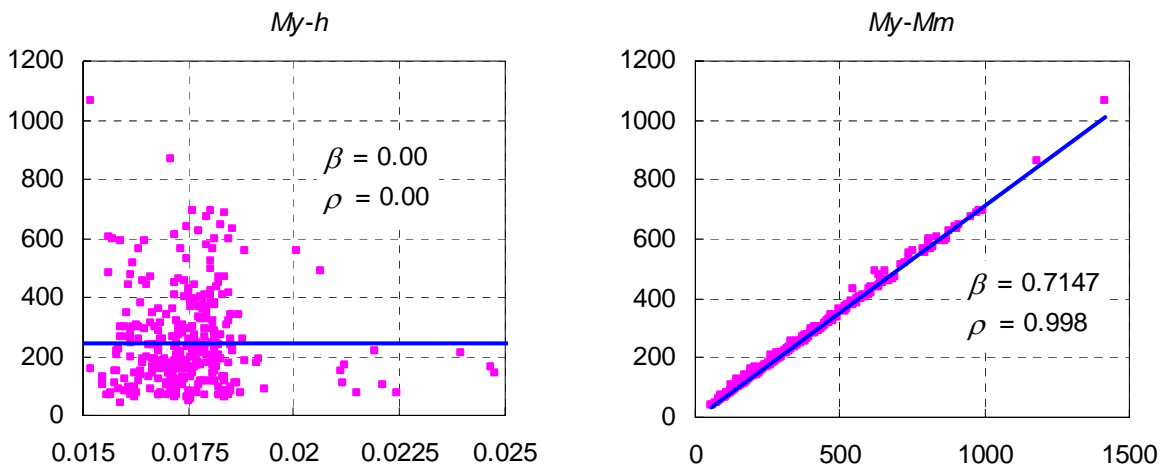
resultando:

	$EI^+$	$M_y^+$	$M_m^+$	$h^+$	$s^+$	$\phi_u^+$	$EI^-$	$M_y^-$	$M_m^-$	$h^-$	$s^-$	$\phi_u^-$
$EI^+$	1	0.967	0.972	0.001	0.016	-0.655	0.919	-0.839	-0.855	0.231	0.041	0.678
$M_y^+$		1	0.998	0.000	0.015	-0.553	0.845	-0.783	-0.804	0.230	0.052	0.581
$M_m^+$			1	-0.008	0.015	-0.554	0.861	-0.804	-0.825	0.224	0.057	0.585
$h^+$				1	0.031	-0.335	0.115	-0.157	-0.126	-0.148	-0.355	0.119
$s^+$					1	-0.020	0.046	-0.071	-0.067	0.017	-0.031	0.007
$\phi_u^+$						1	-0.687	0.601	0.595	-0.206	0.093	-0.894
$EI^-$							1	-0.962	-0.969	0.142	-0.009	0.670
$M_y^-$								1	0.998	-0.144	0.045	-0.572
$M_m^-$									1	-0.134	0.012	-0.564
$h^-$										1	0.012	0.438
$s^-$											1	-0.086
$\phi_u^-$												1

**Tabla 3:** Coeficientes de correlación

En la fig.5, como ejemplo, se representa la regresión lineal entre  $M_y - h$  y entre  $M_y - M_m$ . Llamando  $\beta$  a la pendiente de esta recta, el coeficiente de correlación en cada caso resulta

