

## MODELIZACIÓN NUMÉRICA DE SECCIONES ARBITRARIAS DE HORMIGÓN ARMADO SOMETIDAS A FLEXIÓN COMPUESTA BIAXIAL

### NUMERICAL MODELLING OF ARBITRARY REINFORCED CONCRETE SECTIONS SUBJECTED TO BIAXIAL BENDING

**Braian A. Desía<sup>a</sup>, Rodolfo S. Schwarz<sup>a</sup>, Roberto S. Carnicer<sup>a</sup>**

*<sup>a</sup>Facultad de Ingeniería de la Universidad de Belgrano, Villanueva 1234, Ciudad Autónoma de Buenos Aires 1426, Argentina, braian.desia@comunidad.ub.edu.ar; rodolfo.schwarz@comunidad.ub.edu.ar; rcarnicer@comunidad.ub*

**Palabras clave:** Flexión Compuesta, Sección Arbitraria, Hormigón Armado, elementos finitos.

**Resumen.** Se desarrollan formulaciones de elementos finitos para calcular las relaciones momento-curvatura para secciones de columnas de hormigón armado en flexión biaxial. La sección transversal de forma arbitraria se asume dividida en una malla de elementos isoperimétricos de cuatro nodos donde cada uno representa pequeñas áreas elementales de hormigón y simultáneamente se distribuyen nodos que equivalen a la localización de las armaduras de la sección.

A partir del planteo del equilibrio, entre las solicitaciones y las fuerzas equivalentes calculadas en la sección, admitiendo que la sección se deforma como plana, se obtienen resultados numéricos. Los resultados permiten reconstruir curvas de momento-curvatura y de interacción asociadas a la compresión axial y a los momentos flectores biaxiales. Finalmente se analizan los factores determinantes que influyen en el comportamiento de estas curvas, tales como la resistencia de los materiales, el porcentaje de armadura y la distribución de las tensiones de compresión y de tracción en la sección.

**Keywords:** Biaxial bending, arbitrary shape sections, Concrete, Finite Elements

**Abstract.** Finite element formulations are developed to calculate moment-curvature relationships in reinforced concrete columns in biaxial bending arbitrary shape sections. The arbitrary cross section is assumed to be divided into a mesh of four nodes isoparimetric elements where each one represents small elementary areas of concrete and simultaneously nodes are distributed that are equivalent to the reinforcement in the proper location of the section.

From the equilibrium statement, between the loads and the equivalent forces calculated in the section, admitting that it deforms as flat, numerical results. The results allow the reconstruction of moment-curvature and interaction curves associated with axial compression and biaxial bending moments. Finally, the determining factors that influence the behavior of these curves will be analyzed, such as the resistance of the materials, the percentage of reinforcement and the distribution of the compression and traction stresses in the section.

## 1 INTRODUCCIÓN

En el campo de la Ingeniería Estructural, resulta frecuente encontrarse con elementos tipo columna sometidos simultáneamente a la acción de momentos alrededor de ambos ejes principales junto a la carga axial de compresión, como es el caso típico de columnas de esquinas (“Flexión compuesta biaxial” o “Flexión compuesta oblicua”) cuya resolución resulta un problema complejo por el comportamiento no lineal del hormigón. A diferencia del caso de flexión compuesta recta o simple, en donde la orientación del eje neutro está definida, para el caso biaxial no es posible determinarla a priori. Para salvar esta complejidad, columnas bajo flexión compuesta biaxial, se tratan por los diferentes códigos, basados en fórmulas empíricas simplificadas y con el empleo de nomogramas limitadas a secciones rectangulares con distribución de armaduras y recubrimientos típicos.

El propósito del presente artículo consiste en introducir una metodología numérica para el análisis de secciones arbitrarias de hormigón armado sometidas a flexión biaxial compuesta.

## 2 ESTADO DEL ARTE: MÉTODOS APROXIMADOS

En el cálculo y dimensionamiento del hormigón armado en flexión compuesta recta, las armaduras se obtienen con ayuda de los diagramas de interacción que dependen de la geometría de la columna, la calidad del hormigón, de las barras de acero y su distribución.

