

## VIBRACION DE PLACAS ELÍPTICAS LAMINADAS CON RESTRICCIONES ELÁSTICAS EN EL CONTORNO

Liz G. Nallim\*, Ricardo O. Grossi\*

\*CONICET, Argentina. Instituto de Ingeniería Civil y Medio Ambiente de Salta, Univ. Nacional de Salta, Avda. Bolivia 5150 Salta. Tel/Fax: 0387-4255351 ([lnallim@unsa.edu.ar](mailto:lnallim@unsa.edu.ar), [grossiro@unsa.edu.ar](mailto:grossiro@unsa.edu.ar))

**Palabras clave:** Soluciones débiles, métodos variacionales, vibraciones, compuestos, restricciones elásticas.

**Resumen.** *Las estructuras constituidas por materiales laminados están entre las más importantes utilizadas en la ingeniería moderna. La aplicación de las mismas se ha extendido desde la industria aeroespacial a la ingeniería civil, mecánica y de transportación. El rápido aumento del uso industrial de estas estructuras ha traído aparejada la necesidad de desarrollar técnicas analíticas y numéricas que sean apropiadas para el análisis del comportamiento mecánico de las mismas. En particular, las placas elípticas son elementos estructurales muy utilizados, tanto como elementos simples o formando parte de estructuras más complejas.*

*En este trabajo se estudia la existencia y unicidad de la denominada solución débil y se propone una solución variacional para determinar la respuesta dinámica de placas laminadas elípticas con distintas condiciones de contorno. Se tratan esquemas de laminación simétricos respecto del plano medio, en los cuales los efectos membranales están desacoplados de los flexionales, pero existe acoplamiento flexo-torsional. La metodología utilizada se basa en la teoría de Kirchhoff para pequeñas deformaciones y en la aplicación del método de Ritz con productos de polinomios simples como funciones admisibles. El algoritmo desarrollado permite obtener soluciones analíticas aproximadas para placas con restricciones elásticas tanto traslacionales como rotacionales, laminados con distintas secuencias de apilamiento y factores de forma. Las condiciones de contorno clásicas, es decir, borde libre, simplemente apoyado o empotrado, pueden generarse como simples casos particulares, tomando la potencia del polinomio base como 0, 1 y 2. Por otra parte, el algoritmo general permite determinar las frecuencias naturales de vibración y las formas modales correspondientes, para placas con ortotropía rectangular e isotrópicas.*

*La solución obtenida es bastante general, permite visualizar la influencia de los distintos parámetros involucrados y obtener soluciones rápidas, sin necesidad de discretizar el dominio, lo cual puede ser útil en problemas de diseño.*

## 1 INTRODUCCIÓN

Las placas anisótropas, en particular las constituidas de material compuesto reforzado con fibras, son extensamente utilizados en diversas industrias, como la aeroespacial, automotriz, etc. La determinación de las características de vibración de las mismas, es de suma importancia para conocer la respuesta de estas placas en condiciones operacionales. Además, es importante incluir en el estudio restricciones parciales elásticas en los bordes para completar el estudio e incluir a un grupo importante de problemas estructurales prácticos. Esto es debido a que las condiciones de contorno clásicas no pueden aplicarse a todas las situaciones y el modelado de restricciones elásticas puede acercarse mejor a las verdaderas condiciones de sujeción. En particular, la flexibilidad de los bordes tiene una significativa influencia en las vibraciones de las placas.

La mayoría de los trabajos publicados en los cuales se estudian las vibraciones de placas anisótropas con vínculos elásticos, se refieren a placas de forma rectangular<sup>1-6</sup>. El número de trabajos referidos al análisis dinámico de placas anisótropas con forma geométrica distinta de la rectangular y con vínculos elásticos, es substancialmente menor. En lo que respecta a la obtención de soluciones analíticas, a través de métodos variacionales clásicos, cabe destacar que se debe superar la dificultad que presenta la determinación de las funciones de aproximación. Esto se complica notablemente cuando la forma geométrica de la placa es distinta de la rectangular. En este sentido se han planteado tratamientos alternativos para analizar placas cuadriláteras laminadas a través de un mapeo de espacios<sup>7</sup> y también el uso de coordenadas triangulares para el estudio de las vibraciones libres de placas triangulares de material compuesto reforzados con fibras unidireccionales y vínculos elásticos<sup>8</sup>.