$$\rho_{R_i R_j} = \beta_{R_i R_j} \frac{\sigma_{R_j}}{\sigma_{R_i}} \tag{24}$$

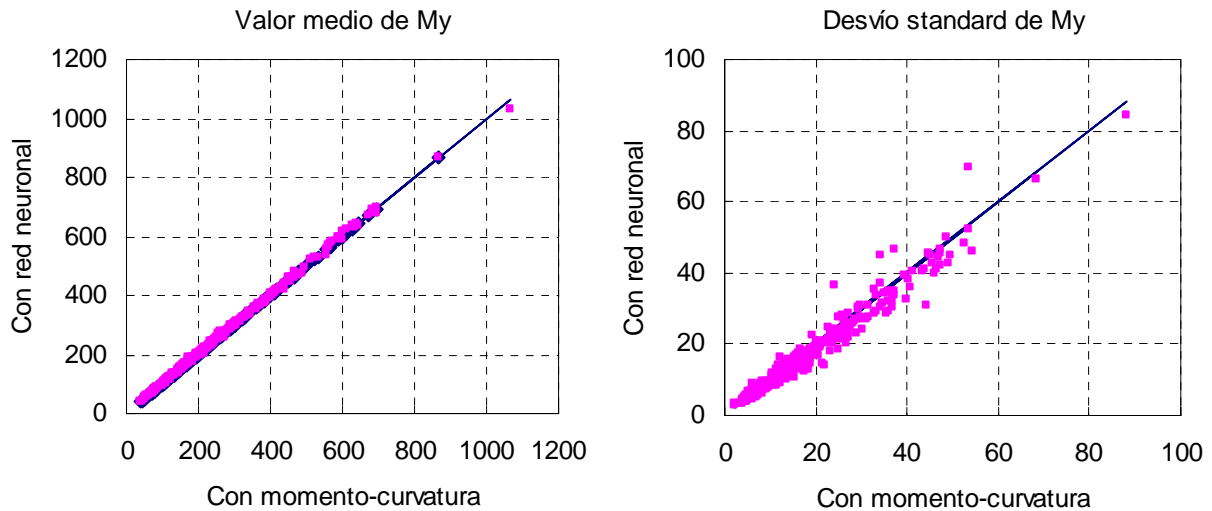


**Figura 5:** Correlación entre  $\overline{M}_y^+ - \overline{h}^+$  y  $\overline{M}_y^+ - \overline{M}_m^+$

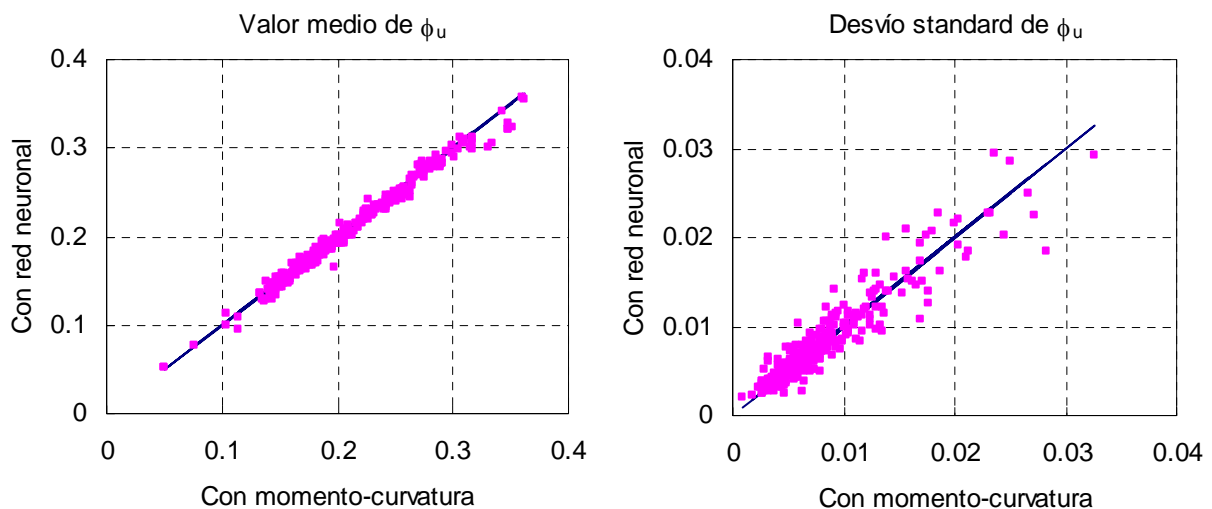
Siguiendo el procedimiento descrito en el punto 3 se entrenaron las redes neuronales que representan los valores medios y los desvíos standard de los parámetros que caracterizan la relación momento-curvatura.

