

## OSCILACIONES TRANSVERSALES EN UN MEDIO ELÁSTICO UNIDIMENSIONAL CON MEMORIA

### TRANSVERSE OSCILLATIONS IN AN ONE-DIMENSIONAL ELASTIC MEDIUM WITH MEMORY

Alberto J. Ferrari<sup>a</sup>, Luis P. Lara<sup>b</sup>, Mariela C. Olguin<sup>c</sup> y Eduardo A. Santillan Marcus<sup>c</sup>

<sup>a</sup>CONICET - Depto. de Matemática, ECEN-FCEIA, UNR, Avda. Pellegrini 250, S2000 Rosario, Argentina, [aferrari@fceia.unr.edu.ar](mailto:aferrari@fceia.unr.edu.ar)

<sup>b</sup>Departamento de Sistemas, Universidad del Centro Educativo Latinoamericano, Avda. Pellegrini 1332, S2000 Rosario, Argentina, [lp Lara2014@gmail.com](mailto:lp Lara2014@gmail.com)

<sup>c</sup>Depto. de Matemática, EFB-FCEIA, UNR, Avda. Pellegrini 250, S2000 Rosario, Argentina, [mcolguin@fceia.unr.edu.ar](mailto:mcolguin@fceia.unr.edu.ar), [edus@fceia.unr.edu.ar](mailto:edus@fceia.unr.edu.ar)

**Palabras clave:** oscilaciones, Sturm-Liouville, derivada fraccionaria de Caputo, función de Mittag-Leffler, autovalores.

**Resumen.** Cuando se estudian las vibraciones transversales en una línea rígidamente empotrada en sus extremos, se puede plantear un problema de Sturm-Liouville para el oscilador lineal, como puede verse en (A.V. Agibalova, *J Math Sci*, 174(4):425–436 (2011)). Debido a la memoria en las vibraciones se considera la derivada fraccionaria de Caputo de orden  $\alpha$  entre 1 y 2. Las autofunciones resultan ser expresiones en las que se ve involucrada la función de Mittag-Leffler de dos parámetros. Los autovalores asociados son determinados numéricamente, resultando en una cantidad finita de autovalores reales si  $\alpha$  es menor que 2. Se determina un orden de derivación fraccionario  $\alpha$  crítico, para el cual se tiene que los autovalores asociados a un orden derivación menor que él, no son valores reales. Se determina una relación numérica entre la parte real e imaginaria de los autovalores y el orden de derivación  $\alpha$ . Luego se comparan las autofunciones y los autovalores asociados con los correspondientes de la ecuación del oscilador lineal con roce viscoso con orden de derivación clásico.

**Keywords:** oscillations, Sturm-Liouville, Caputo fractional derivative, Mittag-Leffler function, eigenvalues.

**Abstract.** When studying transverse vibrations in a line rigidly embedded at its ends, a Sturm-Liouville problem can be posed for the linear oscillator, as can be seen in (A.V. Agibalova, *J Math Sci*, 174(4):425–436 (2011)). Due to the memory in the vibrations the Caputo fractional derivative of order  $\alpha$  between 1 and 2 is considered. Eigenfunctions turn out to be expressions in which the two-parameter Mittag-Leffler function is involved. The associated eigenvalues are determined numerically, resulting in a finite number of real eigenvalues if  $\alpha$  is less than 2. A critical fractional derivative order  $\alpha$  is determined, for which the eigenvalues associated with a less order derivative are not real values. A numerical relationship is determined between the real and imaginary part of the eigenvalues and the derivative order  $\alpha$ . Following the eigenfunctions and associated eigenvalues are compared with the corresponding ones in the equation of the linear oscillator with viscous friction with classical derivative order.

## 1. INTRODUCCIÓN

Cuando se estudian las vibraciones transversales en una línea rígidamente empotrada en sus extremos, se puede plantear un problema de Sturm-Liouville para el oscilador armónico (un sistema que cuando se deja en libertad fuera de su posición de equilibrio, vuelve hacia ella describiendo oscilaciones sinusoidales, o sinusoidales amortiguadas), con condiciones de borde nulas.

El planteo del problema de Sturm-Liouville sería (Abigalova (2011)):

Hallar el valor del coeficiente  $\lambda$  tal que la ecuación diferencial ordinaria de Liouville

$$-\frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dy}{dx} \right] + q(x) y = \lambda \omega(x) y, \quad (1)$$

admita solución no trivial y satisfaga las condiciones de frontera  $y(a) = 0$ ,  $y(b) = 0$  siendo las funciones  $p(x)$  y  $\omega(x)$  positivas.