En lo que se refiere al análisis de las vibraciones de placas de forma elíptica, Leissa<sup>9,10</sup> ha realizado un interesante compendio de los distintos desarrollos llevados a cabo. Se puede apreciar que la mayoría de los artículos tratan a placas isótropas y a placas con ortotropía polar. Trabajos más recientes<sup>11-13</sup> incluyen material con ortotropía rectangular, con ejes principales de elasticidad paralelos a los ejes de la placa. Sin embargo, en estos trabajos no se analiza la presencia de vínculos elásticos, ni tampoco se consideran materiales compuestos laminados.

En este trabajo se presenta el uso del análisis funcional para la demostración de existencia y unicidad de la solución débil. Además, se aplica el método variacional de Ritz para el desarrollo de un algoritmo general que permite estudiar el comportamiento mecánico de placas elípticas, constituidas de material compuesto laminado y con vínculos elásticos, tanto traslacionales como rotacionales en el contorno.

Para demostrar la validez y eficiencia del algoritmo desarrollado, se presentan varios ejemplos numéricos, estudios de convergencia y algunos casos particulares se comparan con resultados presentados por otros autores.

## 2 CARACTERÍSTICAS GEOMÉTRICAS Y MECÁNICAS DE LA PLACA ESTUDIADA

La Figura 1a muestra el esquema general de la placa elíptica, delgada, de material compuesto que se analiza. El laminado es de espesor uniforme  $h$  y, en general, consituido por láminas de material compuesto reforzado con fibras unidireccionales, con esquema de laminación simétrico respecto del plano medio, tal como se muestra en la Figura 1b. La orientación de la fibra está indicada mediante el ángulo  $\beta$  medido desde el eje  $x_1$  hacia la dirección de la fibra. La restricción rotacional está caracterizada mediante un resorte de constante  $c_R(s)$ , y la restricción traslacional mediante un resorte de constante  $c_T(s)$ , donde  $s$  es la longitud de arco a lo largo del contorno  $\partial G$  de la placa elíptica.

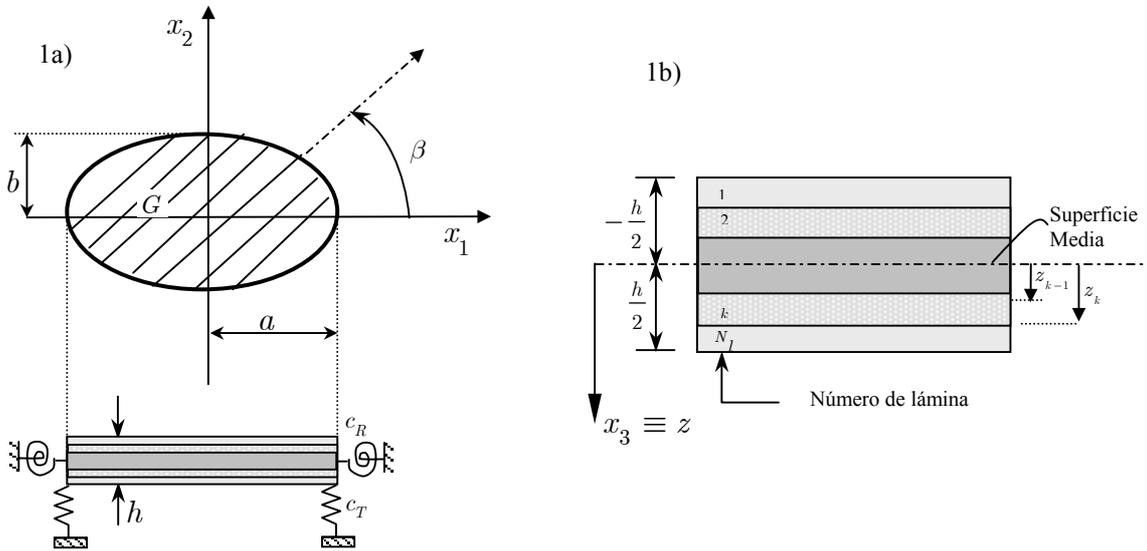


Figura 1: Sistema mecánico en estudio a) placa elíptica con vínculos elásticos; b) perfil y secuencia de apilamiento del laminado