Se observó que el error generalizado se estabilizaba para más de 25 neuronas de la capa intermedia, eligiéndose en consecuencia  $NHID_{max} = 25$ . Dentro de ese límite el número óptimo  $NHID$  resultó entre 20 y 25 neuronas.

En las figs. 6 a 8 se presentan algunas de las redes neuronales entrenadas, mostrándose los valores de los parámetros calculados con el análisis no lineal momento-curvatura y los calculados con la red.



**Figura 6:** Resultados para  $\bar{M}_y^+$  y  $\sigma_{M_y^+}$

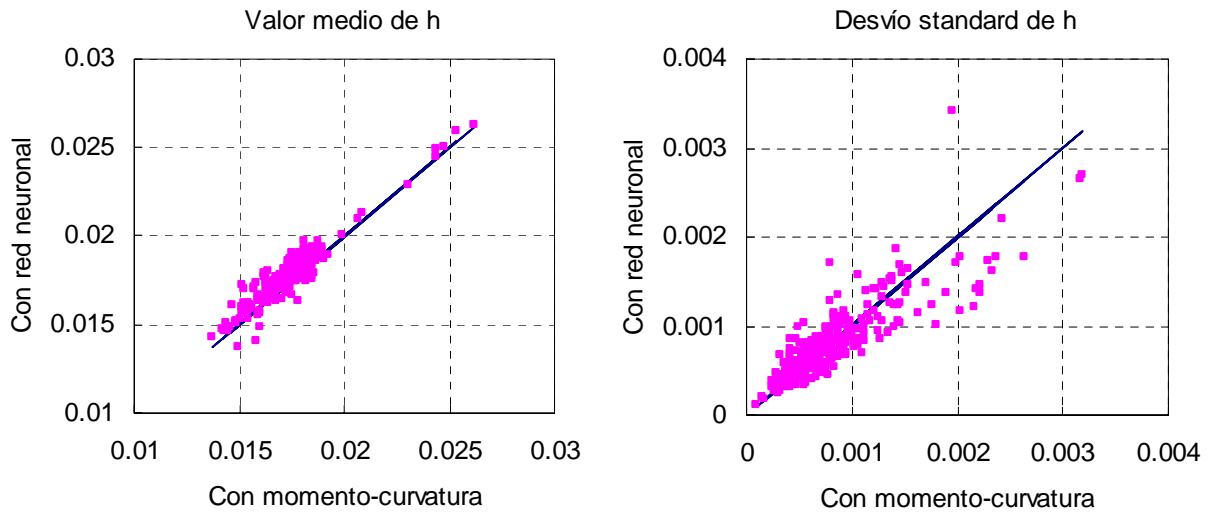


**Figura 7:** Resultados para  $\bar{\phi}_u^+$  y  $\sigma_{\phi_u^+}$

Se observa una muy buena representación de los valores de los parámetros con las redes neuronales, con menor dispersión en los valores medios que en los desvíos standard. Esa dispersión con respecto a los valores obtenidos del análisis momento-curvatura se puede cuantificar con el desvío standard del error relativo, que es un coeficiente de variación promedio, dado por:

$$\sigma_{\varepsilon_r} = \sqrt{\frac{1}{N_E - 1} \sum_{k=1}^{N_E} \left( \frac{Y_k - T_k}{T_k} \right)^2} \quad (25)$$

donde  $Y_k$  es el valor calculado con la red,  $T_k$  es el valor obtenido con momento-curvatura y  $N_E = 320$  el número de casos analizados.



**Figura 8:** Resultados para  $\bar{h}^+$  y  $\sigma_{h^+}$

Como se observa en las figs.6 a 8 los resultados  $Y_k$  se distribuyen sin preferencias hacia un lado y otro de  $T_k$ , de forma tal que puede adoptarse una distribución normal. Luego el valor medio y el desvío standard de los parámetros resulta:

$$\bar{R}_i = \bar{Y}_i (1. + \sigma_{\varepsilon_r} X_N) \quad \sigma_{R_i} = \sigma_{Y_i} (1. + \sigma_{\varepsilon_r} X_N) \quad (26)$$

donde  $\bar{Y}_i$ ,  $\sigma_{Y_i}$  son el valor medio y desvío standard del parámetro  $i$  calculado con la red neuronal correspondiente,  $\sigma_{\varepsilon_r}$  el desvío standard del error relativo (25), y  $X_N$  una variable aleatoria con distribución normal standard (0,1).