Si se define el operador  $L$  tal que  $Lu = -\frac{d}{dx} [p(x) u'] + qu$ , entonces (1) junto con las condiciones de frontera se escribe como:

$$\begin{cases} Ly = \lambda \omega y \\ y(a) = 0 \\ y(b) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Si  $\omega = 1$ , resulta  $Ly = \lambda y$ , es decir  $(L - \lambda I)y = 0$ . De aquí que al coeficiente  $\lambda$  se lo llame autovalor del problema. La solución  $y_\lambda$  asociada se denomina autofunción.

La resolución de estos problemas de Sturm-Liouville (2), involucra ecuaciones en cuyos términos aparecen funciones de Mittag-Leffler y la determinación de los autovalores  $\lambda$  mencionados antes, requiere el conocimiento de los ceros de estas funciones de Mittag-Leffler  $E_{\alpha,\beta}$  que se definen como (Kilbas et al. (2006); Diethelm (2010)):

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha k + \beta)} z^k, \quad (3)$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son números reales positivos. En (Eissa et al. (2018)) se determinaron las raíces de  $E_{\alpha,\beta}$  para algunos valores de  $\alpha$  y  $\beta$ .

### 1.1. Definición de derivada fraccionaria de Caputo

Sea  $\alpha$  un número real positivo y denotemos con  $n = \lceil \alpha \rceil$  al menor entero mayor que  $\alpha$ . Se define la derivada fraccionaria de Caputo de una función  $x(t)$  de variable real,  $n$  veces derivable y se nota  ${}^C D_a^\alpha x(t)$ , como:

$${}^C D_a^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t \frac{x^{(n)}(s)}{(t - s)^{\alpha - n + 1}} ds, \quad (4)$$

donde  $x^{(n)}$  indica la derivada clásica  $n$ -ésima de la función  $x$  y  $\alpha$  es el orden de derivación fraccionario con  $1 < \alpha \leq 2$  (Kilbas et al. (2006); Diethelm (2010)).

En este trabajo se estudia numéricamente el comportamiento de los autovalores de la ecuación (2) en relación con el orden de derivación fraccionario  $\alpha$  para el modelo físico propuesto.

En la Sección 2, mediante el modelo de oscilador armónico, se analizan las oscilaciones transversales en un medio elástico unidimensional y se compara el modelo clásico con el fraccionario, determinándose en forma numérica los autovalores y las autofunciones respectivas. Además, se establece una relación entre los autovalores y el orden de derivación fraccionario.

En la Sección 3, se establece de manera empírica una analogía entre el problema fraccionario correspondiente al oscilador armónico y el problema clásico correspondiente al oscilador lineal con un término disipativo.

## 2. OSCILADOR ARMÓNICO FRACCIONARIO

Se considera el modelo matemático para las oscilaciones transversales de un medio elástico en una dimensión espacial. La ecuación diferencial ordinaria que describe este oscilador lineal ampliamente estudiado es:

$$y''(x) = -\omega^2 y(x), \quad (5)$$

donde  $y(x)$  es la deformación transversal a la línea  $x$  y  $\omega$  es la frecuencia de oscilación. La solución general de (5) puede escribirse como:

$$y_G(x) = A \cos(\omega x + \phi), \quad (6)$$

donde  $A$  y  $\phi$  son constantes reales arbitrarias.

Si ahora se considera el problema unidimensional con  $x \in [0, 1]$  y condiciones de frontera nulas:

$$\begin{cases} y'' + \omega^2 y = 0, & \omega \in \mathbb{R} \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0, \end{cases} \quad (7)$$

puede verse que la familia de autofunciones y los respectivos autovalores son los siguientes:

$$y_n(x) = \sin(\omega_n x), \quad \omega_n = n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (8)$$

Ahora, se considera la versión fraccionaria de la ecuación (5):

$${}^C D_0^\alpha y(x) = -\omega^2 y(x), \quad (9)$$

donde el orden de derivación fraccionario  $\alpha$  es tal que  $1 < \alpha < 2$ . La solución general de la ecuación (9) es de la forma (Odibat (2010)):

$$y(x) = c_1 E_{\alpha,1}(-\omega^2 x^\alpha) + c_2 x E_{\alpha,2}(-\omega^2 x^\alpha), \quad (10)$$

donde las funciones  $E_{\alpha,1}$  y  $E_{\alpha,2}$  se describen en (3). Luego, el problema de Sturm-Liouville (Kilbas et al. (2006)) se plantea como:

Hallar  $\omega$  tal que exista  $y_\omega$  solución no trivial del sistema descrito a continuación:

$$\begin{cases} {}^C D_0^\alpha y(x) = -\omega^2 y(x) \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0. \end{cases} \quad (11)$$

Aplicando las condiciones de borde, resulta que:

- $y(0) = c_1 E_{\alpha,1}(0) + c_2 \cdot 0 = 0 \iff c_1 = 0$  (pues  $E_{\alpha,1}(0) = 1$ ),
- $y(1) = c_2 E_{\alpha,2}(-\omega^2) = 0 \iff E_{\alpha,2}(-\omega^2) = 0$  (pues  $c_2 \neq 0$  ya que sino se obtiene la solución trivial).

Por lo tanto la solución  $y_n$  es:

$$y_n(x) = x E_{\alpha,2}(-\omega_n^2 x^\alpha), \quad (12)$$

siendo  $\omega_n$  los autovalores solución de la ecuación:

$$E_{\alpha,2}(-\omega^2) = 0, \quad 1 < \alpha < 2. \quad (13)$$

A partir de la definición de la función de Mittag-Leffler

$$E_{\alpha,2}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 2)}, \quad (14)$$

se tiene que si  $\omega$  es una solución de (13), su opuesta lo será también. Más aún, debido a las propiedades de los números complejos y que ésta es una serie de potencias uniformemente convergente, resulta que si  $\omega$  es una raíz de (13), su conjugada, también lo es. Es conocido además que estas funciones de Mittag-Leffler son funciones enteras de orden  $\frac{1}{\alpha}$  y pueden tener un número infinito de ceros salvo, tal vez, si  $\frac{1}{\alpha} \in \mathbb{Z}$  (Eissa et al. (2018)).

Trabajando computacionalmente con rutinas estándar, se puede observar en la Figura 1 varias cosas: a medida que el valor del parámetro  $\alpha$  se incrementa, si se interseca la gráfica con rectas verticales, vemos que también se incrementa la cantidad de valores de  $\omega$  que satisfacen la ecuación (13), lo cual también puede verse en la Figura 2. Naturalmente, dadas las propiedades antes mencionadas y por simplicidad, sólo se graficó en el primer cuadrante. Notemos que si  $\alpha = 2$ , se tienen los autovalores de (8).

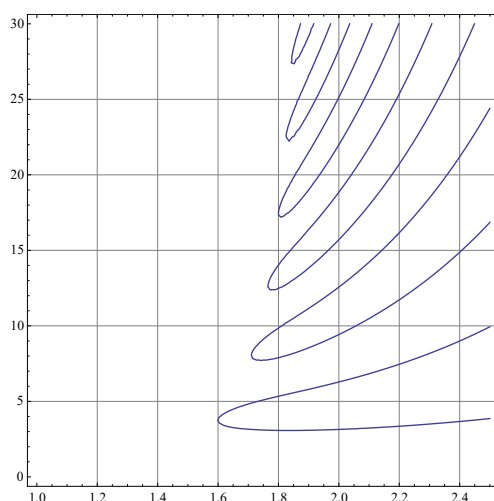


Figura 1: curva de nivel  $E_{\alpha,2}(-\omega^2) = 0$

Se observa que para valores del orden de derivación  $\alpha < 2$ , el número de autovalores reales es finito y creciente con respecto a  $\alpha$ , a diferencia del caso clásico  $\alpha = 2$  donde el espectro es