El presente estudio se basa en la teoría clásica de placas laminadas<sup>14-15</sup>, CLPT según sus siglas en inglés. Según esta teoría se suponen válidas las hipótesis de Kirchhoff, de manera que el campo de desplazamientos en las direcciones  $x_1, x_2, x_3$ , denotado respectivamente por  $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$  se expresa de la siguiente manera

$$\bar{u}(x_1, x_2, x_3, t) = -x_3 \frac{\partial w(x_1, x_2, t)}{\partial x_1}, \bar{v}(x_1, x_2, x_3, t) = -x_3 \frac{\partial w(x_1, x_2, t)}{\partial x_2}, \quad (1)$$

$$\bar{w}(x_1, x_2, x_3, t) = w(x_1, x_2, t),$$

donde  $w(x_1, x_2, t)$  es la deflexión del plano medio.

### 3 DETERMINACIÓN DE SOLUCIONES DÉBILES

En esta sección se trata la determinación de condiciones suficientes para la existencia y unicidad de las soluciones débiles de los problemas contorno y/o autovalores que describen respectivamente, el comportamiento estático y dinámico de placas anisótropas, con contornos elásticamente restringidos, de forma geométrica arbitraria, correspondiendo la placa elíptica a un caso particular.

Sea  $G$  un dominio en  $\mathbb{R}^2$  con contorno  $\partial G$  suave y sea el operador

$$\begin{aligned} Au &= \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq 2} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \left( a_{\alpha\beta}(x) D^\beta u(x) \right) = \\ &= \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq 2} (-1)^{|\alpha|} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}} \left( a_{\alpha\beta}(x) \frac{\partial^{|\beta|} u(x)}{\partial x_1^{\beta_1} \partial x_2^{\beta_2}} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

donde  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ ,  $\beta = (\beta_1, \beta_2)$  son multiíndices con longitudes  $|\alpha|, |\beta|$  dadas por  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2, |\beta| = \beta_1 + \beta_2$  y  $x = (x_1, x_2)$ . Sea  $a_{\alpha\beta}(x) \in C^{(|\alpha|)}(G)$ ,  $u(x) \in C^{(4)}(G)$ . La suma en (2) se realiza sobre todos los multiíndices  $\alpha$  y  $\beta$  tales que es  $|\alpha|, |\beta| \leq 2$ .

Las ecuaciones que gobiernan el comportamiento estático y dinámico de una placa anisótropa de forma arbitraria con efectos geométricos y mecánicos complejos son generadas por el operador  $A$ , como casos particulares. El comportamiento estático de una placa anisótropa sometida a una carga  $q = q(x_1, x_2)$  está gobernado por la ecuación

$$A(w(x_1, x_2)) = q(x_1, x_2) \quad (3)$$

donde es

$$\begin{aligned} Aw &= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left( D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left( D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + \\ &+ \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left( 2D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + 4D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right), \end{aligned} \quad (4)$$

Las rigideces flexionales, torsionales y de acoplamiento  $D_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, 6$  que aparecen en la expresión (4), para una placa laminada están dados por<sup>15</sup>:

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{N_l} \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_k^3 - z_{k-1}^3), \quad (5)$$

donde  $z_{k-1}$ ,  $z_k$  son las distancias desde el plano medio a la parte superior e inferior de la  $k$ -ésima lámina,  $N_l$  es el número total de láminas que compone el laminado y  $\bar{Q}_{ij}^{(k)}$  son las rigideces reducidas transformadas para un estado de tensiones plano. Las mismas son función del módulo elástico paralelo a la dirección de las fibras  $E_L$ , del módulo elástico en la dirección transversal a las fibras  $E_T$ , del módulo de corte  $G_{LT}$ , del módulo de Poisson  $\nu_{LT}$  y del ángulo  $\beta$  de las fibras en la lámina  $k$ .