Finalmente el valor de cada parámetro  $i$  se calcula con:

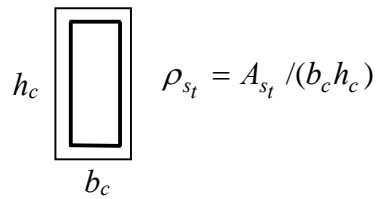
$$R_i = \bar{R}_i + \sigma_{R_i} X_{N_i} \quad (27)$$

donde las variables aleatorias  $X_{N_i}$  son normales standard correlacionadas con  $\rho_{R_i R_j}$  según ecuación (23).

## 5.2 Secciones rectangulares de columnas

Para el entrenamiento de estas redes también se utilizan bases de datos y resultados del análisis no lineal cíclico momento-curvatura descrito en el punto 2.

Con la técnica de diseño de experimentos se generan en total 320 combinaciones de las siguientes variables: base de la sección  $b_c$ , altura de la sección  $h_c$ , tensión característica de rotura por compresión del hormigón  $f'_c$ , tensión característica de fluencia del acero  $f_y$ , cuantía total de la armadura  $\rho_{s_t}$ , presión de confinamiento normalizada  $f_r / f'_{c0}$ , y nivel de esfuerzo normal  $N / (A_g f'_c)$ , positivo compresión, ver fig.9.

**Figura 9:** Secciones rectangulares de columnas

Los límites de las variables y los sectores considerados para cada una de ellas se indican en la tabla 4. Se trabaja con un único tipo de acero de  $f_y = 420 \text{ MPa}$ . Los valores de la resistencia del hormigón son  $f'_c = 20, 25, 30, 35, 40 \text{ MPa}$ , luego para cada tipo de hormigón se generan 64 muestras de las otras variables, colocando 2 muestras en cada hipercubo.

Descripción	Límite inferior	Límite superior	Nro. de sectores
$b_c$ : ancho sección	20 cm	40 cm	2
$h_c$ : altura sección	30 cm	1000 cm	2
$f'_c$ : tensión caract. del hormigón	20 MPa	40 MPa	1
$\rho_{st}$ : cuantía total	0.008	$18 / f_y$	2
$f_r / f'_{c0}$ : confinamiento	0.00	0.15	2
$N / (A_g f'_c)$ : nivel de esf. normal	-0.20	0.60	2

**Tabla 4:** Datos de las variables

En la tabla 5 se muestran, a modo de ejemplo, algunas de las combinaciones obtenidas.

Comb.Nº	$b_c$ (mm)	$h_c$ (mm)	$f'_c$ (MPa)	$\rho_{st}$	$f_r / f'_{c0}$	$N / (A_g f'_c)$
1	236	535	25	0.01773	0.04168	-0.14875
2	277	458	25	0.01899	0.01317	0.42010
3	321	526	30	0.01324	0.11747	0.53432
4	390	930	30	0.02055	0.02069	0.01213
.....						
320	361	718	40	0.00830	0.11916	0.23375

