

## CARGAS CRÍTICAS DE MICROVIGAS TIMOSHENKO MEDIANTE LA TEORÍA DEL GRADIENTE DE DEFORMACIÓN Y EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

### CRITICAL LOADS OF TIMOSHENKO MICROBEAMS BASED ON THE STRAIN GRADIENT THEORY AND THE FINITE ELEMENTS METHOD

Daniel H. Felix<sup>a</sup>, Graciela I. Guerrero<sup>a</sup> y Diana V. Bambill<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup>*Departamento de Ingeniería, Instituto de Ingeniería de la UNS (IIUNS), Universidad Nacional del Sur,  
Avda. Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina, dhfelix@uns.edu.ar, <http://www.uns.edu.ar>*

<sup>b</sup>*Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, Avda. Alem 1253, 8000 Bahía Blanca,  
Argentina, dbambill@criba.edu.ar, <http://www.uns.edu.ar>*

**Palabras clave:** Timoshenko, microvigas, carga crítica, teoría del gradiente de deformación, elementos finitos, constantes de longitud de escala

**Resumen.** Este trabajo presenta el desarrollo e implementación de un algoritmo destinado a la obtención de cargas críticas de microvigas basado en la teoría de vigas Timoshenko. La determinación de las características mecánicas, tanto estáticas como dinámicas, de estos elementos reviste sumo interés. En el planteo del modelo estructural presentado, se tienen en cuenta los efectos de las constantes de longitud de escala del material de la microviga en el comportamiento de la viga bajo cargas axiales de compresión. Las condiciones de sujeción de la microestructura se varían, para analizar el efecto de la vinculación en la inestabilidad del equilibrio ante la presencia de dichas cargas. Se determinan las cargas críticas de diferentes tipos de microvigas. Se establecen conclusiones de interés del análisis numérico de la inestabilidad del equilibrio, para los diferentes casos planteados. El planteo del problema del título se desarrolla en base a la teoría del Segundo Gradiente y se obtienen resultados numéricos para los diferentes casos mediante la utilización del Método de Elementos Finitos.

**Keywords:** Timoshenko, microbeams, critical loads, strain gradient theory (SGT), finite elements, scale length constants.

**Abstract.** This paper presents the development and implementation of an algorithm for obtaining critical microbeam loads based on the Timoshenko beam theory. The determination of the mechanical characteristics, both static and dynamic, of these elements has great interest. In the presentation of the structural model, the effects of the microbeam material are studied. The material length scale constants affect the behavior of the beam under axial compression loads. Also the boundary conditions of the microstructure were varied to analyze their effect on the critical loads. The critical loads of different types of microbeams are presented. Conclusions from the numerical analysis of critical loads for the different cases presented are shown. The title problem is developed based on the Second Gradient Theory and the numerical results were obtained with the Finite Element Method.

## 1. INTRODUCCIÓN

Los elementos estructurales de escalas micro y nanométricas constituyen en la actualidad un área de investigación de interés creciente por sus múltiples aplicaciones. La teoría utilizada en el presente trabajo pertenece al amplio campo de la mecánica del continuo generalizado, que tuvo sus inicios en una publicación de los hermanos Cosserat, en el año 1909, texto que fue reeditado por Gabay, al cumplirse 100 años de su publicación original, [Cosserat y Cosserat \(2009\)](#). Sin embargo, diferentes subcampos de esta amplísima teoría comenzaron a tener un impulso significativo, recién a partir de la década de 1960, principalmente por las dificultades que presentaba y la falta de un grado de aplicación práctica significativo que lo justificara. Se destacan entre los aportes de dicha época, los trabajos de [Mindlin \(1964\)](#); [Mindlin y Eshel \(1968\)](#), más enfocado en las teorías del gradiente y los trabajos de [Eringen y Suhubi \(1964\)](#), [Eringen \(1966\)](#), en el campo de la teoría de elasticidad no local.

A comienzos de nuestro siglo, la actividad de investigación para caracterizar materiales y componentes estructurales utilizando teorías que tuviesen en cuenta los efectos de escala, han tenido un particular interés, especialmente debido a la demanda de la industria de la micro y nanotecnología, ya que, como muestran los resultados de numerosas investigaciones, los efectos de escala en componentes de dimensiones micro o nanométricas, resultan significativos y no pueden despreciarse, si se pretende obtener resultados de elevada precisión.