El CIRSOC 201-2005, Reglamento Argentino de Estructuras de Hormigón, adopta un procedimiento que utiliza los diagramas de interacción para tres tipos de secciones:

- Secciones rectangulares con armadura simétrica sometidas a flexión compuesta recta;
- Secciones rectangulares con armaduras iguales en los cuatro lados sometidas a flexión compuesta; y,
- Secciones circulares sometidas a flexión compuesta recta.

Los diagramas disponibles están limitados a los casos de hormigones con resistencia característica a la compresión ( $f'_c$ ) de 20 MPa, 25 MPa, 30 MPa, 35 MPa, 40 MPa y 50 MPa, y la distancia entre ejes de la armadura, dada por la fórmula  $h'=\gamma'h$ , donde «h» es la longitud de la arista, y con estos valores de  $\gamma$ : 0,5; 0,6; 0,7; 0,8 y 0,9 (recubrimiento de las armaduras). Cuando el problema no encaja en alguna solución existente, el procedimiento permite la interpolación lineal entre resultados de los diversos diagramas.

Respecto de la flexión biaxial, puede ocurrir en los casos 1 y 2, no así en el tercero. En esos casos, solo se hace referencia en los Comentarios anexos al mismo, donde se citan algunos métodos aproximados, como los Métodos de Bresler. Dichas aproximaciones requieren el análisis y dimensionamiento en cada dirección en forma individual.

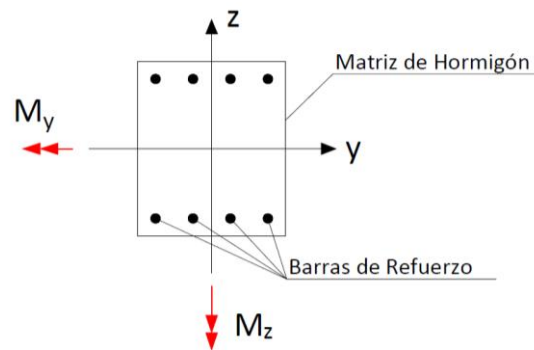
Estos métodos resultan aproximación adecuadas para geometrías rectangulares con armadura simetría, no así para otras condiciones más complejas.

## 3 MODELO PROPUESTO

En este artículo se propone un modelo que verifique la sección de hormigón junto con la armadura de refuerzo compuesta por barras de acero, sin tener que usar los diagramas de interacción. El modelo utiliza una formulación mediante una discretización de la sección de hormigón en elementos cuadriláteros y la ubicación de las barras de acero en coincidencia de nodos que definen a esos elementos. La discretización de la sección en elementos da la

libertad de analizar secciones de forma arbitraria. El desarrollo del modelo se basa en el equilibrio de las solicitaciones y las tensiones internas del elemento solicitado a flexión compuesta biaxial.

Las solicitaciones que actúan son el esfuerzo normal (dirección «x») y los momentos flectores en las direcciones «y» y «z», (figura siguiente con eje «x» perpendicular y saliente al plano de la sección).



**Figura 1: Sección de la columna**

#### 4 DESCRIPCIÓN DEL MODELO

El modelo parte de considerar el equilibrio entre las solicitaciones y las tensiones internas de manera de que se cumpla que:

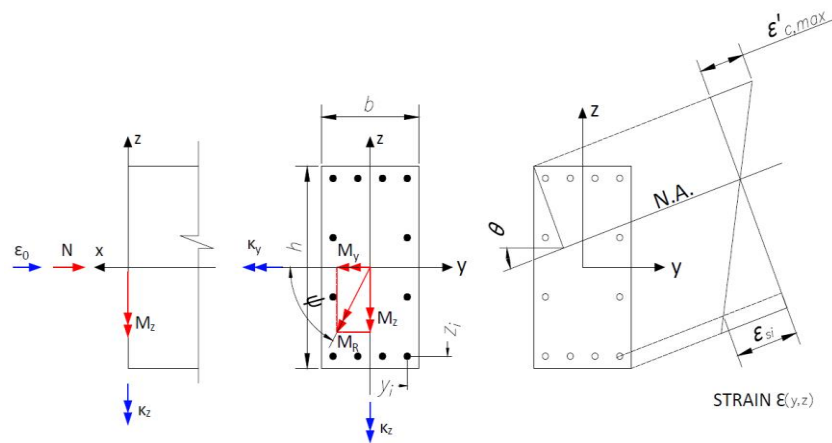
$$\underline{\mathbf{R}}_{(3 \times 1)} - \underline{\mathbf{F}}_{(3 \times 1)} = \underline{\mathbf{0}}_{(3 \times 1)} \quad (1)$$