Por otra parte, las vibraciones libres de una placa elástica delgada son descritas por la ecuación diferencial

$$A(u(x_1, x_2, t)) = -\rho h \frac{\partial^2 u(x_1, x_2, t)}{\partial t^2}, \quad (6)$$

donde  $\rho$  denota la densidad del material de la placa.

En el caso de modos normales de vibración se puede adoptar  $u(x_1, x_2, t) = w(x_1, x_2) \cos \omega t$ , y en consecuencia (6) se reduce a

$$A(w(x_1, x_2)) - \rho h \omega^2 w(x_1, x_2) = 0 \quad (7)$$

Las condiciones de contorno que corresponden a una placa anisótropa de forma arbitraria con contorno regular y bordes elásticamente restringidos contra rotación y traslación están dadas por

$$c_R(s) \frac{\partial w}{\partial n} = (M_1 n_1^2(s) + M_2 n_2^2(s) + 2H_{12} n_1(s) n_2(s)), \quad (8)$$

$$c_T(s) w = - \left( \frac{\partial M_1(w)}{\partial x_1} + \frac{\partial H_{12}(w)}{\partial x_2} \right) n_1(s) - \left( \frac{\partial M_2(w)}{\partial x_2} + \frac{\partial H_{12}(w)}{\partial x_1} \right) n_2(s) - \frac{\partial}{\partial s} ((M_2 - M_1) n_1(s) n_2(s) + H_{12} (n_1^2(s) - n_2^2(s))), \quad (9)$$

donde

$$w = w(\alpha_1(s), \alpha_2(s), t), M_i = M_i(\alpha_1(s), \alpha_2(s), t), i = 1, 2, H_{12} = H_{12}(\alpha_1(s), \alpha_2(s), t),$$

$$\begin{aligned} M_1(w) &= - \left( D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right), \\ M_2(w) &= - \left( D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right), \\ H_{12}(w) &= - \left( D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + 2D_{66} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right). \end{aligned}$$

Dado que las condiciones de contorno que poseen derivadas de orden mayor a  $m - 1$  se denominan inestables para una ecuación diferencial de orden  $2m$ , las condiciones (8) y (9) son inestables si es  $0 \leq c_R, c_T < \infty$ . Si se hace  $c_R, c_T \rightarrow \infty$ , entonces resultan condiciones estables o geométricas.

Las condiciones de contorno naturales y las geométricas son de naturaleza diferente por ello y a efectos de distinguirlas claramente es adecuado el uso del espacio  $V$  cuyos elementos pertenecen al espacio de Sobolev  $H^2(G)$  y que además satisfacen las correspondientes condiciones de contorno estables homogéneas<sup>16</sup>.

Una solución débil de la ecuación  $Au = f$  de cuarto orden es una función del espacio  $H^2(G)$ , y en consecuencia el espacio  $V$  está dado por:

$$V = \left\{ v, v \in H^2(G), v \Big|_{\partial G} = \frac{\partial v}{\partial n} \Big|_{\partial G} = 0, \text{ en el sentido de las trazas} \right\}, \quad (10)$$

cuando  $c_R = c_T = \infty$ . Por otra parte, cuando estos coeficientes toman valores finitos desaparecen todas las condiciones de contorno estables y puede adoptarse como espacio  $V$  al dado por  $V = \{v, v \in H^2(G)\}$ .

Ahora el problema (3) con (8) - (9) se puede transformar en otro que conduce al concepto de *solución débil*. Para el caso estático se elimina la variable  $t$  de las condiciones (8) - (9) y se asume que  $q(x) \in C(\bar{G})$  y  $w \in C^{(4)}(\bar{G})$  es la solución clásica del problema (3) y (8) - (9). Si se adopta una función arbitraria  $v \in V$ , y se multiplica la ecuación (3) por esta función y luego se integra sobre el dominio  $G$  resulta

$$\iint_G A(w(x_1, x_2))v(x_1, x_2)dx = \iint_G q(x_1, x_2) v(x_1, x_2)dx, \quad \text{con } dx = dx_1 dx_2. \quad (11)$$

