

## DISEÑO ÓPTIMO DE METAMATERIALES ACÚSTICOS LOCALMENTE RESONANTES

### OPTIMAL DESIGN OF LOCALLY RESONANT ACOUSTIC METAMATERIALS

Patricia N. Dominguez<sup>a,b</sup>, Víctor H. Cortínez<sup>a,b,c</sup> y Martín E. Sequeira<sup>a</sup>

<sup>a</sup>*Centro de Investigaciones en Mecánica Teórica y Aplicada (CIMTA), Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Bahía Blanca, 11 de abril 461, 8000 Bahía Blanca, Argentina, vcortine@frbb.utn.edu.ar*

<sup>b</sup>*Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur, Av. Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina, pdoming@uns.edu.ar*

<sup>c</sup>*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnica, CONICET*

**Palabras clave:** Metamateriales localmente resonantes, diseño, homogeneización, densidad equivalente.

**Resumen.** En este trabajo se presenta una metodología para diseñar la configuración de metamateriales localmente resonantes que produzcan la maximización de la brecha de banda (donde el comportamiento de las ondas es evanescente) en un rango de frecuencias de interés. Para ello se formula el problema de propagación de ondas acústicas mediante un enfoque de homogeneización que permite describir el material heterogéneo como uno homogéneo con tensores equivalentes de rigidez y densidad. La identificación de la brecha de banda se realiza a partir del análisis de la definición positiva o negativa del tensor de densidad equivalente. La búsqueda y selección de los parámetros óptimos del metamaterial se realiza con la ayuda de un método heurístico de optimización.

**Keywords:** Locally resonant metamaterials, design, homogenization, equivalent density.

**Abstract.** This paper deals with a methodology for the design of locally resonant metamaterials in order to obtain the maximization of the bandgaps (where progressive acoustic waves cannot exist) in a frequency range of interest. To do this, the problem of propagation of acoustic waves is formulated by means of a homogenization approach that allows to describe the heterogeneous material as a homogeneous one with equivalent tensors of elasticity and density. Bandgap identification is performed by analyzing the negative or positive definition of the equivalent density tensor. To search and select the optimal metamaterial parameters a heuristic optimization method is used.

## 1 INTRODUCCIÓN

En años recientes, el estudio de los metamateriales acústicos localmente resonantes (MLR) ha adquirido enorme importancia por sus propiedades mejoradas para atenuar efectivamente la propagación de ondas acústicas o elásticas. En consecuencia, presentan importantes aplicaciones potenciales en el contexto del control de ruido y vibraciones, desde aplicaciones en ingeniería sísmica estructural hasta ingeniería acústica. Tales metamateriales están constituidos por heterogeneidades (resonadores) distribuidas de manera aproximadamente periódica en una matriz elástica de mayor rigidez. El comportamiento distintivo de los MLR es la formación de brechas de banda para ondas acústicas propagándose a través de los mismos. En tales brechas de banda, el carácter de las ondas puede ser solamente evanescente (no progresivo), lo que puede ser de gran utilidad para filtrar señales acústicas o elásticas preestablecidas. La naturaleza de este comportamiento se basa en el hecho de que las inserciones actúan como resonadores locales (o absorbedores dinámicos) generando eventualmente efectos de anti resonancia. Resulta de particular importancia en este fenómeno que los modos locales de las inserciones o resonadores distribuidos en la estructura interactúan con ondas que tienen una longitud mucho mayor que las correspondientes a los modos locales. Esto hace posible absorber ondas de frecuencia relativamente baja con inserciones de dimensiones más bien reducidas, a diferencia de otros tipos de metamateriales basados, por ejemplo, en resonancia de Bragg. En el campo de la ingeniería acústica los MLR revisten especial importancia para el diseño de paneles de aislación acústica, ya que pueden permitir la atenuación de sonido efectiva en bajas frecuencias con espesores relativamente pequeños comparados con los materiales tradicionales (Liu et al., 2000).

Para diseñar MLR que posean propiedades de atenuación acústica en los rangos de frecuencia deseados, es necesario el uso de modelos matemáticos suficientemente precisos que permitan estimar la localización y ancho de las brechas de banda, conociendo las propiedades geométricas y mecánicas de las inserciones. Además, tales modelos deben permitir evaluar el comportamiento estructural de los metamateriales, ya que éstos deben soportar las cargas relacionadas con su función.