donde R y F son los matrices de dimensiones (3x1) de solicitaciones externas y fuerzas debidas a las tensiones internas, respectivamente. El sistema de ecuaciones en forma explícita resulta:

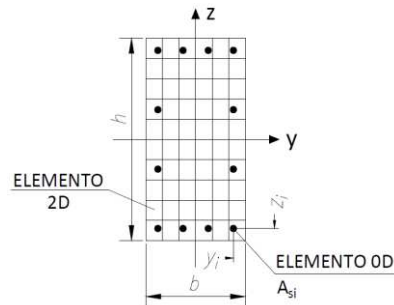
$$\begin{aligned} N - \int_{\Omega} \sigma_{(y,z)} d\Omega &= 0 \\ M_z - \int_{\Omega} \sigma_{(y,z)} y d\Omega &= 0 \\ M_y - \int_{\Omega} \sigma_{(y,z)} z d\Omega &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Las integrales representan las fuerzas debidas a las tensiones internas, que dependen de las deformaciones de los materiales intervinientes (hormigón y acero).

Para evaluar esas integrales, se discretiza la sección de hormigón en elementos cuadriláteros isoparamétricos de cuatro nodos, en tanto que las barras de acero se discretizan con elementos 0D con un área asociada, lo que permite establecer una metodología de trabajo independiente de la complejidad de la sección.



**Figura 2 Sección típica sometida a flexión compuesta biaxial.**



**Figura 3 Sección típica discretizada**

Con esta discretización, las ecuaciones de equilibrio pueden reescribirse como:

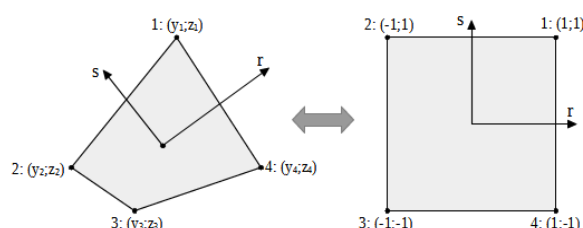
$$\begin{aligned}
 N - \left[ \sum_{i=1}^{NELEM} \int_{\Omega_i} f_c \, d\Omega + \sum_{i=1}^{NBARS} A_{S_i} f_{S_i} - \sum_{i=1}^{NBARS} A_{S_i} f_{C_i} \right] &= 0 \\
 M_y - \left[ \sum_{i=1}^{NELEM} \int_{\Omega_i} f_c z_i \, d\Omega + \sum_{i=1}^{NBARS} A_{S_i} f_{S_i} z_i - \sum_{i=1}^{NBARS} A_{S_i} f_{C_i} z_i \right] &= 0 \\
 M_z - \left[ \sum_{i=1}^{NELEM} \int_{\Omega_i} f_c y_i \, d\Omega + \sum_{i=1}^{NBARS} A_{S_i} f_{S_i} y_i - \sum_{i=1}^{NBARS} A_{S_i} f_{C_i} y_i \right] &= 0
 \end{aligned} \quad (3)$$

donde:

- $A_{S,i}$ : área de la barra de acero «i»;
- $f_c$ : tensión del hormigón;
- $f_{c,i}$ : tensión del hormigón ocupado por la barra de acero «i»;
- $f_{s,i}$ : tensión de la barra de acero «i»;
- NELEM: número o cantidad de elementos (hormigón);
- NBARS: número o cantidad de barras de acero;
- $\Omega_i$ : área del elemento «i» (hormigón);
- $y_i$ : distancia del baricentro de la barra «i» al eje baricéntrico «z» de la sección de hormigón;
- $z_i$ : distancia del baricentro del elemento «i» al eje baricéntrico «y» de la sección de hormigón;

- $z_j; z_k$ : distancia del baricentro de las barras «j» y «k» al eje baricéntrico «y» de la sección de hormigón;
- $y_j; y_k$ : distancia del baricentro de las barras «j» y «k» al eje baricéntrico «z» de la sección de hormigón.