A efectos de transformar adecuadamente ciertos términos se aplica la fórmula de Green

$$\iint_G u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_{\partial G} u v n_i ds - \iint_G v \frac{\partial u}{\partial x_i} dx, \quad u, v \in H^1(G),$$

donde  $n_i$  denota la componente de la normal exterior al contorno de  $G$ . La aplicación de esta fórmula al miembro de la izquierda de la ecuación (11) conduce a

$$\begin{aligned} B(w, v) = & - \iint_G \left[ M_1(w) \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + M_2(w) \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + 2H_{12}(w) \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} \right] dx + \\ & + \int_{\partial G} (M_1(w)n_1 + H_{12}(w)n_2) \frac{\partial v}{\partial x_1} ds + \int_{\partial G} (M_2(w)n_2 + H_{12}(w)n_1) \frac{\partial v}{\partial x_2} ds - , \\ & - \int_{\partial G} \left( \frac{\partial M_1(w)}{\partial x_1} + \frac{\partial H_{12}(w)}{\partial x_2} \right) v n_1 ds - \int_{\partial G} \left( \frac{\partial M_2(w)}{\partial x_2} + \frac{\partial H_{12}(w)}{\partial x_1} \right) v n_2 ds \end{aligned} \quad (12)$$

Ahora es conveniente introducir a la longitud de arco  $s$  como variable a lo largo del contorno  $\partial G$  y la distancia  $n$  medida desde el contorno y a lo largo de la normal exterior a  $\partial G$ <sup>17</sup>. Sea  $\partial G$  un arco de curva representado paramétricamente por la función  $C^1$  dada por:  $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ;  $\alpha = (\alpha_1(s), \alpha_2(s))$ ,  $s \in [0, l]$  con  $l = l(\alpha) = l(\partial G)$ . Si  $\varphi = \varphi(s)$  denota el ángulo que forma la recta tangente a  $\partial G$  con el semieje positivo  $x_1$  se obtienen las siguientes transformaciones:

$$\begin{aligned} x_1(n, s) &= \alpha_1(s) + n \operatorname{sen} \varphi(s), \\ x_2(n, s) &= \alpha_2(s) - n \operatorname{cos} \varphi(s), \end{aligned}$$

y las relaciones

$$\left. \frac{\partial v(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right|_{\partial G} = \frac{\partial v(\alpha_1(s), \alpha_2(s))}{\partial n} n_1 - \frac{\partial v(\alpha_1(s), \alpha_2(s))}{\partial s} n_2 \quad (13)$$

$$\left. \frac{\partial v(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right|_{\partial G} = \frac{\partial v(\alpha_1(s), \alpha_2(s))}{\partial n} n_2 + \frac{\partial v(\alpha_1(s), \alpha_2(s))}{\partial s} n_1 \quad (14)$$

Si se reemplaza (13) y (14) en (12) se obtiene

$$\begin{aligned} B(w, v) &= - \iint_G \left( M_1(w) \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + M_2(w) \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + 2H_{12}(w) \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} \right) dx + \\ &+ \int_{\partial G} (M_1 n_1^2 + M_2 n_2^2 + 2H_{12} n_1 n_2) \frac{\partial v}{\partial n} ds + \\ &+ \int_{\partial G} ((M_2 - M_1) n_1 n_2 + H_{12} (n_1^2 - n_2^2)) \frac{\partial v}{\partial s} ds + \\ &+ \int_{\partial G} \left( - \left( \frac{\partial M_1}{\partial x_1} + \frac{\partial H_{12}}{\partial x_2} \right) n_1 - \left( \frac{\partial M_2}{\partial x_2} + \frac{\partial H_{12}}{\partial x_1} \right) n_2 \right) v ds. \end{aligned} \quad (15)$$