Se puede considerar que existieron dos razones principales que ralentizaron los avances en el conocimiento del comportamiento estructural de los materiales a escala micrométrica. La primera y probablemente, la más importante, era la falta de incentivo en dichas investigaciones, debido a la inexistencia de demanda de componentes micro y nanométricos en la industria de principios del siglo XX. La segunda razón que hacía muy dificultosa la aplicación de las teorías desarrolladas hasta las décadas de los 60's y 70's, era la imposibilidad de cuantificar experimentalmente, la numerosa cantidad de constantes adicionales que requerían dichas teorías.

Sin embargo, a partir de los 90's y especialmente ya comenzado el siglo XXI, se produjeron importantes contribuciones que permitieron reducir significativamente el número de constantes propias de los materiales requeridas en la utilización de las teorías de escala o también denominadas, teorías del continuo generalizado.

En los sistemas estructurales unidimensionales y en campo elástico, se destacan entre otros, [Lam et al. \(2003\)](#); [Kong et al. \(2009\)](#), con aportes significativos a la teoría del primer gradiente de deformaciones y el estudio de [Yang et al. \(2002\)](#) que produce avances de gran importancia práctica en la teoría de la tensión de cupla, reduciendo las constantes adicionales del material a solo una, obteniéndose la denominada teoría modificada de tensión de cupla, la cuál es conocida por su sigla en inglés MCST. También han contribuido significativamente los estudios de [Lam et al. \(2003\)](#), a la teoría del gradiente de deformación, reduciendo a solo tres, la cantidad de constantes adicionales del material, necesarias para caracterizar las propiedades de escala del mismo. Dicha variante se denomina teoría modificada del gradiente de deformación, conocida por su sigla en inglés MSGT. Estas constantes se conocen como constantes de longitud de escala del material. Son muy numerosas las contribuciones con que se cuenta a partir de esta época, mencionándose [Asghari et al. \(2010\)](#); [Zhang et al. \(2014\)](#). Este último junto a sus colaboradores, introdujeron un elemento finito de orden superior, que permite mantener la continuidad tanto en  $C_0$  como en  $C_1$ , utilizado en el estudio de componentes lineales y requerida por el orden superior de las componentes de tensión y deformación que aparecen al tener en cuenta los efectos de las constantes de longitud de escala del material [Guerrero et al. \(2015\)](#), [Felix et al. \(2016\)](#).

## 2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

El punto de partida para establecer la teoría a utilizar consiste en la formulación de las hipótesis cinemáticas que definen las expresiones del campo de desplazamientos en el dominio del componente estructural.

Los autores [Akgöz y Civalek \(2011\)](#), han propuesto una solución analítica para determinar la carga crítica que produce la inestabilidad del equilibrio de la microviga, en el caso de una microviga del tipo Euler. Algunos de los resultados obtenidos por estos autores se presentan como referencia de comparación para casos particulares del modelo propuesto en el presente trabajo.

### 2.1. Campo de desplazamientos

El campo de desplazamientos se formula mediante las hipótesis cinemáticas de la viga Timoshenko clásica, con lo cual se tiene:

$$\varphi = \varphi(x) \quad (1a)$$

$$w = w(x) \quad (1b)$$

siendo  $\varphi$  es el giro de la sección transversal de la microviga y  $w$  el desplazamiento transversal del eje neutro de la microviga. Si se desprecian las deformaciones axiales del eje directriz de la viga resulta:

$$u(x, z) = -z \varphi(x) \quad (2)$$

Por otra parte, las deformaciones ocurren en el plano formado por el eje directriz de la viga, eje  $x$ , y un eje perpendicular al mismo, eje  $z$ , de modo que, no se tienen desplazamientos laterales. Resulta así:

$$v = 0 \quad (3)$$

### 2.2. Ecuaciones cinemáticas y constitutivas

El paso siguiente consiste en establecer las ecuaciones cinemáticas y las ecuaciones constitutivas. Es aquí en donde se produce una marcada diferencia con la teoría clásica ya que la teoría utilizada, es la MSGT y requiere contemplar componentes de orden superior. Una descripción detallada de dichas expresiones puede hallarse en [Felix et al. \(2016\)](#). Por razones de espacio solo se reproducen aquí las componentes tensoriales sin desarrollar en detalle. Se tiene así:

- Deformaciones y tensiones clásicas: las componentes clásicas de deformación se expresan en la forma:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (4)$$

mientras que las ecuaciones constitutivas, válidas para materiales isotrópicos, que dan lugar a las tensiones clásicas resultan:

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{mm} \delta_{ij} + 2 \mu \epsilon_{ij} \quad (5)$$

puede observarse en las ecs. (5) que aparecen las conocidas constantes de Lamé  $\lambda$  y  $\mu$ .

- Componentes de curvatura y tensiones de cupla: Las componentes de curvatura originadas por la dimensión finita de cada partícula elemental del continuo son:

$$\chi_{ij}^{(s)} = \frac{1}{4} \left( e_{ipq} \frac{\partial \epsilon_{qj}}{\partial x_p} + e_{jipq} \frac{\partial \epsilon_{qi}}{\partial x_p} \right) \quad (6)$$

y las correspondientes ecuaciones constitutivas, que dan origen a las denominadas tensiones de par o tensiones de cupla, resultan:

$$m_{ij}^{(s)} = 2 \mu l_2^2 \chi_{ij}^{(s)} \quad (7)$$

Puede observarse que en las ecs. (7), aparece la constante de longitud de escala  $l_2$ .

- Componentes del gradiente de dilatación: Las componentes del gradiente de dilatación, aparecen por la dilatación de las partículas o puntos materiales, y se expresan del siguiente modo:

$$\gamma_i = \frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial x_i} + \frac{\partial \epsilon_{yy}}{\partial x_i} + \frac{\partial \epsilon_{zz}}{\partial x_i} \quad (8)$$

siendo las ecuaciones constitutivas que dan origen a las correspondientes tensiones:

$$p_i = 2 \mu l_0^2 \gamma_i \quad (9)$$

Como se observa, aparece en las ecs. (9), la constante de longitud de escala  $l_0$ .

- Componentes desviadoras de orden superior: Por último se tienen las componentes desviadoras, que se expresan en la forma:

$$\eta_{ijk}^{(1)} = \eta_{ijk}^{(s)} - \frac{1}{5} \left( \delta_{ij} \eta_{mmk}^{(s)} + \delta_{jk} \eta_{mmi}^{(s)} + \delta_{ik} \eta_{mmj}^{(s)} \right) \quad (10)$$

siendo:

$$\eta_{ijk}^{(s)} = \frac{1}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial v}{\partial z \partial x} + \frac{\partial w}{\partial x \partial y} \right) \quad (11)$$

Las ecuaciones constitutivas correspondientes, permiten obtener las componentes de tensión de orden superior:

$$\tau_{ijk}^{(1)} = 2 \mu l_1^2 \eta_{ijk}^{(1)} \quad (12)$$

Puede observarse en las ecs. (12), que aparece la constante de longitud de escala  $l_1$ , teniendo así las tres constantes de longitud de escala del material,  $l_0$ ,  $l_1$  y  $l_2$ , que la teoría modificada del gradiente agrega a las dos constantes clásicas de Lamé,  $\lambda$  y  $\mu$ .

### 2.3. Ecuaciones gobernantes

Al tratarse de la determinación de cargas que producen la inestabilidad del equilibrio de la microviga, el principio de Hamilton se formula en este caso, en la forma:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (U + W) dt = \int_{t_1}^{t_2} (\delta U + \delta W) dt = 0 \quad (13)$$

siendo  $U$ , la energía de deformación y  $W$ , la energía potencial de las cargas externas aplicadas en la microviga. En la variación de la energía de deformación de la microviga, intervienen las tensiones y deformaciones clásicas, las respectivas tensiones y deformaciones relacionadas

al gradiente de dilatación, las componentes de tensión y deformación desviadoras de orden superior y las tensiones de cupla y componentes del gradiente de rotación, resultando:

$$\delta U = \int_0^L \int_A (\sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} + p_i \delta \gamma_i + \tau_{ijk}^{(1)} \delta \eta_{ijk}^{(1)} + m_{ij}^{(S)} \delta \chi_{ij}^{(S)}) dA dx \quad (14)$$