En principio, la modelización matemática se basa en la resolución de las ecuaciones gobernantes de la mecánica de medios elásticos continuos mediante el método de elementos finitos (MEF). Sin embargo, dicho enfoque no resulta práctico debido a la gran cantidad de elementos que es necesario emplear para modelar la propagación de ondas en el medio heterogéneo considerado, ya que cada una de las inserciones debe ser densamente mallada. En consecuencia, ha sido de interés el desarrollo de metodologías más adecuadas. Uno de tales enfoques se basa en la teoría de Bloch-Floquet (Cheng et al., 2013; Krushynska et al., 2014) para el estudio de propagación de ondas en medios periódicos heterogéneos. Este enfoque reduce el estudio de las relaciones de dispersión de ondas en el medio periódico a una celda representativa.

Otro enfoque muy poderoso para el estudio de la propagación de ondas en MLR corresponde a la teoría de homogeneización (Auriault y Boutin, 2012). En éste, el material heterogéneo es aproximadamente modelado como uno homogéneo con características equivalentes de rigidez y densidad. Sin embargo, una característica singular de tal modelo es que la densidad equivalente tiene carácter tensorial y depende de la frecuencia. A diferencia del enfoque de Bloch-Floquet, el modelo de homogeneización puede también utilizarse para estudiar estructuras finitas en las cuales la atenuación de vibraciones puede ser influenciada por la geometría global y el tipo de condiciones de borde. En el contexto del estudio de propagación de ondas en MLR infinitos (sin considerar el efecto de bordes cercanos) el

modelo de homogeneización ofrece una forma muy conveniente de estudiar la existencia de brechas de banda, es decir, de analizar el carácter propagante o evanescente de las ondas acústicas en el MLR. El enfoque consiste en analizar la definición positiva o negativa de la densidad equivalente para la frecuencia de la onda acústica atravesando el MLR, ya que será posible su propagación sólo en el primer caso (Vondrejč et al., 2017; Cortínez y Domínguez, 2021).

Con los modelos apropiados de análisis mencionados es posible abordar el diseño óptimo de metamateriales acústicos. En general, el objetivo de tales diseños es la localización espectral adecuada y el ensanchamiento de las brechas de banda en términos de las características materiales y geométricas de las inserciones. Investigaciones en tal sentido se han comenzado a realizar en forma reciente. Entre los trabajos relevantes orientados al diseño óptimo de metamateriales pueden citarse a Sigmund y Jensen (2003) y a Dong et al. (2014), quienes formularon un enfoque de optimización topológica de cristales fonónicos en conjunto con la teoría de Bloch-Floquet. Los primeros también analizaron el problema en un dominio finito. Más recientemente, Roca et al. (2019) abordan tal problemática mediante un enfoque de homogeneización.

Si bien la optimización topológica permite encontrar diseños novedosos, en ocasiones conduce a geometrías de difícil fabricación con la tecnología actual, por lo cual una alternativa preferible consiste en la optimización de la forma del resonador bajo una topología fija. En tal sentido, algunos trabajos se orientaron al diseño de una forma específica de resonadores, tales como los enfoques de Krushynska et al. (2014) o Cheng et al. (2013). Un trabajo de especial importancia en este contexto es el de Vondrejč et al. (2017), quienes estudiaron la optimización de forma basados en el enfoque de homogeneización, especialmente en la condición positiva o negativa de la matriz de densidad equivalente. Este enfoque es suficientemente general y simple para efectuar tal diseño.

En este trabajo se presenta una metodología de diseño óptimo de metamateriales con el propósito de maximizar la amplitud de brecha de banda de ondas acústicas. El método se basa en la propuesta de Vondrejč et al. (2017) aunque procurando extender el tipo de configuración de las inserciones del MLR. Por otra parte, la formulación del diseño y la técnica de solución difieren de este último trabajo. Específicamente, se formula el problema de propagación de ondas acústicas en el MLR mediante una teoría de homogeneización similar a la de Auriault y Boutin, (2012). Con tal teoría se propone abordar el problema de diseño en dos etapas. En la primera, se busca la configuración óptima de cierta tipología de resonadores que produzcan la maximización de la brecha de banda en un rango de frecuencias de interés. En la segunda etapa se analiza dicho diseño a partir de un modelo de estructura finita (Cortínez y Domínguez, 2019) para evaluar otros aspectos tales como resistencia y rigidez estructural y además para calcular otros parámetros de interés acústico tales como la pérdida de transmisión del panel. Si alguno de los aspectos contemplados en la segunda etapa no fueran satisfactorios se modificarían las restricciones del problema y se procedería nuevamente con la primera etapa. Aquí se presenta solamente la primera etapa del enfoque de diseño. Para ello se hace uso del MEF para analizar el problema de vibraciones libres locales para cada configuración de prueba del resonador. Luego, a partir de las correspondientes autofunciones y de los autovalores se determina la densidad equivalente del MLR, cuyo análisis permite determinar la brecha de banda. Se comparan los resultados para diferentes configuraciones, guiando la búsqueda mediante una técnica heurística de optimización (Domínguez y Cortínez, 2018). Se describe el algoritmo computacional y se presentan ejemplos numéricos.