Dado que para una función  $P(x_1, x_2, t)$  se verifica

$$\int_{\partial G} P(x_1, x_2, t) \frac{\partial v(\alpha_1(s), \alpha_2(s))}{\partial s} ds = - \int_{\partial G} \frac{\partial P(x_1, x_2)}{\partial s} v(\alpha_1(s), \alpha_2(s)) ds,$$

al reemplazar en (15) resulta

$$\begin{aligned} B(w, v) &= - \iint_G \left( M_1(w) \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + M_2(w) \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + 2H_{12}(w) \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} \right) dx + \\ &+ \int_{\partial G} (M_1 n_1^2 + M_2 n_2^2 + 2H_{12} n_1 n_2) \frac{\partial v}{\partial n} ds + \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{\partial G} \left( - \left( \frac{\partial M_1}{\partial x_1} + \frac{\partial H_{12}}{\partial x_2} \right) n_1 - \left( \frac{\partial M_2}{\partial x_2} + \frac{\partial H_{12}}{\partial x_1} \right) n_2 \right) v ds - \\
 & - \int_{\partial G} \frac{\partial}{\partial s} \left( (M_2 - M_1) n_1(s) n_2(s) + H_{12} (n_1^2(s) - n_2^2(s)) \right) v ds
 \end{aligned}$$

De (8) y (9) se obtiene

$$\begin{aligned}
 B(w, v) = & - \iint_G \left( M_1(w) \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + M_2(w) \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + 2H_{12}(w) \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} \right) dx + \\
 & + \int_{\partial G} c_R(s) \frac{\partial w}{\partial n} \frac{\partial v}{\partial n} ds + \int_{\partial G} c_T(s) w v ds
 \end{aligned} \tag{17}$$

La integral doble en (17) constituye la forma bilineal  $A(w, v)$  asociada al operador diferencial  $A$  definido en (5) y las integrales curvilíneas constituyen al denominada forma bilineal de contorno  $a(v, w)$ . La igualdad (11) se transforma en

$$B(w, v) = \iint_G q v dx = (q, v)_{L^2(G)}.$$

Ahora es posible considerar hipótesis mucho menos exigentes. Así sea  $q(x) \in L^2(G)$  y  $w \in H^2(G)$ , donde  $H^2(G)$  es el espacio de Sobolev compuesto por las funciones de  $L^2(G)$  que admiten derivadas débiles hasta las de segundo orden. Si la forma bilineal  $B(w, v)$  es continua, una función  $w \in H^2(G)$  se denomina solución débil del problema de contorno (3),(8),(9), si se verifica

$$\begin{cases} w \in V, \\ B(v, w) = (v, q)_{L^2(G)}, \forall v \in V. \end{cases} \tag{18}$$

Para demostrar que la forma bilineal  $B(w, v)$  es continua se considerará que los términos que componen a  $A(w, v)$  son de la forma  $D_{kl} \iint_G D^\alpha w D^\beta v dx$ . Luego en virtud de la desigualdad de Schwarz resulta que existe una constante  $C_1 > 0$ , tal que es

$$|A(w, v)| \leq C_1 \|v\|_{H^2(G)} \|w\|_{H^2(G)}, \quad \forall v, w \in H^2(G). \tag{19}$$

Por otra parte, dado que  $w, v \in H^2(G)$ , resulta que  $\frac{\partial w}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \in H^1(G)$ , y en consecuencia estas funciones poseen trazas que pertenecen a  $L^2(\partial G)$ . De acuerdo con el teorema de las trazas<sup>16</sup>, existe una constante  $C_2 > 0$  tal que

$$\left\| \frac{\partial v}{\partial n} \right\|_{L^2(\partial G)} \leq C_2 \left\| \frac{\partial v}{\partial n} \right\|_{H^1(G)} \leq C_2 \|v\|_{H^2(G)}, \forall v \in H^{(2)}(G),$$

Entonces si  $c_{R_0}$  denota al valor máximo de  $c_R(s)$ , resulta

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial G} c_R(s) \frac{\partial w}{\partial n} \frac{\partial v}{\partial n} ds \right| &\leq c_{R_0} \int_{\partial G} \left| \frac{\partial w}{\partial n} \right| \left| \frac{\partial v}{\partial n} \right| ds \leq c_{R_0} \sqrt{\int_{\partial G} \left| \frac{\partial v}{\partial n} \right|^2 ds} \sqrt{\int_{\partial G} \left| \frac{\partial w}{\partial n} \right|^2 ds} \leq \\ &\leq c_{R_0} C_2 \|v\|_{H^2(G)} \|w\|_{H^2(G)}. \end{aligned}$$