Si consideramos la inestabilidad del equilibrio en la microviga, originada por la acción de un esfuerzo axial constante, generado por una carga aplicada en el extremo de la microviga, la expresión de la variación de la energía potencial de las cargas externas  $\delta W$ , en función de las componentes de desplazamiento, se tiene para una microviga de sección transversal constante:

$$\delta W = -N_0 \int_0^L \left( \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x} + \frac{I_z}{A} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \delta \phi}{\partial x} \right) dx \quad (15)$$

Siendo:  $N_0$ , el esfuerzo axial de compresión, provocado por la carga de prueba, aplicada en el extremo de la microviga;  $A$ , el área de la sección transversal de la misma e  $I_z$ , el respectivo momento de inercia. Desarrollando las componentes tensoriales de la ec. (14) y expresando aquellas componentes que resultan no nulas, en término de los desplazamientos  $w$  y  $\phi$  se alcanza la siguiente expresión para la ecuación de Hamilton, ec. (13):

$$\begin{aligned} & \int_0^L \left[ c_1 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta \phi}{\partial x^2} - \left( c_4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - c_2 \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \frac{\partial \delta \phi}{\partial x} - c_3 \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) \delta \phi \right. \\ & \left. + \left( c_5 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - c_4 \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + c_3 \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right) \frac{\partial \delta \phi}{\partial x} \right] dx \\ & - N_0 \int_0^L \left( \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x} + \frac{I_z}{A} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \delta \phi}{\partial x} \right) dx = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

siendo:

$$c_1 = \mu I_y \left( \frac{4}{5} l_1^2 + 2 l_0^2 \right); \quad c_2 = \left[ \mu A \left( \frac{32}{15} l_1^2 + \frac{1}{4} l_2^2 + 2 l_0^2 \right) + I_y (\lambda + 2 \mu) \right] \quad (17a)$$

$$c_3 = \mu A \kappa; \quad c_4 = \mu A \left( \frac{16}{15} l_1^2 - \frac{1}{4} l_2^2 \right) \quad (17b)$$

$$c_5 = \mu A \left( \frac{1}{4} l_2^2 + \frac{8}{15} l_1^2 \right) \quad (17c)$$

constantes, que son función de las dos constantes clásicas de Lamé,  $\mu$  y  $\lambda$ , válidas para materiales isotrópicos, del factor de corte  $\kappa$ , de las propiedades geométricas de la sección transversal  $A$  e  $I_z$  y de las 3 constantes de longitud de escala del material  $l_0$ ,  $l_1$  y  $l_2$ , que incorpora la teoría del gradiente de deformación.

### 3. IMPLEMENTACIÓN DEL ALGORITMO CON ELEMENTOS FINITOS

Para resolver la ecuación gobernante del problema (16), se utiliza el método de elementos finitos, aproximando el giro de la sección transversal,  $\varphi$  y el desplazamiento transversal,  $w$  mediante el uso del elemento finito de 2 nodos con 4 grados de libertad por nodo, que se muestra en la Figura 1b, el cual se obtiene de una simplificación del elemento propuesto por Zhang et al. (2014), al imponer la rigidez axial del eje neutro.

Se tiene entonces el siguiente vector de desplazamientos nodales:

$$\{U_e\} = \{w_1, w_{x1}, \varphi_1, \varphi_{x1}, w_2, w_{x2}, \varphi_2, \varphi_{x2}\}^t \quad (18)$$