## 2 DINÁMICA DE METAMATERIALES ACÚSTICOS LOCALMENTE RESONANTES: MODELO HOMOGENEIZADO

Se considera una estructura construida por un material heterogéneo compuesto de inclusiones  $r$  distribuidas de manera aproximadamente periódica en una matriz  $s$  (Figura 1a). En la Figura 1b) puede apreciarse un esquema de cada inserción. Se utiliza la siguiente notación:  $\mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3)$  corresponde a las coordenadas globales de la estructura mientras que  $\mathbf{y}=(y_1, y_2, y_3)$  corresponde a las coordenadas locales de cada celda,  $\Omega, \Omega_c, \Omega_r, \Omega_s$ , denotan al volumen total, el de cada celda, el ocupado por el material rígido  $s$  de cada celda y el ocupado por la inclusión compuesta  $r$  de cada celda.  $\Gamma, \Gamma_e, \Gamma_r$  denotan la superficie de la estructura, la de la celda y la del resonador (inserción), respectivamente. En cada celda, la relación entre las coordenadas globales y locales se expresa como  $\mathbf{x}=\mathbf{x}_0+\mathbf{y}$ , donde  $\mathbf{x}_0$  es la coordenada del centroide de la celda. La arista de una celda típica se denota con  $l$ , mientras que la longitud característica de la estructura global con  $L$ . La relación entre ambas longitudes es  $\varepsilon=l/L(\ll 1)$ .

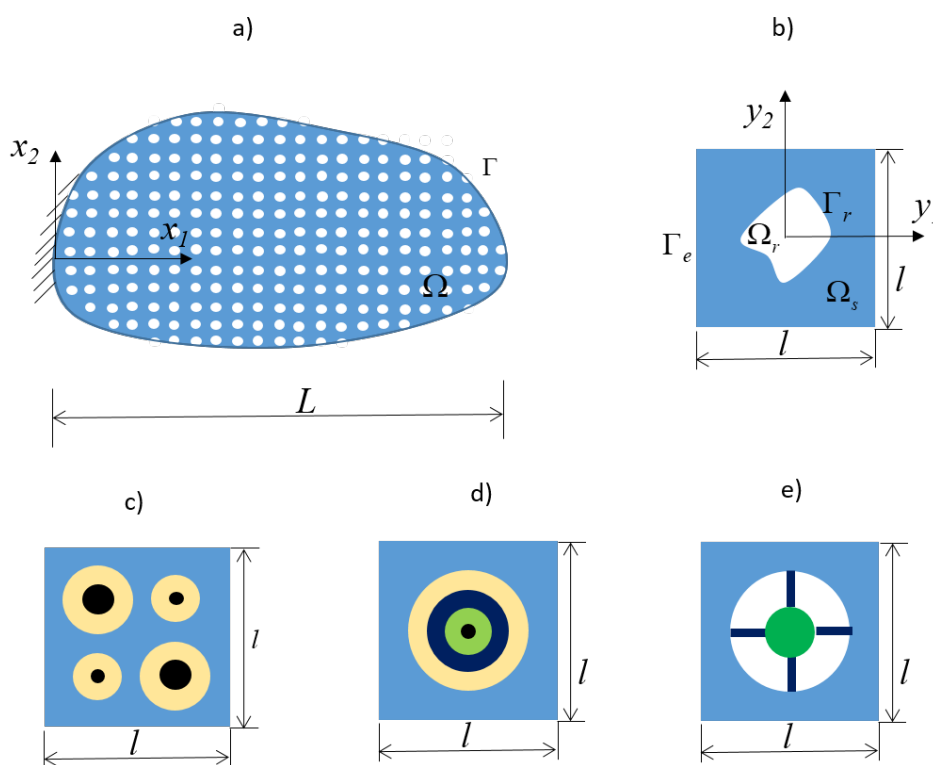


Figura 1: Esquema del MMLR y de una celda.