De igual forma, si  $c_{T_0}$  denota al valor máximo de  $c_T(s)$ , resulta

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial G} c_T(s) w v ds \right| &\leq c_{T_0} \int_{\partial G} |w| |v| ds \leq c_{T_0} \sqrt{\int_{\partial G} |v|^2 ds} \sqrt{\int_{\partial G} |w|^2 ds} \leq \\ &\leq c_{T_0} C_2 \|v\|_{H^2(G)} \|w\|_{H^2(G)}. \end{aligned}$$

En consecuencia la forma bilenal de contorno

$$a(u, w) = \int_{\partial G} c_R(s) \frac{\partial w}{\partial n} \frac{\partial v}{\partial n} ds + \int_{\partial G} c_T(s) w v ds \text{ verifica la condición:}$$

$$|a(w, v)| \leq C_3 \|v\|_{H^2(G)} \|w\|_{H^2(G)}, \text{ con } C_3 > 0. \quad (20)$$

De (19) y (20) resulta que  $B(w, v)$  es continua en  $H^2(G) \times H^2(G)$ , es decir, que existe una constante  $C_4 > 0$  tal que es

$$|B(w, v)| \leq C_4 \|v\|_{H^2(G)} \|w\|_{H^2(G)}, \forall v, w \in H^2(G).$$

Si  $B(w, v)$  es  $V$ -elíptica, entonces el problema en consideración posee una única solución débil  $w^{16}$ . Para demostrar que la forma bilineal (17) posee esta propiedad se aplicará la desigualdad demostrada en referencia 17:

$$\begin{aligned} &\iint_G \left[ D_{11} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right)^2 + 2D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + 4D_{16} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + D_{22} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right)^2 + \right. \\ &+ 4D_{26} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + 4D_{66} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \left. \right] dx_1 dx_2 \geq \\ &\geq \frac{C_5 h^3}{12} \iint_G \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right)^2 + 2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right)^2 \right] dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

Si se aplica esta desigualdad en la expresión (17) resulta que existe una constante  $C_6 > 0$  tal que es

$$\begin{aligned} B(v, v) &= -\iint_G \left( M_1(v) \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + M_2(v) \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + 2H_{12}(v) \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} \right) dx + \\ &\quad + \int_{\partial G} c_R(s) \left( \frac{\partial v}{\partial n} \right)^2 ds + \int_{\partial G} c_T(s) v^2 ds \geq \\ &\geq C_6 \iint_G \left[ \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right] dx + \int_{\partial G} c_T(s) v^2 ds. \end{aligned}$$

Ahora es posible aplicar la desigualdad de Friedrichs<sup>16</sup>,

$$\|u\|_{H^2(G)}^2 \leq K \left( \sum_{|i|=2} \iint_G (D^i u)^2 dx + \int_{\partial G} u^2(s) ds \right), K > 0, \forall u \in H^2(G).$$

Así resulta

$$\begin{aligned} B(v, v) &\geq C_6 \iint_G \left[ \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right] dx + \int_{\partial G} c_T(s) v^2 ds \geq \\ &\geq C_7 \left( \iint_G \left[ \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 \right] dx + \int_{\partial G} v^2 ds \right) \geq \\ &\geq \frac{C_7}{K} \|v\|_{H^2(G)}^2, \forall v \in V, \end{aligned} \tag{21}$$

donde  $C_7 = \min \left\{ C_6, \min_{s \in \partial G} c_T(s) \right\}$ .

La desigualdad (21) implica que  $B(w, v)$  es  $V$  – elíptica.

En el caso del problema dinámico, la formulación débil consiste en obtener una función  $w$

$$\begin{cases} w \in V, w \neq 0, \\ B(v, w) - \Omega(v, w)_{L^2(G)} = 0, \quad \forall v \in V. \end{cases}$$

Es conocido que si la forma bilineal  $B(v, w)$  es simétrica, continua y  $V$  – elíptica, tiene un conjunto numerable de autovalores que están dados por<sup>16</sup>