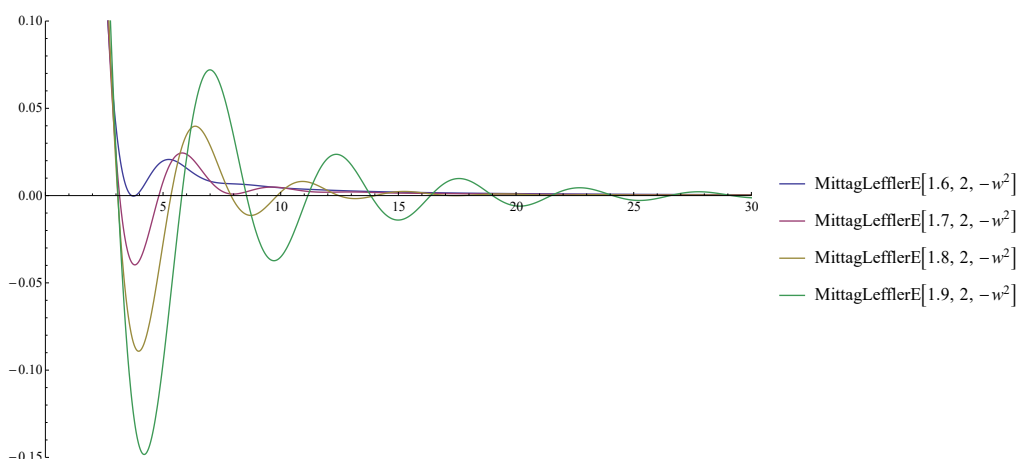


Figura 2: Gráfico de la función de Mittag Leffler para algunos valores de  $\alpha$  y  $\omega \in \mathbb{R}$

real, numerable e infinito. Además, se puede ver que existe un  $\alpha^* \approx 1.6$ , de manera tal que para todo  $1 < \alpha < \alpha^*$  no hay autovalores reales.

Trabajando en forma análoga, se puede conjeturar que, para cada  $\alpha \in (1, 2)$ , los autovalores con parte imaginaria no nula son infinitos numerables. Esto se observa en la Figura 3, donde se realizó el gráfico para  $\alpha = 1.5$  y  $\omega \in \mathbb{C}$ . En adelante se nota al autovalor  $\omega_n$  como  $\omega_n = u_n + i v_n$  con  $u_n, v_n > 0$  (por simplicidad se harán todas las deducciones sobre el primer cuadrante), y se verá qué relación existe entre la parte real y la parte imaginaria de estos autovalores  $\omega_n$ .

Para  $1 < \alpha < 2$  se obtuvo, nuevamente utilizando rutinas estándar en la computadora, que hay un comportamiento lineal entre las partes real e imaginaria de los autovalores que depende del orden de derivación fraccionario  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} v_n &= a_\alpha + b_\alpha u_n, \\ a_\alpha &< 0, b_\alpha > 0, \\ u_n &> 0. \end{aligned} \tag{15}$$

En el rango  $1 < \alpha \leq 1.7$ , mediante el método de mínimos cuadrados se obtuvieron las siguientes expresiones aproximadas para  $a_\alpha$  y  $b_\alpha$ :

$$\begin{aligned} a_\alpha &\approx -4,48407\alpha^3 + 14,2093\alpha^2 - 15,4233\alpha + 5,69583 \\ b_\alpha &\approx 0,537847\alpha^2 - 2,53361\alpha + 2,99376. \end{aligned} \tag{16}$$

En la Tabla 1 se observan algunos resultados obtenidos numéricamente para algunos valores del orden fraccionario de derivación  $\alpha$  y considerando los primeros 15 autovalores  $\omega_n$  pertenecientes al primer cuadrante.

$\alpha$	$a_\alpha$	$b_\alpha$
1,7	-1,48829	0,237634
1,5	-0,607186	0,412613
1,1	-0,0538754	0,855241
1,01	-0,00481753	0,984653

Tabla 1: Valores de la pendiente y ordenada al origen para distintos valores de  $\alpha$

Se puede notar que si  $\alpha$  tiende a 1, el coeficiente  $b_\alpha$  tiende a 1 y en consecuencia los autovalores  $\omega$  estarán ubicados sobre las rectas  $u = v$  y  $u = -v$ . Esto puede verse en la Figura 3. En ella se representan las curvas de nivel  $Re(E_{\alpha,2}(-\omega_n^2)) = 0$  y  $Im(E_{\alpha,2}(-\omega_n^2)) = 0$  en el plano  $(u, v)$ , cuya intersección determina los autovalores  $\omega$ .