**Tabla 5:** Combinaciones de las variables

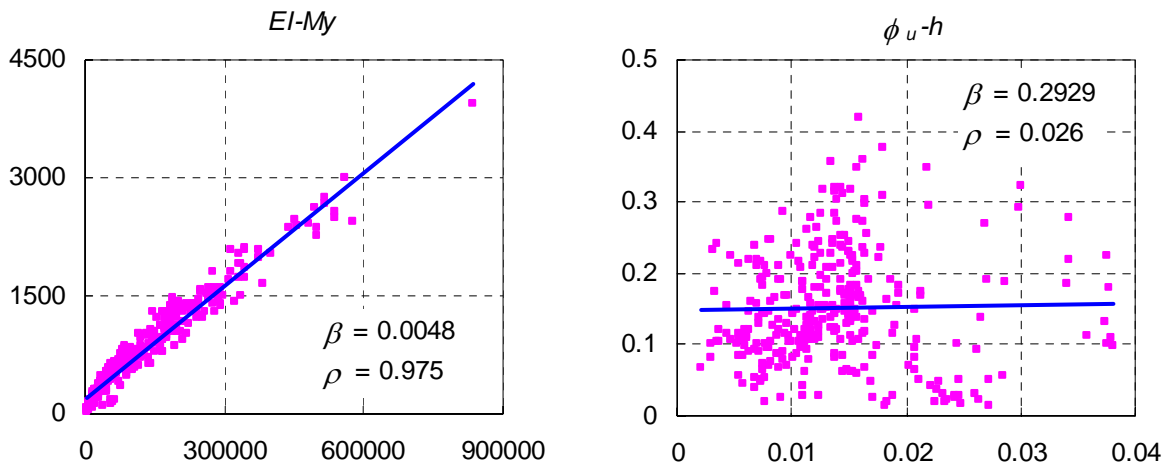
En forma similar al caso de secciones de vigas se realiza el análisis cíclico momento-curvatura y los resultados son rectificadas de acuerdo al modelo descrito en 2.2, obteniéndose los parámetros  $R_i = M_{y_j}, EI_j, M_{m_j}, \phi_{u_j}, h_j, s_j$  para la rama positiva y para la rama negativa.

La matriz de coeficientes de correlación entre los parámetros se muestra en la tabla 6.

	$EI^+$	$M_y^+$	$M_m^+$	$h^+$	$s^+$	$\phi_u^+$	$EI^-$	$M_y^-$	$M_m^-$	$h^-$	$s^-$	$\phi_u^-$
$EI^+$	1	0.975	0.958	-0.203	0.054	-0.522	1.000	-0.975	-0.958	-0.203	0.049	0.522
$M_y^+$		1	0.984	-0.260	0.078	-0.510	0.975	-1.000	-0.984	-0.259	0.074	0.510
$M_m^+$			1	-0.205	0.129	-0.439	0.958	-0.984	-1.000	-0.205	0.125	0.439
$h^+$				1	-0.104	0.026	-0.203	0.259	0.205	1.000	-0.114	-0.026
$s^+$					1	0.343	0.054	-0.078	-0.129	-0.104	0.992	-0.343
$\phi_u^+$						1	-0.522	0.510	0.439	0.026	0.353	-1.000
$EI^-$							1	-0.975	-0.958	-0.203	0.049	0.522
$M_y^-$								1	0.984	0.259	-0.074	-0.510
$M_m^-$									1	0.205	-0.125	-0.439
$h^-$										1	-0.114	-0.026
$s^-$											1	-0.353
$\phi_u^-$												1

**Tabla 6:** Coeficientes de correlación

En la fig.10, como ejemplo, se representa la regresión lineal entre  $EI - M_y$  y entre  $\phi_u - h$ .