Se pretende describir las vibraciones de la estructura sometida a cargas armónicas con frecuencias de excitación  $\omega$  relativamente bajas donde los modos relevantes poseen una longitud de onda comparable a la de la estructura ( $L$ ). Se acepta que existe la posibilidad de resonancia local en las inclusiones (con modos de longitudes de onda comparables a  $l$ ), lo que implica la posibilidad de interacción dinámica en dos escalas. De esta manera, las inserciones podrían actuar como absorbentes dinámicos extrayendo energía del movimiento vibratorio global, atenuando las amplitudes de las vibraciones de la estructura. El efecto dinámico de las inserciones sobre la vibración de la estructura se denomina “micro-inercia”. Se admite que la carga forzante puede inducir un movimiento resonante local en la inserción. Se ha demostrado

(Auriault y Boutin, 2012) que en el caso de resonadores homogéneos, tal efecto es de importancia cuando la rigidez de la matriz  $s$  es mucho mayor que la del resonador  $r$  y las densidades del mismo orden:  $|C^r|/|C^s|=O(\varepsilon^2)$  y  $\rho_r/\rho_s=O(1)$ , donde  $|C^r|$  y  $|C^s|$  corresponden a medidas de los tensores de rigidez de los materiales  $r$  y  $s$  respectivamente y  $\rho_r$  y  $\rho_s$  corresponden a la densidad de la inserción y de la matriz. Sin embargo, la condición de resonancia local es también aproximadamente válida si la inserción se comporta como un resonador aislado, lo que puede darse para configuraciones como las mostradas en la Figura 1c) a 1e). En la Figura 1c) se muestran inserciones aisladas dentro de la celda estando cada una conformada por un núcleo rígido con la densidad del mismo orden que la matriz recubierto con un material blando y de baja densidad. En la Figura 1d) se muestra un resonador compuesto que tiene una capa de material blando y de baja densidad en contacto con la matriz. En la Figura 1e) la inserción está dada por un material similar al de la matriz vinculada con la misma mediante pequeñas barras que actúan aproximadamente como resortes.

Con las hipótesis mencionadas, siguiendo a Auriault y Boutin (2012), la cinemática global en el metamaterial puede describirse aproximadamente mediante un desplazamiento  $\mathbf{u}_{Total} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$  donde  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  es una componente con variación suave en  $\Omega$ , mientras que  $\mathbf{v}(\mathbf{y})$  describe la cinemática local correspondiente a la inserción. Reemplazando tales expresiones en el principio de trabajos virtuales y operando de acuerdo al cálculo variacional (Cortínez y Domínguez, 2019, 2021) se obtienen las siguientes ecuaciones gobernantes para el material homogeneizado:

$$Div_x [C^H : \boldsymbol{\varepsilon}_x(\mathbf{u})] + \omega^2 \left( \frac{\int_{\Omega_c} \rho d\Omega_c}{\Omega_c} \mathbf{u} + \frac{\int_{\Omega_r} \rho_r \mathbf{v} d\Omega_r}{\Omega_c} \right) = 0 \quad \text{en } \Omega, \text{ C.B. externas} \quad (1)$$

$$Div_r [C^r : \boldsymbol{\varepsilon}_y(\mathbf{v})] + \rho_r \omega^2 (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = 0 \quad \text{en } \Omega_r, \text{ C.B.: } \mathbf{v}|_{\Gamma_r} = 0 \quad (2)$$

donde  $C^H$  y  $C^r$  corresponden a los tensores constitutivos del medio homogeneizado y de la inserción respectivamente (la determinación de  $C^H$  puede consultarse en Cortínez y Domínguez (2019),  $\rho$  es la densidad del material y  $\rho_r$  es la correspondiente a la inserción compuesta,  $\boldsymbol{\varepsilon}_x(\mathbf{u})$  y  $\boldsymbol{\varepsilon}_y(\mathbf{v})$  corresponden a los tensores de deformación de Green-Lagrange expresados en términos de desplazamientos (Cortínez y Domínguez, 2019). Los sistemas anteriores constituyen las ecuaciones de Navier para la macro estructura y la micro estructura (inserción) respectivamente.

El sistema anterior puede ser reformulado si se resuelve el problema local (2) obteniendo  $\mathbf{v}$  en función de  $\mathbf{u}$  y luego reinsertando dicha solución en la ecuación (1). Esta tarea puede realizarse convenientemente expresando la solución del problema local en términos de las autofunciones  $\boldsymbol{\psi}^n(\mathbf{y})$  y frecuencias naturales  $\lambda_n$  del problema de vibraciones libres de la inserción. Es decir, se propone:

$$\mathbf{v} = \sum_n \alpha_n(\mathbf{x}) \boldsymbol{\psi}^n(\mathbf{y}) \quad (3)$$

donde:

$$\begin{cases} \text{Div}_r [\mathbf{C}^r : \boldsymbol{\varepsilon}_y(\boldsymbol{\Psi}^n)] + \rho_r \lambda_n^2 \boldsymbol{\Psi}^n = 0, \\ \boldsymbol{\Psi}^n|_{\Gamma_r} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Las autofunciones  $\boldsymbol{\Psi}^n$  no son necesariamente ortogonales atendiendo a la posible existencia de modos degenerados. Reemplazando (3) en (2) y aplicando el método de Galerkin pueden obtenerse las constantes  $\alpha_n$  en la forma:

$$\alpha_n(\mathbf{x}) = \frac{\omega^2}{\lambda_n^2 - \omega^2} \sum_{i=1}^3 \beta_{in} u_i(\mathbf{x}) \quad (5)$$

donde  $\beta_{in}$  se obtienen mediante la resolución del siguiente sistema algebraico lineal:

$$\sum_{n=1}^{Nr} \left( \int_{\Omega_r} \rho_r (\boldsymbol{\Psi}^n \cdot \boldsymbol{\Psi}^m) d\Omega \right) \beta_{in} = \int_{\Omega_r} \rho_r \psi_i^m d\Omega \quad m = 1, 2, \dots, Nr \quad i = 1, 2, 3 \quad (6)$$

Sustituyendo luego (5) en (3) y el resultado en (1) se obtiene la siguiente ecuación en el dominio global:

$$\text{Div}_x [\mathbf{C}^H : \boldsymbol{\varepsilon}_x(\mathbf{u})] + \boldsymbol{\rho}_{eq} \omega^2 \mathbf{u} = 0 \quad (7)$$

donde:

$$\boldsymbol{\rho}_{eq} = [\rho_{eqij}] = \left[ \bar{\rho} \delta_{ij} + \sum_n \frac{\omega^2}{(\lambda_n^2 - \omega^2)} R_{ij}^n \right] \quad (8)$$

con:

$$\bar{\rho} = \frac{\int_{\Omega_c} \rho d\Omega}{\Omega_c} \quad \text{y} \quad R_{ij}^n = \frac{\beta_{in} \int_{\Omega_r} \rho_r \psi_j^n d\Omega_r}{\Omega_c} \quad (9)$$

siendo  $\rho$  y  $\bar{\rho}$  la densidad y densidad media del material de la celda.  $\boldsymbol{\rho}_{eq}$  es un tensor de densidad equivalente. Observar que los segundos términos de las componentes del tensor contienen el efecto inercial de los resonadores. La ecuación (7) puede ser utilizada para describir la propagación de ondas acústicas (considerando el medio infinito) pudiéndose obtener a partir de la solución de la misma la relación de dispersión. Un análisis en tal sentido demuestra que la ecuación (7) admite ondas progresivas con frecuencia  $\omega$  solamente si  $\boldsymbol{\rho}_{eq}$  es definida positiva (Vondrejic et al., 2017). En caso contrario las ondas son evanescentes. Por lo tanto, el rango de frecuencias donde la densidad equivalente es definida negativa o no definida positiva define una brecha de banda donde no existe propagación acústica. La definición positiva o negativa de  $\boldsymbol{\rho}_{eq}$  se evalúa a través de sus valores propios  $\sigma_i$  ( $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ ). Si todos los valores son negativos la brecha de banda es fuerte (no existe ningún tipo de propagación) y si alguno de los valores es negativo la brecha de banda es débil (se filtran parcialmente las ondas de acuerdo al tipo de polarización). Si bien el enfoque presentado se cumple rigurosamente para la situación de la Figura 1a), experimentos numéricos han mostrado que la densidad equivalente obtenida con esta metodología produce resultados suficientemente precisos para las configuraciones 1c) a 1e).



### 3 MAXIMIZACIÓN DE LA BRECHA DE BANDA: PROCEDIMIENTO DE DISEÑO ÓPTIMO

En este trabajo se pretende seleccionar las características geométricas y materiales de las inserciones para maximizar las brechas de banda en un dominio de frecuencias de interés  $(\omega_i, \omega_s)$ . Una vez seleccionada una configuración determinada para el resonador debe resolverse el problema de vibraciones locales (4) mediante el MEF. Luego debe obtenerse la matriz de densidad equivalente  $\mathbf{p}_{eq}(\omega)$  mediante las expresiones (6), (9) y (8) respectivamente y sus autovalores  $\sigma_i(\omega)$ . Finalmente, la correspondiente brecha de banda total  $BB$  en el rango de interés se puede obtener mediante la siguiente expresión:

$$BB = \int_{\omega_i}^{\omega_s} \Phi(\omega) d\omega, \quad \Phi(\omega) = \begin{cases} 1 & \sigma_i(\omega) < 0 \\ 0 & \sigma_i(\omega) \geq 0 \end{cases} \quad (10)$$