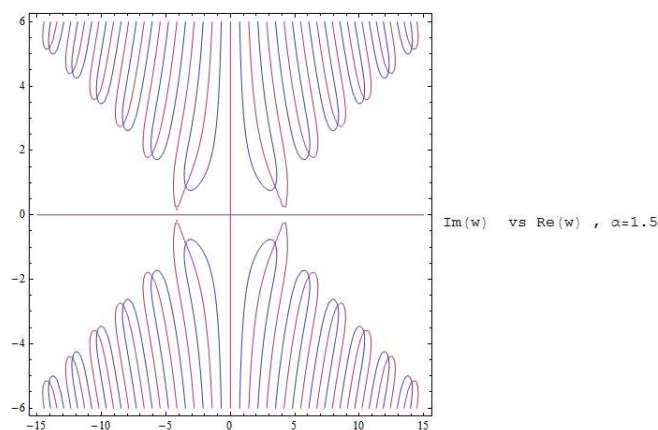


Figura 3: Curvas de nivel  $Re(E_{\alpha,2}(-\omega^2)) = 0$  y  $Im(E_{\alpha,2}(-\omega^2)) = 0$

### 3. ANALOGÍA ENTRE EL OSCILADOR FRACCIONARIO Y EL OSCILADOR CLÁSICO EN UN MEDIO VISCOSO

Se considera ahora la formulación clásica del oscilador armónico con un término de viscosidad con condiciones de borde nulas. Este problema se escribe como:

$$\begin{cases} z''(x) + p z'(x) + q z(x) = 0 \\ z(0) = 0 \\ z(1) = 0, \end{cases} \quad (17)$$

donde  $p$  es la constante de viscosidad y  $q$  está asociada a las características mecánicas del sistema. La solución general de la Ec. (17) es:

$$z(x) = \exp\left(-\frac{p}{2}x\right) \left[ c_1 \exp\left(-\frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2}x\right) + c_2 \exp\left(\frac{\sqrt{p^2 - 4q}}{2}x\right) \right]. \quad (18)$$

Teniendo en cuenta la condición  $z(0) = 0$ , las constantes de integración verifican  $c_1 = -c_2$ . Por la otra condición  $z(1) = 0$ , para cada valor de  $q$  se obtienen los autovalores  $p_m$  de la forma:

$$p_m^2 = 4[q - (m\pi)^2], \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (19)$$

Reemplazando (19) en la expresión (18) y operando se obtiene:

$$z_m(x) = c \exp\left(-\frac{p_m}{2}x\right) \sin(m\pi x). \quad (20)$$

El objetivo de esta sección es analizar si la dinámica del oscilador fraccionario estudiado anteriormente se puede aproximar con la correspondiente al oscilador con derivada entera y con un término de viscosidad (17).

Entonces para cada solución de (11),  $y_{\alpha,n}(x) = x E_{\alpha,2}(-\omega_n^2 x^\alpha)$ , donde  $\omega_n$  son los autovalores solución de la ecuación  $E_{\alpha,2}(-\omega^2) = 0$ ,  $1 < \alpha \leq 2$ , se buscan los valores de  $c$  y  $q$  de manera que la norma de Lebesgue  $L_2(y_{\alpha,n}(x) - z_m(x); (0, 1))$  sea mínima.

Estableciendo que  $y'_{\alpha,n}(0) = z'_m(0)$ , se obtiene  $c = (m \pi)^{-1}$ . A continuación, se determina  $q$  (el cual depende de  $m$ ) a partir de minimizar la norma  $L_{n,m} = L_2((y_{\alpha,n}(x) - z_m(x); (0, 1)))$ . Por lo tanto, para un dado  $n^*$  se tiene la familia de soluciones  $\{z_{n^*,m}(x)\}_{m=0}^\infty$ . Ahora sólo resta determinar el valor de  $m$ , lo cual se hará de modo tal que  $y_{\alpha,n^*}(x)$  y  $z_{n^*,m}(x)$  tengan el mismo número de ceros.

En la Figura 4, luego de una investigación numérica, se obtiene que para  $\alpha = 1.8$  y  $n^* = 4$ , resulta que  $y_{\alpha,4}(x)$  y  $z_{4,m}$  tienen el mismo número de ceros cuando  $m = 5$ .