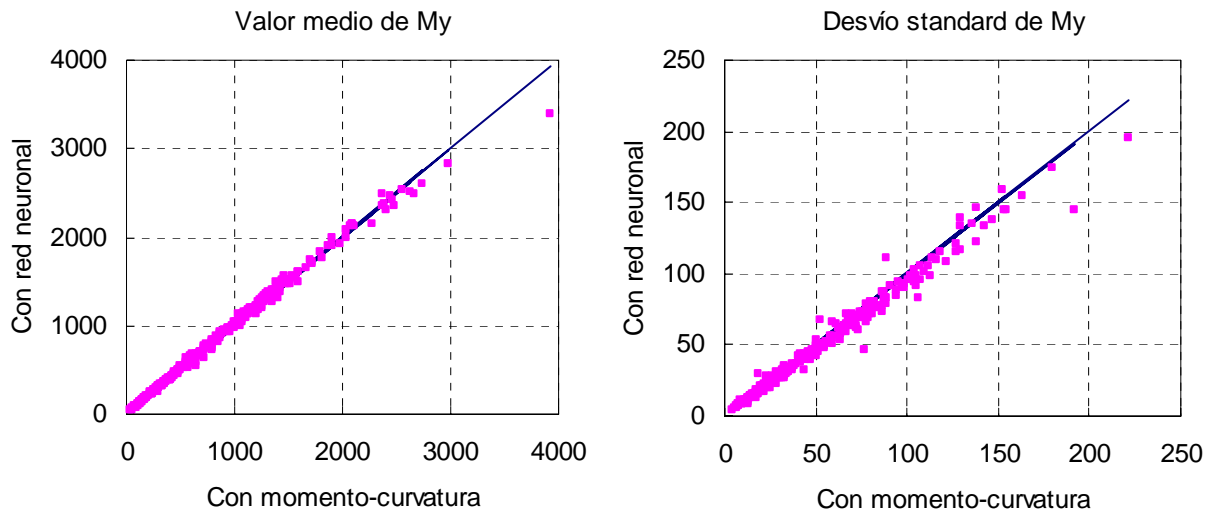
**Figura 10:** Correlación entre  $\overline{EI}^+ - \overline{M}_y^+$  y  $\overline{\phi}_u^+ - \overline{h}^+$

Siguiendo el procedimiento descrito en el punto 3 se entrenaron las redes neuronales que representan los valores medios y los desvíos standard de los parámetros que caracterizan la relación momento-curvatura.

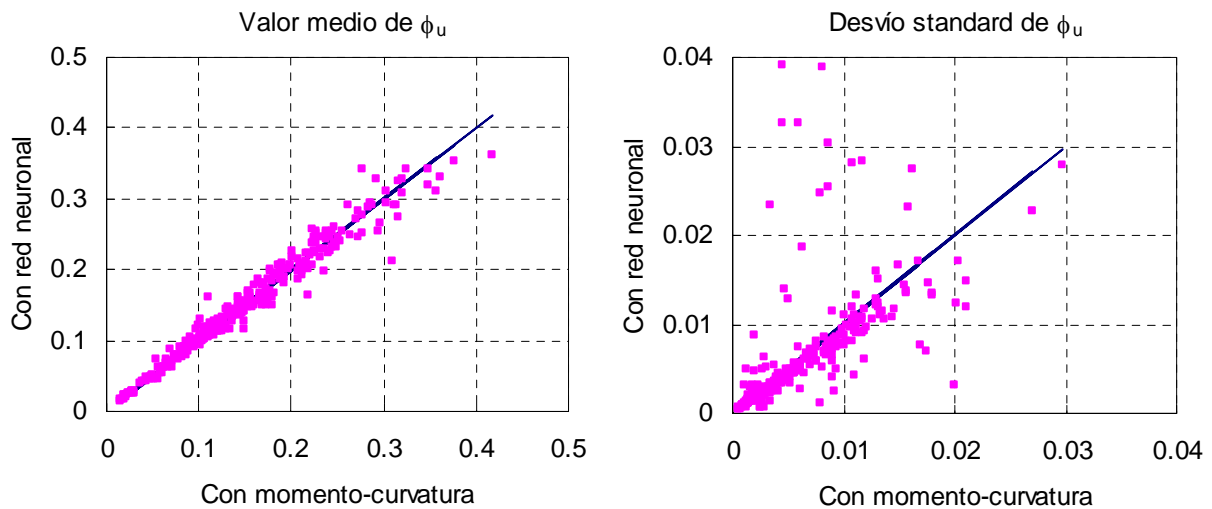
Al igual que en el caso de vigas, también se observó que el error generalizado se estabilizaba para más de 25 neuronas de la capa intermedia, eligiéndose en consecuencia  $NHID_{max} = 25$ . Dentro de ese límite el número óptimo  $NHID$  resultó entre 20 y 25 neuronas.

En las figs. 11 a 13 se presentan algunas de las redes neuronales entrenadas, mostrándose

los valores de los parámetros calculados con el análisis no lineal momento-curvatura y los calculados con la red.