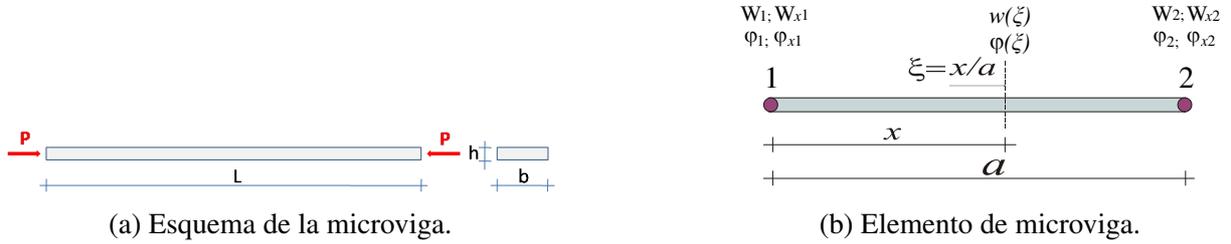


Figura 1: Esquema de la microviga y elemento utilizado.

Se observa que además de los desplazamientos nodales clásicos,  $w_1, \varphi_1, w_2, \varphi_2$ , que permiten imponer la continuidad en  $C_0$  de  $w$  y  $\varphi$ , se agregan los desplazamientos correspondientes a la primer derivada,  $w_{x1}, \varphi_{x1}, w_{x2}, \varphi_{x2}$ , que permiten imponer la continuidad en  $C_1$  de  $\frac{\partial w}{\partial x}$  y  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ , como lo exige la forma débil gobernante planteada, ec. (16).

Las funciones de forma correspondientes a ambos desplazamientos resultan:

$$N_1(\xi) = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3 \quad (19a)$$

$$N_2(\xi) = (\xi - 2\xi^2 + \xi^3) a \quad (19b)$$

$$N_3(\xi) = 3\xi^2 - 2\xi^3 \quad (19c)$$

$$N_4(\xi) = (\xi^3 - \xi^2) a \quad (19d)$$

con lo cual, las expresiones de  $w$  y  $\varphi$  quedan:

$$w(\xi) = [N_w] \{U_e\} \quad (20a)$$

$$\varphi(\xi) = [N_\varphi] \{U_e\} \quad (20b)$$

siendo:

$$[N_w] = [N_1(\xi), N_2(\xi), 0, 0, N_3(\xi), N_4(\xi), 0, 0] \quad (21a)$$

$$[N_\varphi] = [0, 0, N_1(\xi), N_2(\xi), 0, 0, N_3(\xi), N_4(\xi)] \quad (21b)$$

Al reemplazar los desplazamientos interpolados en la ec. (16), se pueden obtener las expresiones de la matriz de rigidez y de la matriz de rigidez geométrica del elemento:

$$\begin{aligned} [k_e] = & \frac{c_1}{a^3} \int_0^1 \left( \frac{\partial^2 [N_\varphi]}{\partial \xi^2} \right)^t \left( \frac{\partial^2 [N_\varphi]}{\partial \xi^2} \right) d\xi - \frac{c_4}{a^2} \int_0^1 \left( \frac{\partial^2 [N_w]}{\partial \xi^2} \right)^t \left( \frac{\partial [N_\varphi]}{\partial \xi} \right) d\xi \\ & + \frac{c_2}{a} \int_0^1 \left( \frac{\partial [N_\varphi]}{\partial \xi} \right)^t \left( \frac{\partial [N_\varphi]}{\partial \xi} \right) d\xi - c_3 \int_0^1 \left( \frac{\partial [N_w]}{\partial \xi} \right)^t ([N_\varphi]) d\xi \\ & + c_3 a \int_0^1 ([N_\varphi])^t ([N_\varphi]) d\xi + \frac{c_5}{a^3} \int_0^1 \left( \frac{\partial^2 [N_w]}{\partial \xi^2} \right)^t \left( \frac{\partial^2 [N_w]}{\partial \xi^2} \right) d\xi \\ & - \frac{c_4}{a^2} \int_0^1 \left( \frac{\partial [N_\varphi]}{\partial \xi} \right)^t \left( \frac{\partial^2 [N_w]}{\partial \xi^2} \right) d\xi + \frac{c_3}{a} \int_0^1 \left( \frac{\partial [N_w]}{\partial \xi} \right)^t \left( \frac{\partial [N_\varphi]}{\partial \xi} \right) d\xi \\ & - c_3 \int_0^1 ([N_\varphi])^t \left( \frac{\partial [N_\varphi]}{\partial \xi} \right) d\xi \end{aligned} \quad (22)$$

$$[k_e^g] = -\frac{N_0}{a} \left[ \int_0^1 \left( \frac{\partial[N_w]}{\partial\xi} \right)^t \left( \frac{\partial[N_w]}{\partial\xi} \right) d\xi + \frac{I_z}{A} \int_0^1 \left( \frac{\partial[N_\varphi]}{\partial\xi} \right)^t \left( \frac{\partial[N_\varphi]}{\partial\xi} \right) d\xi \right] \quad (23)$$