Si se busca una brecha de banda fuerte (débil), todos (algunos de) los valores de  $\sigma_i$  deben ser menores a cero. Luego, el problema de diseño óptimo puede formularse de la siguiente manera:

$$[M_r, G_r] = \arg \max BB \quad (11)$$

donde  $M_r$  corresponde al conjunto de constantes pertinentes del material del resonador (densidades y constantes elásticas) y  $G_r$  corresponde al conjunto de parámetros que definen su geometría. Las variables del problema están sujetas a diferentes restricciones tanto de resistencia y de rigidez como geométricas. Asimismo, deben verificarse las relaciones de validez de la teoría de homogeneización ya enunciadas. De manera simplificada aquí se supone que todas éstas pueden considerarse en las restricciones geométricas (cada variable geométrica estará entre valores máximos y mínimos preestablecidos). El tiempo requerido para la determinación de la  $BB$  en cada escenario es relativamente bajo. Luego, el problema de diseño puede resolverse adecuadamente mediante el método de Recocido Simulado (Dominguez y Cortínez, 2018). Éste es un enfoque más simple (aunque un poco más costoso computacionalmente) que el enfoque original de Vondrej et al. (2017), pero permite tratar con cualquier tipo de parametrización de la geometría, incluyendo la de resonadores compuestos como los mostrados en la Figura 1c) a 1e).

### 4 EJEMPLOS NUMÉRICOS

Para ejemplificar la parametrización geométrica utilizada y mostrar las características de las brechas de banda generadas por diferentes resonadores, se considera la configuración genérica mostrada en la Figura 2. Se trata de un resonador de material homogéneo con las siguientes características:  $\rho_r = 950 \text{ kg/m}^3$ ,  $E = 7E6 \text{ Pa}$ ,  $\nu = 0.3$ , mientras que la celda, igual en todos los casos, tiene las siguientes características:  $\rho_s = 2400 \text{ kg/m}^3$ ,  $E = 2E11 \text{ Pa}$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $l = 0.5 \text{ m}$ .

La geometría mostrada se define mediante los parámetros  $a$ ,  $b$ ,  $r_1$  y  $r_2$  para el resonador bisimétrico y por  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  y  $b_2$  para el asimétrico. En el caso bisimétrico, la variación de los parámetros permite generar resonadores rectangulares, elípticos y circulares mientras que con

este resonador asimétrico pueden obtenerse formas en ele o rectangulares.

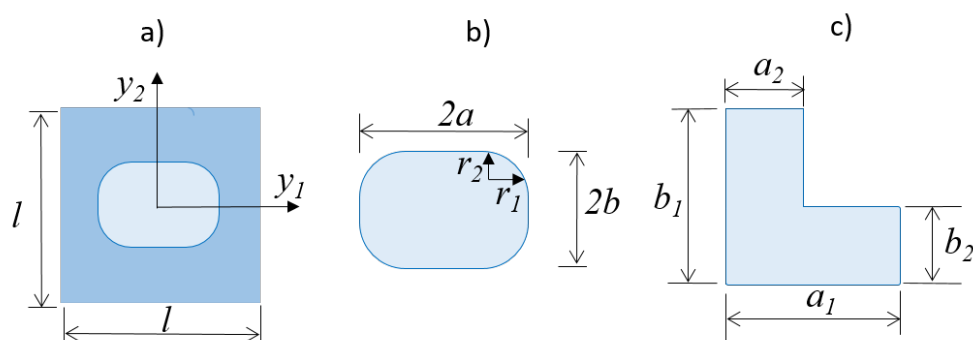


Figura 2: Esquema de tipología de resonadores considerados: a) celda con resonador, b) resonador bisimétrico y c) resonador asimétrico.

Para el resonador mostrado en la Figura 2b se han determinado las frecuencias naturales locales y la brecha de banda en el rango de interés ( $15000 \text{ rad/s}$ ,  $19000 \text{ rad/s}$ ) manteniendo fijos  $a$  y  $b$  y variando  $r_1$  y  $r_2$ . Los resultados correspondientes y las geometrías de cada caso se muestran en las columnas 2 a 4 (casos 1 a 3) de la Tabla 1. Como se aprecia, las brechas de banda  $BB$  son diferentes, alcanzando el máximo valor de  $468 \text{ rad/s}$  para el resonador elíptico (caso 3) a pesar de que el área encerrada es ligeramente menor, lo que demuestra la importancia de la forma del resonador. En la misma tabla (casos 4 a 7) se han efectuado los correspondientes cálculos, considerando un rango de frecuencias entre  $10000 \text{ rad/s}$  y  $15000 \text{ rad/s}$ , para resonadores de la configuración general (Figura 2b) mencionada aunque, para estos casos, se ha procurado mantener constante la sección transversal del resonador. Como se aprecia, el máximo ancho de banda se da para el caso 7. Cabe aclarar que se han calculado las brechas de banda débiles, aunque en los casos de geometría circular y cuadrada coinciden con las brechas de banda fuertes.