Al usarse elementos isoparamétricos, las integrales definidas se resuelven mediante Cuadratura de Gauss-Legendre. El elemento isoparamétrico queda definido como:



**Figura 4 : Elemento isoparamétrico cuadrilátero de 4 nodos**

Las funciones de forma del elemento de referencia son:

$$\begin{aligned}
 h_1(r, s) &= \frac{1}{4} (1 + r)(1 + s) \\
 h_2(r, s) &= \frac{1}{4} (1 - r)(1 + s) \\
 h_3(r, s) &= \frac{1}{4} (1 - r)(1 - s) \\
 h_4(r, s) &= \frac{1}{4} (1 + r)(1 - s)
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

Las deformaciones a lo largo de la sección, como simplificación, se asumen lineales:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_0 + \kappa_y \cdot z - \kappa_z \cdot y
 \tag{5}$$

que representa la hipótesis de que la sección permanece plana después de la deformación y donde  $\varepsilon_0 \varepsilon_x$  es la deformación axial total en un punto «y,z» del dominio,  $\varepsilon_0$  es la deformación axial del eje de referencia,  $\kappa_y, \kappa_z$  son las curvaturas de la sección.

Incorporando (5) en (3) mediante la relación constitutiva tensiones-deformaciones y aplicando la siguiente relación para tomar las integrales en los elementos:

$$\int_{\Omega} d\Omega = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \det(\underline{J}) dr ds
 \tag{6}$$

donde  $\underline{J}$  es la matriz Jacobiana, todo el modelo de resolución queda definido mediante el siguiente sistema de 3 ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}
 \tag{7}$$

con:

$$K_{11} = \sum_{i=1}^{NELEM} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} C_c^{(i)} \det(\underline{J}) dr ds + \sum_{i=1}^{NBAR} A_{S_i} (C_S^{(i)} - C_C^{(i)})
 \tag{8}$$

$$\begin{aligned}
K_{12} &= \sum_{i=1}^{NELEM} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} C_c^{(i)} z_i \det(\underline{J}) dr ds + \sum_{i=1}^{NBAR} A_{S_i} z_i (C_S^{(i)} - C_C^{(i)}) \\
K_{13} &= \sum_{i=1}^{NELEM} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} C_c^{(i)} y_i \det(\underline{J}) dr ds + \sum_{i=1}^{NBAR} A_{S_i} y_i (C_S^{(i)} - C_C^{(i)}) \\
K_{22} &= \sum_{i=1}^{NELEM} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} C_c^{(i)} z_i^2 \det(\underline{J}) dr ds + \sum_{i=1}^{NBAR} A_{S_i} z_i^2 (C_S^{(i)} - C_C^{(i)}) \\
K_{23} &= \sum_{i=1}^{NELEM} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} C_c^{(i)} y_i z_i \det(\underline{J}) dr ds + \sum_{i=1}^{NBAR} A_{S_i} y_i z_i (C_S^{(i)} - C_C^{(i)}) \\
K_{33} &= \sum_{i=1}^{NELEM} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} C_c^{(i)} y_i^2 \det(\underline{J}) J dr ds + \sum_{i=1}^{NBAR} A_{S_i} y_i^2 (C_S^{(i)} - C_C^{(i)})
\end{aligned}$$

Se tiene  $K_{21} = K_{12}$ ,  $K_{31} = K_{13}$  y  $K_{32} = K_{23}$ . Los parámetros  $C_c$  y  $C_s$  están dados por la relación constitutiva 1D adoptada para el hormigón y el acero. Como estos dos valores dependen de la deformación, el sistema de ecuaciones es no lineal.