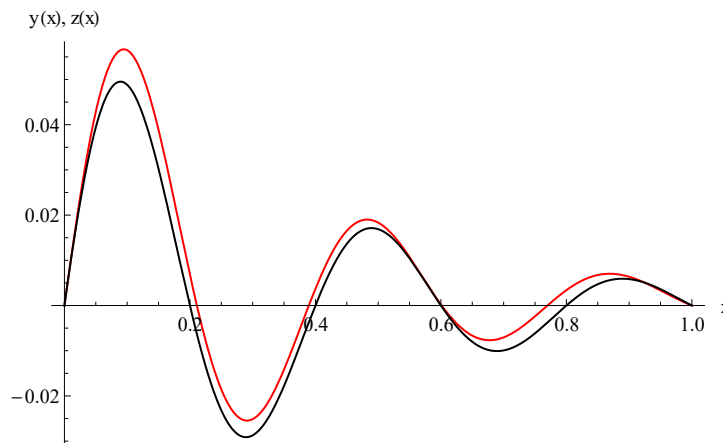


Figura 4: —  $y_{1.8,4}(x)$ , —  $z_{4,5}(x)$

En la tabla 2, se muestra para  $\alpha = 1.8$  y  $n = 1, 2, 3, 4$ , los valores de  $m$ ,  $E = \omega_{\alpha,k}^2$  y  $q$  asociados a partir del algoritmo anteriormente descrito.

$n$	$m$	$E$	$q$
1	1	9,46	10,03
2	2	28,48	40,43
3	4	97,1	162
4	5	155,4	254

Tabla 2: Valores de  $m$ ,  $E = \omega_{\alpha,k}^2$  y  $q$  para  $\alpha = 1.8$

Para los valores de  $E$  y  $q$  de la tabla 2 se determina, mediante el método de mínimos cuadrados, que satisfacen

$$q \approx -5,83 + 1,69 E, \tag{21}$$

como se muestra en la Figura 5.

Entonces, de manera empírica se determinó una analogía entre el problema fraccionario correspondiente al oscilador armónico y el problema clásico correspondiente al oscilador lineal con un término disipativo.

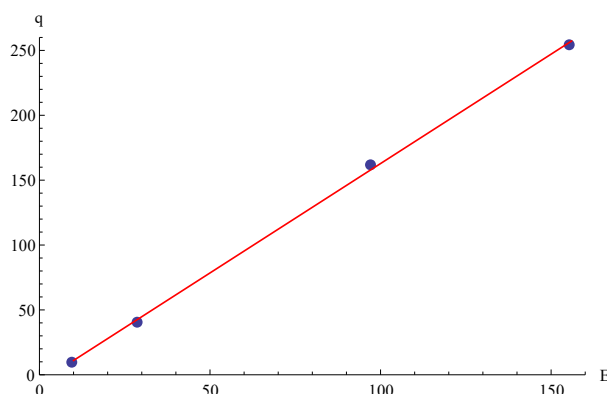


Figura 5: Relación entre  $q$  y  $E = \omega_{\alpha,k}^2$  para  $\alpha = 1.8$

#### 4. CONCLUSIONES

En este trabajo se estudió el problema de las oscilaciones transversales en un medio elástico unidimensional, planteando un problema de Sturm-Liouville para el oscilador lineal, con condiciones de borde nulas. Debido a la memoria en las vibraciones, se consideró también el mismo problema pero con derivada fraccionaria de Caputo de orden  $\alpha$  con  $\alpha$  entre 1 y 2. Las autofunciones resultaron ser expresiones en las que se ve involucrada la función de Mittag-Leffler de dos parámetros y los autovalores asociados fueron determinados numéricamente. Se determinó de forma aproximada un orden de derivación fraccionario  $\alpha^* \approx 1.6$ , para el cual se tiene que no existen autovalores reales asociados a un orden derivación menor que él. También se determinó de manera empírica una relación numérica entre la parte real e imaginaria de los autovalores y el orden de derivación  $\alpha$ . Finalmente se estableció una analogía entre el problema fraccionario correspondiente al oscilador armónico y el problema clásico correspondiente al oscilador lineal con un término disipativo.

#### REFERENCIAS

- Abigalova A. On the completeness of systems of eigenfunctions and associated functions of differential operators of orders  $2 - \epsilon$  and  $1 - \epsilon$ . *Journal of Mathematical Sciences*, 174(4):425–436, 2011.
- Diethelm K. *The analysis of fractional differential equations*, volumen 2004. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010.
- Eissa H., Elfakih N., y Masaoud H. Computation of the zeros of the mittag-leffler as bargmann functions. *International Conference on Green Energy & Environmental Engineering (GEEE)*, 38:9–14, 2018.
- Kilbas A.A., Srivastava H.M., y Trujillo J.J. *Theory and applications of fractional differential equations*, volumen 204. North-Holland Math. Stud., Elsevier, Amsterdam, 2006.
- Odibat Z. Analytic study on linear systems of fractional differential equations. *Computers & Mathematics with Applications*, 59:1171–1183, 2010.