Casos	1	2	3	4	5	6	7
$a$	0.02	0.02	0.02	0.015	0.0133	0.0177	0.02
$b$	0.01	0.01	0.01	0.015	0.0133	0.01	0.0112
$r_1$	0.001	0.01	0.02	0.015	0.001	0.001	0.02
$r_2$	0.001	0.01	0.01	0.015	0.001	0.001	0.0112
$BB$	296	423	468	556	542	1032	1068
$\lambda_1$	10774	11125	11821	11741	12027	11354	11049
$\lambda_2$	14350	14592	15376	11741	12027	14498	13840
$\lambda_3$	15101	15454	16402	13599	14327	15499	14865
$\lambda_4$	15858	16604	17496	18281	17545	17340	16786
$\lambda_5$	17118	17785	19459	18282	19821	18113	18081
Área	7.00E-04	7.14E-04	6.28E-04	7.07E-04	7.07E-04	7.07E-04	7.04E-04

Tabla 1: Características de brechas de banda para diferentes configuraciones de resonadores.



A continuación, se muestra un ejemplo de diseño óptimo para maximizar la brecha de banda total en el intervalo (15000 rad/s, 19000 rad/s), considerando la topología de la Figura 2b con las siguientes restricciones geométricas (medidas en  $m$ ):  $0.02 \leq a \leq 0.04$ ,  $0.02 \leq b \leq 0.04$ ,  $0.0005 \leq r_1 < a/2$ ,  $0.0005 \leq r_2 < b/2$ . En la segunda columna de la Tabla 2 se muestran las características del resonador óptimo. Como se aprecia, el ancho total de banda es de 803rad/s. A manera de ejemplo se muestran otras dos geometrías factible (casos 2 y 3) con anchos de brecha de banda mucho menores (476 rad/s y 292 rad/s). Finalmente, en la misma tabla (casos 4 a 6) se realiza la misma maximización para una topología asimétrica con las siguientes restricciones (en  $m$ ):  $0.02 \leq a_1 \leq 0.04$ ,  $0.02 \leq b_1 \leq 0.04$ ,  $0.005 \leq a_2 \leq a_1$ ,  $0.005 \leq b_2 \leq b_1$ . Como se puede ver, el diseño óptimo (caso 4) produce una  $BB$  de 582 rad/s, mayor que las correspondientes a los casos de otras dos geometrías factibles (383 rad/s y 165 rad/s).







Casos	1 (Ópt.)	2	3		4 (Ópt.)	5	6
							
$a$	0.01	0.01	0.015	$a_1$	0.04	0.03	0.025
$b$	0.02	0.015	0.02	$a_2$	0.02	0.01	0.02
$r_1$	0.007	0.003	0.011	$b_1$	0.04	0.035	0.035
$r_2$	0.019	0.013	0.019	$b_2$	0.02	0.01	0.03
$BB$	<b>803.2</b>	476	292	$BB$	<b>552</b>	383	165

Tabla 2: Comparación de diseños optimizados respecto a otros factibles.

Los ejemplos mostrados ilustran las posibilidades de la metodología presentada dentro de los límites de variación de los parámetros impuestos. Si bien los ejemplos mostrados ilustran adecuadamente la metodología, los tamaños de los resonadores analizados en el rango de frecuencia de interés seleccionado, no producen brechas de banda que cubran un porcentaje importante. Un ejemplo más práctico para el tamaño de los resonadores considerados, consiste en atenuar la propagación en un rango más pequeño. Por ejemplo, en la franja de 10000 rad/s a 12000 rad/s, el diseño óptimo (caso 8) de la configuración mostrada en la Figura 2b conduce al resultado que se aprecia en la Figura 3.

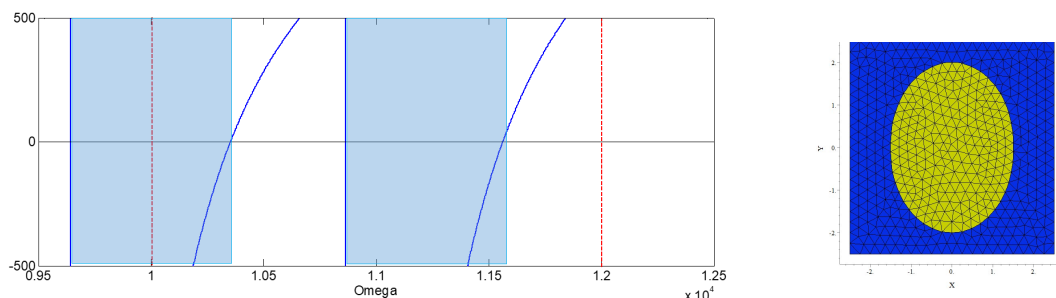


Figura 3: Valores propios mínimos de la densidad equivalente. Caso 8.  $\lambda_1 = 9642 \text{ rad/s}$ ,  $\lambda_2 = 10862 \text{ rad/s}$ ,  $\omega_1 = 10000 \text{ rad/s}$ ,  $\omega_2 = 12000 \text{ rad/s}$