Aplicando el método de Cuadratura de Gauss para calcular las integrales, el aporte de los elementos de hormigón a la matriz de rigidez está definido por la siguiente expresión:

$$\underline{K}_C^{(e)} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} C_c^{(i)} \begin{bmatrix} 1 & z_i & y_i \\ z_i & z_i^2 & y_i z_i \\ y_i & y_i z_i & y_i^2 \end{bmatrix} \det(\underline{J}) dr ds = \sum_{i=1}^{NPG} \sum_{j=1}^{NPG} w_i w_j C_c^{(i)} \underline{A} \det(\underline{J}) \quad (9)$$

donde NPG representa el número de puntos de Gauss (para elemento de 4 nodos, NPG=2) y  $w_i$  son los pesos de Gauss. Las coordenadas locales de cada elemento son mapeadas a las coordenadas globales mediante la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} y(r, s) \\ z(r, s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & N_1 & \dots & N_{NNOD} & 0 \\ 0 & N_1 & \dots & 0 & N_{NNOD} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y^{(1)} \\ z^{(1)} \\ \vdots \\ y^{(NNOD)} \\ z^{(NNOD)} \end{bmatrix} \quad (10)$$

donde  $N_i$  representa la función de forma asociada al nodo "i", mientras NNOD, el número total de nodos del elemento.

Para el hormigón se adopta una relación elástica perfectamente plástica para la zona de compresión, (CIRSOC 201-96M), y la zona de tracción, como es usual:

$$\begin{aligned}
f_c &= 0 & \varepsilon_c &\leq 0 \\
f_c &= \frac{f''_c}{0.00135} \cdot \varepsilon_c & 0 < \varepsilon_c &\leq 1.35 \text{ ‰} \\
f_c &= 0.85 \cdot f'_c & 1.35 \text{ ‰} < \varepsilon_c &\leq 3.5 \text{ ‰}
\end{aligned} \quad (11)$$

donde  $f''_c$  es la resistencia de cálculo adoptada ( $0.85 \cdot f'_c$ ), y para el acero, un diagrama bilineal perfectamente plástico de igual comportamiento para tracción como para compresión:

$$\begin{aligned}
 f_s &= -f_y \\
 f_s &= E_s \cdot \varepsilon_s \\
 f_s &= f_y
 \end{aligned}
 \qquad
 \begin{aligned}
 \varepsilon_s &\leq \varepsilon_y \\
 -\varepsilon_y &< \varepsilon_s \leq \varepsilon_y \\
 \varepsilon_y &\leq \varepsilon_s
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

Para el caso de barras ADN420, los parámetros  $f_y, E_s, \varepsilon_y$  toman los valores 420.0 MPa, 200 GPa y 0.0021, respectivamente. La tracción ha sido considerada negativa.



**Figura 5 Relaciones constitutivas 1D para hormigón (izquierda) y acero (derecha)**

Vale destacar que puede tomarse una relación tensión-deformación con otros modelos más complejos, sin cambios sustanciales en la formulación de modelo de resolución propuesto.

Para resolver todo el sistema de ecuaciones no lineales, se plantea el equilibrio mediante un esquema iterativo del tipo Newton-Raphson, para  $IT=1,2,3,\dots,MAXIT$ :

$$\begin{aligned}
 \underline{\mathbf{K}}^{(IT)} \cdot \underline{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}}^{IT+1} &= \underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{F}}^{(IT)} \\
 \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(IT+1)} &= \underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(IT)} + \underline{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}}^{(IT+1)}
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

El proceso iterativo finaliza cuando se cumplen las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned}
 \frac{\|\underline{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}}^{(IT+1)}\|_2}{\|\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(IT+1)}\|_2} &\leq TOL \\
 \frac{\|\underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{F}}^{(IT+1)}\|_2}{\|\underline{\mathbf{R}} - \underline{\mathbf{F}}^{(0)}\|_2} &\leq TOL
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

La segunda condición de convergencia implica que el módulo del vector residuo es lo suficientemente pequeño como para que ambos vectores R y F sean prácticamente colineales.