Las expresiones (22) y (23), permiten a su vez, mediante el ensamblado, obtener la matriz de rigidez global,  $K$  y la matriz de rigidez geométrica global,  $K_G$ , la cual, como puede observarse en la ec. (23), contiene el esfuerzo axil  $N_0$ , que se genera por acción de la carga de prueba que comprime la microviga. Finalmente obtenemos el autovalor  $\lambda$  que nos permiten determinar la carga crítica que inestabiliza la microviga en su primer modo, satisfaciendo la ecuación característica dada por el siguiente determinante:

$$|[K] - P_{cr} [K_G]| = 0 \quad (24)$$

Al menor autovalor que satisface la ecuación característica (24) lo denominamos primer valor de carga crítica correspondiente al primer modo de pandeo,  $P_{cr}$ . Finalmente, del proceso de adimensionalización, se tiene la relación entre el coeficiente  $\lambda_{cr}$  y el carga crítica obtenido  $P_{cr}$ :

$$\lambda_{cr} = P_{cr} \frac{L^2}{E I_z} \quad (25)$$

#### 4. RESULTADOS NUMÉRICOS

Para determinar el número conveniente de elementos que define el mallado de la microviga se realizó el análisis de convergencia del autovalor de carga crítica, que se muestra en la Tabla 1. Como puede observarse en el esquema de la Figura 1a, el modelo utilizado queda definido por la longitud  $L$  de la microviga, su espesor  $h$  y la carga axil de prueba  $P$ , aplicada en la misma.

En todos los casos, la teoría utilizada se identifica con su correspondiente sigla en ingles, siendo: CT, la teoría clásica, que recordamos es la teoría elástica que no incorpora ninguna de las tres constantes de longitud de escala del material; MCST, la teoría modificada de tensión de cupla, que solo incorpora la constante de longitud de escala  $l_2$  y por lo tanto desprecia los efectos del gradiente de deformación, y MSGT, la teoría modificada del gradiente de deformación, que tiene en cuenta todas las propiedades de escala descritas anteriormente.

Basado en el análisis numérico de convergencia, que se muestra en la Tabla 1, se adopta una malla de 20 elementos para determinar los autovalores correspondientes a la carga crítica del primer modo que inestabiliza la microviga, considerándose que se obtiene con tal malla una buena precisión de los resultados.

Una vez definida la cantidad de elementos a utilizar, se procedió a determinar, en función de las diferentes propiedades del modelo, la carga crítica correspondiente al primer modo, que provoca la inestabilidad del equilibrio de la microviga, considerando diferentes condiciones de vínculo. Las propiedades comunes a todos los modelos resueltos son: la relación de esbeltez  $L/h = 20$  y  $L/h = 100$ , el módulo elástico  $E = 1,44 \text{ GPa}$ , el coeficiente de Poisson  $\nu = 0,38$  y el coeficiente de corrección por corte  $\kappa = 10(1 + \nu)/(12 + 11\nu)$ , que corresponde a la sección rectangular.

La Tabla 2 contiene los valores del coeficiente  $\lambda_{cr} = P_{cr} L^2 / E I_z$  que inestabiliza una microviga articulada en ambos extremos. Puede observarse el rápido incremento de la carga crítica, conforme las dimensiones de la microviga se acercan al valor de las constantes de longitud de escala del material.

elementos	CT	MCST	MSGT
5	18,213	60,220	152,61
10	18,212	60,184	152,15
<b>20</b>	<b>18,212</b>	<b>60,287</b>	<b>152,66</b>
30	18,212	60,133	152,48
50	18,212	60,044	152,22
Zhang et al. (2014)	18,217	60,240	152,98

Tabla 1: Análisis de convergencia del coeficiente  $\lambda_{cr} = P_{cr}L^2/EI_z$ , en una microviga Timoshenko Art-Art,  $L/h = 20$ ,  $\nu = 0,38$  y  $\kappa$ : correspondiente a sección rectangular.  $l_0 = l_1 = l_2 = l$  y  $h/l = 1$ .