En la Figura 3a se muestran los valores propios de la densidad equivalente en función de la frecuencia para tal diseño. Se aprecia un ancho de banda total  $BB$  de 1053 rad/s logrado como la suma de dos brechas de banda individuales localizadas a la derecha de  $\lambda_1 = 9642 \text{ rad/s}$  y

$\lambda_2 = 10862 \text{ rad/s}$  respectivamente. En este caso, la brecha de banda cubre un porcentaje apreciable del rango de interés (53%). En la Figura 3b se muestra la geometría del resonador ( $a=0.015$ ,  $b=0.02$ ,  $r_1=0.015$ ,  $r_2=0.019$ ).

## 5 CONCLUSIONES

Se ha presentado la primera etapa de un enfoque de diseño óptimo de la configuración de las inserciones de un material localmente resonante, con el propósito de maximizar la brecha de banda en un rango de interés. Para ello se ha utilizado el tensor de densidad equivalente, obtenido mediante una formulación homogeneizada de la mecánica del material, que permite identificar de manera simple las brechas de banda a partir del carácter positivo o negativo de sus autovalores. La búsqueda de la configuración óptima se ha realizado mediante una técnica heurística que no requiere la derivación de la función objetivo. Se ha presentado la formulación del modelo y se han mostrado ejemplos numéricos. Próximamente se desarrollará la segunda etapa del método de diseño que tiene similitud con el enfoque presentado en un artículo asociado a éste (Cortínez et al., 2021) orientado a estructuras finitas.

## REFERENCIAS

- Auriault, J. y Boutin, C., Long wavelength inner resonance cut-off frequencies in elastic composite materials, *International Journal of Solids and Structures* 49: 3269-3281, 2012.
- Cortínez, V. H. y Dominguez, P.N. Un modelo reducido para la dinámica estructural de metamateriales localmente resonantes, *Mecánica Computacional* 37, 705-714, 2019.
- Cortínez, V. y Dominguez, P., Determinación analítica de “bandgaps” en una clase de materiales localmente resonantes, *Matemática Aplicada, Computacional e Industrial* Vol. 8, 523-526, 2021.
- Cortínez, V., Dominguez, P. y Stoklas, C., Diseño óptimo de metamateriales localmente resonantes mediante un modelo homogeneizado simplificado, *Mecánica Computacional* 38 (enviado), 2021.
- Cheng, Z., Shi, Z., Mo, Y. y Xiang, H. Locally resonant periodic structures with low-frequency band gaps, *Journal of Applied Physics* 114, 033532, 2013.
- Dominguez, P. y Cortínez, V., Un modelo Timoshenko-Vlasov para vigas curvas compuestas de sección arbitraria: diseño óptimo, *Mecánica Computacional* 36, 831-840, 2018.
- Dong, H., Su, X., Wang, Y. y Zhang, C., Topological optimization of two-dimensional phononic crystals based on the Finite Element Method and Genetic Algorithm, *Struct.Multidiscip.Optim.* 50(4): 593-604, 2014.
- Krushynska, A., Kouznetsova, V. y Geers, M., Towards optimal design of locally resonant acoustic metamaterials, *Journal of Mechanics and Physics of Solids* 71: 179-196, 2014.
- Liu, Z., Zhang, X., Mao, Y., Zhu, Y., Yang, Z., Chan, C. y Sheng, P., Locally resonant sonic materials, *Science* 289, 1734, 2000.
- Roca, D., Yago, D., Cante, J., Lloberas-Valls, O. y Oliver, J., Computational design of locally resonant acoustic metamaterials, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 345: 161-182, 2019.
- Sigmund, O y Jensen, J., Systematic design of phononic band-gap materials and structures by topology optimization, *Phil.Trans.A.Math.Phys.Eng.Sci.* 361 (1806), 1001-19, 2003.
- Vondrejic, J., Rohan, E. y Heczko, J., Shape optimization of phononic bandgap structures using the homogenization approach, *International Journal of Solid and Structures* 113-114: 47-168, 2017.