**Box 1. NR iteration.**

Step 1. Initialize  $IT = 0, \mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{x}^{tr}, d\mathbf{R}^{(0)} = \mathbf{R} - \mathbf{F}^{(0)}$

Step 2. Compute Tangent Matrix  $\mathbf{K}^{(IT)}$ .

Step 3. Solve  $\mathbf{K}^{(IT)} \cdot \delta \mathbf{x}^{(IT+1)} = d\mathbf{R}^{(IT)}$ .

Step 4. Update solution  $\mathbf{x}^{(IT+1)} = \mathbf{x}^{(IT)} + \delta \mathbf{x}^{(IT+1)}$ .

Step 5. Compute residual vector  $d\mathbf{R}^{(IT+1)} = d\mathbf{R}|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{(IT+1)}}$ .

Step 6.  $k \leftarrow k + 1$

Step 7. Compute error and check convergence. If error < TOL, exit; else, go to Step 2.

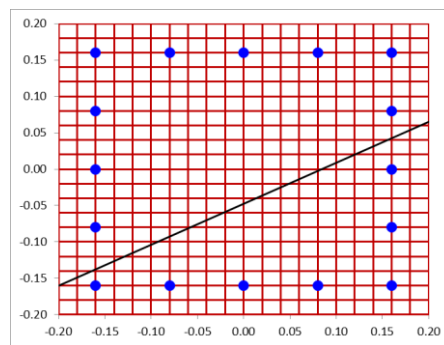
**Figura 6 : Implementación computacional algoritmo Newton-Rapshon.**

## 5 EJEMPLOS NUMÉRICOS

En base a la metodología explicada más arriba, se implementó un código computacional para la resolución de secciones arbitrarias sometidas a flexión compuesta biaxial.

En este primer ejemplo, se trata de una sección cuadrada de 0.40m y recubrimiento mecánico  $d'=0.04m$ . La cuantía adoptada es del 2% compuesta por 16 barras de 16mm de diámetro de acero ADN420 uniformemente distribuidas y hormigón H30. La sección se discretizó en una malla de 20x20 elementos cuadriláteros uniformes. Las solicitaciones adimensionalizadas fueron:

$$n = \frac{N}{f'_c b h} = 0.40 \quad m_y = \frac{M_y}{f'_c b h^2} = 0.10 \quad m_z = \frac{M_z}{f'_c b^2 h} = 0.05 \quad (15)$$



**Figura 7 : Sección analizada 1º ejemplo. Línea continua negra: eje neutro resultante.**

Con los resultados obtenidos, se calculó la orientación del eje neutro y se la comparó con la del vector momento resultante:

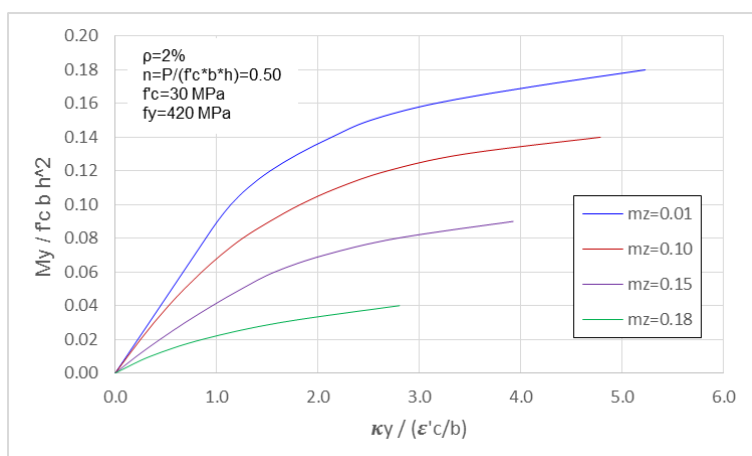
$$\psi = \text{atan} \left( \frac{M_z}{M_y} \right) = 26.6^\circ \text{DEG} \quad \theta = \text{atan} \left( \frac{\kappa_z}{\kappa_y} \right) = 29.3^\circ \text{DEG} \quad (16)$$

Como era de esperarse, a pesar de que la sección es simétrica y la disposición de la armadura también, la orientación del eje neutro y la del vector momento resultante no coinciden. Para secciones asimétricas, esta diferencia se magnifica.