	$L/h = 100$		$L/h = 20$	
h/l	MCST	MSGT	MCST	MSGT
1	61.332	162.06	60.287	152.66
2	29.186	56.296	28.769	53.840
3	23.230	35.287	22.909	34.438
5	20.180	24.523	19.903	24.101
8	19.135	20.832	18.873	20.518
12	18.763	19.517	18.506	19.238
20	18.572	18.844	18.318	18.581
CT	18.465	18.465	18.212	18.212

Tabla 2: Primer coeficiente de carga crítica  $\lambda_{cr} = P_{cr}L^2/EI_z$ , en una microviga Timoshenko Art-Art,  $L/h = 20$ ,  $\nu = 0,38$  y  $\kappa$ : correspondiente a sección rectangular.

Se observa en todos los casos planteados que al pasar de  $h/l = 2$  a  $h/l = 1$ , se duplica el autovalor de carga crítica en la MCST y casi se triplica en la MSGT.

	$L/h = 100$		$L/h = 20$	
h/l	MCST	MSGT	MCST	MSGT
1	124.43	344.36	112.46	277.88
2	59.599	114.93	57.075	106.11
3	47.475	72.098	45.868	68.429
5	41.253	50.122	39.987	48.252
8	39.118	42.583	37.942	41.189
12	38.357	39.897	37.210	38.656
20	37.967	38.522	36.833	37.354
CT	37.748	37.748	36.621	36.621

Tabla 3: Primer coeficiente de carga crítica  $\lambda_{cr} = P_{cr}L^2/EI_z$ , en una microviga Timoshenko Emp-Art,  $L/h = 20$ ,  $\nu = 0,38$  y  $\kappa$ : correspondiente a sección rectangular.

La Tabla 3 contiene los valores del coeficiente  $\lambda_{cr} = P_{cr}L^2/EI_z$  que inestabiliza una mi-

croviga empotrada en un extremo y articulada en el otro.

La Tabla 4 contiene los valores del coeficiente  $\lambda_{cr} = P_{cr}L^2/EI_z$  que inestabiliza una microviga empotrada en un extremo y libre en el otro.

h/l	L/h = 100		L/h = 20	
	MCST	MSGT	MCST	MSGT
1	15.231	42.474	14.301	41.320
2	7.2922	14.090	7.1902	13.958
3	5.8085	8.8284	5.7693	8.7751
5	5.0471	6.1340	5.0264	6.1072
8	4.7858	5.2104	4.7687	5.1905
12	4.6927	4.8814	4.6763	4.8637
20	4.6451	4.7130	4.6289	4.6964
CT	4.6183	4.6183	4.6022	4.6022

Tabla 4: Primer coeficiente de carga crítica  $\lambda_{cr} = P_{cr}L^2/EI_z$ , en una microviga Timoshenko Emp-Lib,  $L/h = 20$ ,  $\nu = 0,38$  y  $\kappa$ : correspondiente a sección rectangular.

Finalmente, la Tabla 5 contiene los valores del coeficiente  $\lambda_{cr} = P_{cr}L^2/EI_z$  que inestabiliza una microviga empotrada en ambos extremos.

h/l	L/h = 100		L/h = 20	
	MCST	MSGT	MCST	MSGT
1	241.23	667.90	199.20	474.37
2	116.30	224.11	107.62	195.51
3	92.711	140.72	87.232	128.50
5	80.576	97.877	76.260	91.540
8	76.407	83.167	72.393	78.416
12	74.921	77.926	70.998	73.683
20	74.160	75.242	70.280	71.248
CT	73.732	73.732	69.874	69.874

Tabla 5: Primer coeficiente de carga crítica  $\lambda_{cr} = P_{cr}L^2/EI_z$ , en una microviga Timoshenko Emp-Emp,  $L/h = 20$ ,  $\nu = 0,38$  y  $\kappa$ : correspondiente a sección rectangular.