**Figura 11:** Resultados para  $\overline{M}_y^+$  y  $\sigma_{M_y^+}$

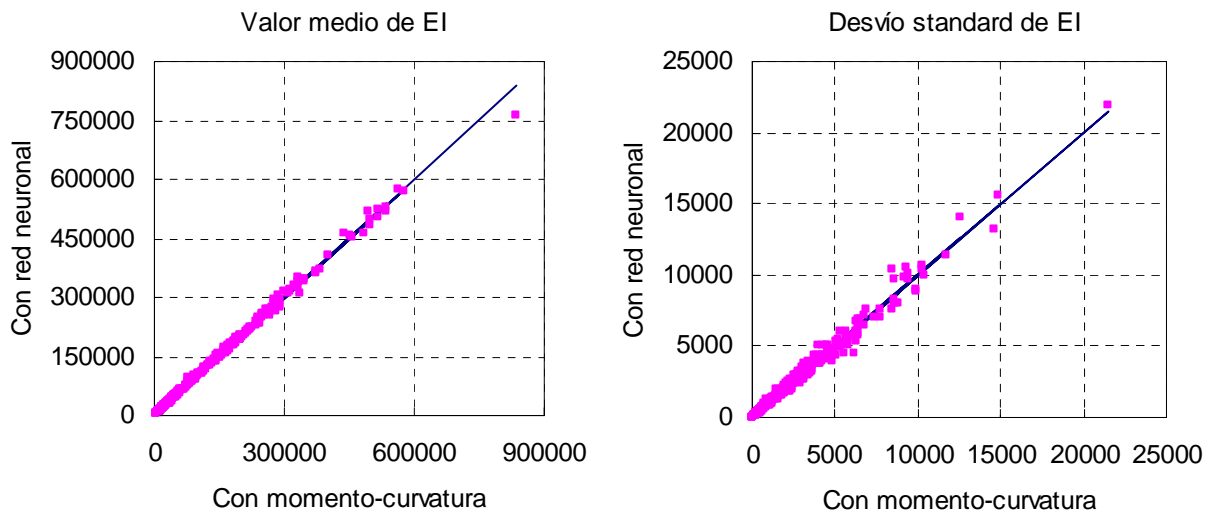


**Figura 12:** Resultados para  $\overline{\phi}_u^+$  y  $\sigma_{\phi_u^+}$

Se observa una muy buena representación con las redes neuronales de los valores medios de los parámetros. Para los desvíos standard se obtuvo buena concordancia en  $M_y$  y  $EI$ , presentándose mayor dispersión para la curvatura última  $\phi_u$ , donde evidentemente algunos casos no están bien representados por la red neuronal. De todas maneras esta dispersión con respecto a los valores obtenidos del análisis momento-curvatura se considera con el desvío standard del error relativo dado por la ecuación (25) y utilizada luego en la ecuación (26).

Finalmente el valor de cada parámetro  $R_i$  se calcula con (27).





**Figura 13:** Resultados para  $\overline{EI}^+$  y  $\sigma_{EI^+}$

## 6 CONCLUSIONES

- En el análisis de la confiabilidad estructural es muy conveniente aproximar la respuesta no lineal del sistema con un sustituto del análisis completo por elementos finitos. Se describe la aplicación de teorías de aprendizaje estadístico y en particular el algoritmo de redes neuronales.
- Esta técnica permite establecer la relación funcional no lineal entre la respuesta del sistema y las variables de entrada (datos) mediante simples operaciones matemáticas. Para ello se optimiza la arquitectura de la red y los valores de ciertos factores de peso a través de métodos iterativos basados en el descenso del gradiente, que minimizan la diferencia entre los resultados del análisis no lineal y los obtenidos con la red.
- Se aplicó a los parámetros que representan la relación no lineal cíclica momento-curvatura de secciones de hormigón armado sismorresistente para vigas y columnas, con amplios límites en las variables de dimensiones, cuantías de armadura, confinamiento, características de los materiales, y nivel de esfuerzo normal.
- Se realizó el análisis cíclico momento-curvatura para 320 combinaciones de las variables, utilizando para ello técnicas numéricas de diseño de experimentos, con subcombinaciones para tener en cuenta la aleatoriedad en las propiedades de los materiales. Entonces para cada combinación se encontró el valor medio y el desvío standard de los parámetros.
- Se entrenaron las redes neuronales para representar el valor medio y desvío standard de cada parámetro, obteniéndose una muy buena aproximación entre los resultados del análisis momento-curvatura y los calculados con la red neuronal. De todas maneras, la dispersión de los resultados de la red se tiene en cuenta con el desvío standard del error relativo, o coeficiente de variación promedio, que luego es considerado en la valoración del valor medio y desvío standard de cada parámetro.
- También se analizó la correlación entre los parámetros, calculándose la matriz de coeficientes de correlación, necesaria para llevar adelante procesos de simulación de la relación momento-curvatura de secciones de vigas y columnas.
- Todos estos resultados tienen aplicación directa en análisis de la confiabilidad de planos y