En el segundo caso analizado, se trata de una sección cuadrada de dimensiones  $a=b=0.60m$  y recubrimiento mecánico  $d'=0.06m$ . Salvo indicación, la cuantía es  $\rho=2\%$  y la resistencia característica a compresión del hormigón  $f'_c=30$  MPa. Las propiedades del acero son correspondientes al ADN420. La sección se dividió con una malla uniforme de 20x20 elementos, mientras que la cuantía adoptada se distribuyó en 12 barras uniformemente distribuidas.

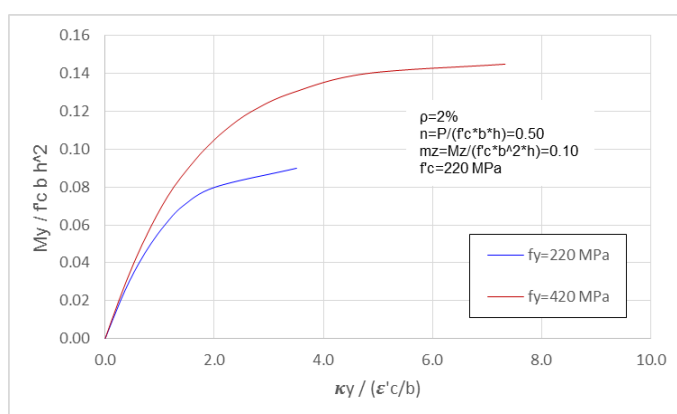
Se gráfica la relación momento-curvatura en forma adimensionalizada:



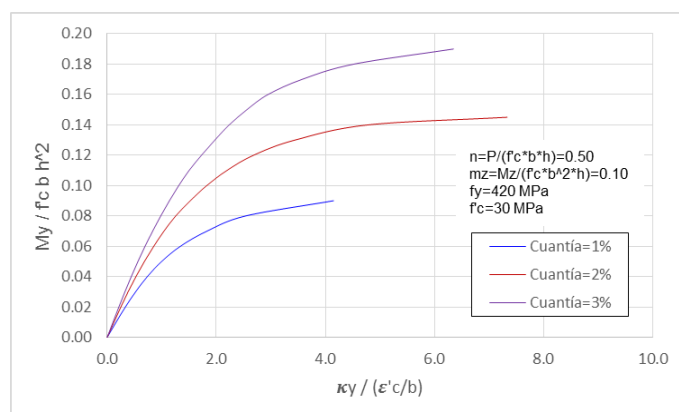


**Figura 8: Relación momento-curvatura para diferentes valores de momento  $m_z=M_z/(f'c \cdot b^2 \cdot h)$ . Caso típico.**

Estas curvas dependen de la magnitud de la carga de compresión, de la calidad del hormigón, la calidad del acero y de la cuantía de refuerzo. Se presentan algunos gráficos variando algunos de dichos factores:



**Figura 9: Relación momento-curvatura para diferentes calidades de refuerzo. Caso típico.**



**Figura 10: Relación momento-curvatura para diferentes cuantías de refuerzo. Caso típico.**

Como era de esperarse, al incrementar la calidad de las barras de refuerzo, se da un incremento de la rigidez y resistencia de la sección y lo mismo ocurre si se incrementa el porcentaje de refuerzo.

Como un último ejemplo, se desarrolló una sección cuadrada de hormigón de 0.20m de arista y cuatro barras de acero. Las cargas fueron: esfuerzo normal,  $N=22,08$  kN; momento en el eje «y»,  $M_y=0,47$  kNm, y momento en el eje «z»,  $M_z=10,44$  kNm.

Los materiales fueron:

1. Hormigón H35:  $f'_c=35$  MPa,  $f''_c=28$  MPa,  $\varepsilon''_c=0,00135$ .
2. Acero ADN 420:  $f_y=420$  MPa,  $E=200$  GPa.