Se observa como era esperable, que, en todos los casos planteados, los valores correspondientes a la MCST se encuentran ubicados entre los correspondientes a la MSGT y a la teoría clásica (CT).

## 5. CONCLUSIONES

Del análisis realizado, puede concluirse que la rigidez de la microviga aumenta fuertemente, especialmente cuando la relación  $h/l$  toma valores pequeños. En consecuencia los autovalores de carga crítica, aumentan considerablemente al tener en cuenta las propiedades de las constantes de longitud de escala del material, tanto en la teoría del gradiente de deformación como en la teoría de tensión de cupla, inclusive en el caso de microvigas poco esbeltas, en las que se ha tenido en cuenta la deformación por corte. De dichos resultados se concluye de manera general que la aplicación de una teoría de segundo orden, como la presente se hace necesaria cuando

las dimensiones del elemento estructural están en el orden de los valores de las constantes de longitud de escala del material, si se desean tener resultados con una precisión aceptable.

En cuanto al elemento utilizado, muestra ser apropiado para obtener una solución numérica de elevada precisión, al permitir la continuidad de los desplazamientos  $w$  y  $\varphi$ , tanto en  $C_0$  como en  $C_1$ , como lo exige la forma débil de las ecuaciones gobernantes. Además, la rápida convergencia de los resultados, permite realizar los cálculos con un muy reducido número de elementos, requiriéndose, en consecuencia, un muy bajo esfuerzo computacional.

### Agradecimientos

El trabajo se desarrolló en el Departamento de Ingeniería de la Universidad Nacional del Sur (UNS) y bajo el auspicio de la Secretaría General de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional del Sur (UNS), del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) y de la Comisión de Investigaciones Científicas-CIC de la Prov. de Buenos Aires.

### REFERENCIAS

- Akgöz B. y Civalek . Strain gradient elasticity and modified couple stress models for buckling analysis of axially loaded micro-scaled beams. *International Journal of Engineering Science*, 49:1268–1280, 2011.
- Asghari M., Ahmadian M., Kahrobaiyan M., y Rahaeifard M. On the size dependent behavior of functionally graded micro-beams. *Material & Design*, 31:2324–2329, 2010.
- Cosserat E. y Cosserat F. *Theorie des Corps Deformables*. A. Hermann et Fils, Paris (1909), reeditado por Gabay, Paris, 2009.
- Eringen A. Linear theory of micropolar elasticity. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 15:909–923, 1966.
- Eringen A. y Suhubi E. Nonlinear theory of simple micro-elastic solids. *Journal of Engineering Science*, 2:189–203, 1964.
- Felix D., Guerrero G., y Bambill D. Análisis dinámico de microvigas timoshenko mediante la teoría elástica del primer gradiente de deformación y el método de elementos finitos. *Mecánica Computacional*, 34:3553–3569, 2016.
- Guerrero G., Bambill D., y Felix D. Free vibration of timoshenko micro beams using the modified couple stress theory. *Pan-American Congress on Computational Mechanics (PANACM)*, 2015.
- Kong S., Zhou S. and Nie Z., y Wang K. Static and dynamic analysis of micro beams based on strain gradient elasticity theory. *International Journal of Engineering Science*, 47:487–498, 2009.
- Lam D., Yang F., Chong A., J. W., y P. T. Experiments and theory in strain gradient elasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 51:1477–1508, 2003.
- Mindlin R. *Micro-structure in Linear Elasticity*. Technical Report of Columbia University, 1964.
- Mindlin R. y Eshel N. On first strain-gradient theories in linear elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 4:109–124, 1968.
- Yang F., Chong A., Lang D., y P. T. Couple stress based strain gradient theory for elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 39:2731–2743, 2002.
- Zhang B., Yuming H., Dabiao L., Zhipeng G., y Shen L. Non-classical timoshenko beam element based on the strain gradient elasticity theory. *Finite Elements in Analysis and Design*, 79:22–39, 2014.