sistemas sismorresistentes formados por elementos de barra, donde en cada simulación los parámetros de las relaciones momento-curvatura se calculan utilizando estas redes neuronales, sin prácticamente consumo de tiempo.

## REFERENCIAS

- FEMA “NEHRP Guidelines for the seismic rehabilitation of buildings”, Report 273, *Buildings Seismic Safety Council*, 1997.
- Foschi, R., Li, H., Zhang, J. “Reliability and performance-based design: a computational approach and applications”, *Structural safety*, 24, 205-218, 2002.
- Hurtado, J., *Structural Reliability – Statistical Learning Perspectives*, Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics, Vol.17, Springer Verlag, 2004.
- Mander, J.B., Priestley, M.J.N. and Park, R. “Seismic design of bridge piers”. Research Report 84-2, Department of Civil Engineering, University of Canterbury, New Zealand, 1984.
- Melchers, R.E., *Structural Reliability - Analysis and Prediction*, John Wiley and Sons, 1987.
- Möller, O., “Metodología para evaluación de la probabilidad de falla de estructuras sismorresistentes y calibración de códigos”, Tesis de Doctorado en Ingeniería, Universidad Nacional de Rosario, 2001.
- Möller, O., Foschi, R. “Reliability evaluation in seismic design: a response surface methodology”, *Earthquake Spectra*, 19 (3), 579-603, 2003.
- Möller, O., Rubinstein, M. “Confiabilidad de sistemas estructurales bajo acciones sísmicas”, *Mecánica Computacional*, AMCA, Vol. XXIII, 499-514, 2004.
- Möller, O., Luchesi, L., Foschi, R.O., Rubinstein, M. “Redes neuronales aplicadas a dinámica de estructuras”, *Mecánica Computacional*, AMCA, Vol. XXIV, 797-812, 2005.
- Möller, O., Foschi, R.O., Rubinstein, M., Luchesi, L. “Comparación de métodos numéricos para aproximar la respuesta estructural en la evaluación de la confiabilidad de sistemas estructurales sismorresistentes”, *Memorias Congreso Chileno de Sismología e Ingeniería Antisísmica*, IX Jornadas, ACHISINA, CD. A10-06, 2005.
- SEAOC Vision 2000 Committee, “Performance based seismic engineering of buildings”. *Structural Engineers Association of California*, Sacramento, California, U.S.A., 1995.
- Thoft Christensen, P., Baker, M.J., *Structural Reliability - Theory and Applications*, Springer Verlag, 1982.
- Zhang, J. “Performance-based seismic design using designed experiments and neural networks”, Ph.D. Thesis, Department of Civil Engineering, University of British Columbia, Canada, 2003.
- Zhang, J., Foschi, R.O., “Performance-based design and seismic reliability analysis using designed experiment and neural networks”, *Probabilistic Engineering Mechanics*, 19, 259-267, 2004.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue realizado con los aportes de los Proyectos de Investigación “Confiabilidad de sistemas estructurales bajo sollicitaciones dinámicas”, 1ING142, de la Universidad Nacional de Rosario, Argentina, y “Natural networks for reliability and performance-based design in earthquake engineering”, Natural Science Engineering Research Council: RGPIN 5882-04, University of British Columbia, Vancouver, Canada.