El método de cálculo dimensionamiento adoptada fue el LRFD. Las tolerancias impuestas para los criterios de deformación, de fuerzas (tensiones) y energético fue  $10^{-4}$ . Se adoptaron estribos  $\varnothing 6$  y un recubrimiento de 5 cm, simplemente a los efectos de determinar la posición exacta de las barras longitudinales, no considerándose el confinamiento de los estribos sobre la resistencia del hormigón. Las verificaciones se hicieron para barras con diámetros:  $\varnothing 8$ ,  $\varnothing 12$  y  $\varnothing 20$ , para analizar cómo se comporta el algoritmo para cada caso en función de la armadura dispuesta.

Los resultados fueron:

1. Barras  $\varnothing 8$ : el modelo no pudo equilibrar el sistema. Las iteraciones se interrumpieron cuando todas las barras alcanzaron la tensión de fluencia.

Resultados:

Diámetro (mm)	Coord y (cm)	Coord z (cm)	Deformación (-)	Tensión (MPa)	N (kN)	$M_y$ (kNm)	$M_z$ (kNm)
8	-4,00	-4,00	—	420	21,1	-0,84	-0,84
8	4,00	-4,00	—	420	21,1	-0,84	-0,84
8	-4,00	4,00	—	420	21,1	-0,84	-0,84
8	4,00	4,00	—	420	21,1	-0,84	-0,84

2. Barras  $\varnothing 12$ : el modelo logró equilibrar al sistema. Ninguna barra alcanzó la tensión de fluencia ni el hormigón superó la deformación por compresión.

Resultados:

Diámetro (mm)	Coord y (cm)	Coord z (cm)	Deformación (-)	Tensión (MPa)	N (kN)	$M_y$ (kNm)	$M_z$ (kNm)
12	-3,80	-3,80	-0,00181	-362,1	-41,0	1,56	1,56
12	3,80	-3,80	-0,00025	-50,3	-5,7	0,22	-0,22
12	-3,80	3,80	-0,00176	-352,4	-39,9	-1,51	1,51
12	3,80	3,80	-0,00020	-40,6	-4,6	-0,17	-0,17

3. Barras  $\varnothing 20$ : el modelo logró equilibrar al sistema. Ninguna barra alcanzó la tensión de fluencia ni el hormigón superó la deformación por compresión.

Resultados:

Diámetro (mm)	Coord y (cm)	Coord z (cm)	Deformación (-)	Tensión (MPa)	N (kN)	$M_y$ (kNm)	$M_z$ (kNm)
20	-3,40	-3,40	-0,00097	-193,4	-60,8	2,07	2,07
20	3,40	-3,40	0,00001	2,9	0,9	-0,03	0,03
20	-3,40	3,40	-0,00093	-185,9	-58,4	-1,99	1,99
20	3,40	3,40	0,00005	10,4	3,3	0,11	0,11

## 6 CONCLUSIONES Y FUTUROS AVANCES

Se presentó e implementó una metodología sencilla para el análisis de secciones arbitrarias de hormigón armado. Se llevaron a cabo algunos ejemplos sencillos con secciones rectangulares, analizándose los resultados obtenidos. Se observa que los mismos son coherentes con lo esperable teóricamente. Se espera avanzar en el futuro en el análisis de secciones de forma más compleja y en la introducción de relaciones constitutivas más complejas que tengan en cuenta, por ejemplo, el endurecimiento del acero y el aumento de resistencia por confinamiento del hormigón, a los efectos de poder graficar curvas momento-curvatura en forma más precisa hasta la falla, información de gran importancia, por ejemplo, en el diseño sísmico para calcular ductilidades.

### REFERENCIAS

- Chen, W. F. and Shoraka, M. T. *"Tangent stiffness method for biaxial bending of reinforced concrete columns"* Fritz Laboratory Report No. 391.1, Lehigh University, Bethlehem, Pa., October 1972.
- Reglamento CIRSOC 201 – Reglamento Argentino de Estructuras de Hormigón (2005).*
- Reglamento CIRSOC 201 – Comentarios Reglamento Argentino de Estructuras de Hormigón (2005).*
- Reglamento CIRSOC 201 M – Proyecto, Cálculo y Ejecución de Estructuras de Hormigón Armado y Pretensado para Obras Privadas Municipales (1996).*