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \min \left\{ \frac{B(v, v)}{(v, v)_{L^2(G)}} \mid v \in V, v \neq 0 \right\} \\ \Omega_n &= \min \left\{ \frac{B(v, v)}{(v, v)_{L^2(G)}} \mid v \in V, v \neq 0, (v, v_1)_{L^2(G)} = 0, \dots, (v, v_{n-1})_{L^2(G)} = 0 \right\}, n = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

## 4 APLICACIÓN DEL MÉTODO DE RITZ

### 4.1 Energía cinética y energía de deformación

Para determinar las energías que intervienen en el funcional que debe minimizarse en la aplicación del método de Ritz, se realiza el siguiente cambio de variables

$$x = x_1/a, y = x_2/b \quad (22)$$

De manera que el contorno de la placa puede expresarse como  $x^2 + y^2 = 1$ . La máxima energía de deformación y la máxima energía cinética de la placa debidas a vibración armónica simple con pequeñas deformaciones, pueden escribirse de la siguiente forma:

$$U_{\max} = \frac{1}{2} \iint_{G^*} \left[ D_{11} \frac{b}{a^3} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{2}{ab} D_{12} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + D_{22} \frac{a}{b^3} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 + \frac{4}{a^2} D_{16} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right) + \frac{4}{b^2} D_{26} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right) + \frac{4}{ab} D_{66} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy, \quad (23)$$

$$T_{\max} = \frac{1}{2} h \rho \omega^2 a b \iint_{G^*} W^2 dx dy, \quad (24)$$

donde  $\omega$  es la frecuencia natural,  $W$  es la amplitud de la deflexión normal al plano medio de la placa,  $a$  y  $b$  son las medidas de los semiejes de la elipse (Figura 1a) y  $G^*$  es el dominio de la placa en las coordenadas  $xy$  definidas con las expresiones (22).

La energía de deformación de los vínculos rotacionales y la energía de deformación de los vínculos traslacionales están dadas, en el sistema  $x_1 x_2$ , respectivamente por

$$U_R = \frac{1}{2} \oint_{\partial G} c_R(s) \left( \frac{\partial w}{\partial n} \right)^2 ds = \frac{1}{2} \oint_{\partial G} c_R(s) \left( \frac{\partial w}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial w}{\partial x_2} n_2 \right)^2 ds, \quad (25)$$

$$U_T = \frac{1}{2} \oint_{\partial G} c_T(s) w ds \quad (26)$$

En este trabajo se considera que los parámetros que definen las restricciones rotacionales y traslacionales son constantes a lo largo del contorno por lo que  $c_R(s) = c_R$  y  $c_T(s) = c_T$ . Considerando lo expresado anteriormente y el cambio de variables dado por (22), la máxima energía de deformación de los vínculos rotacionales y traslacionales (25) - (26) se convierten respectivamente en

$$\begin{aligned}
 U_{R,\max} = & \frac{1}{2} c_R \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{a^2} \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \left( \frac{\text{sen}^2 \varphi}{\text{sen}^2 \varphi + (a/b)^2 \cos^2 \varphi} \right) + \right. \\
 & + \frac{2}{ab} \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial y} \left( \frac{\text{sen} \varphi \cos \varphi}{(b/a) \text{sen}^2 \varphi + (a/b) \cos^2 \varphi} \right) + \\
 & \left. + \frac{1}{b^2} \left( \frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 \left( \frac{\cos^2 \varphi}{(b/a)^2 \text{sen}^2 \varphi + \cos^2 \varphi} \right) \right] \frac{\bar{L}}{2\pi} d\varphi,
 \end{aligned} \tag{27}$$

$$U_{T,\max} = \frac{1}{2} c_T \int_0^{2\pi} W^2 \frac{\bar{L}}{2\pi} d\varphi \tag{28}$$

donde  $\bar{L}$  es el perímetro del contorno de la placa elíptica y  $x = \text{sen} \varphi$ ,  $y = \cos \varphi$ .

El funcional de energía para el caso de vibraciones libres resulta

$$F = U_{\max} + U_{R,\max} + U_{T,\max} - T_{\max} \tag{29}$$

#### 4.2 Problema de Autovalores

Se propone como función aproximante a un conjunto de polinomios en dos variables  $(x, y)$ , de manera que la deflexión del plano medio se expresa mediante

$$W = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q c_{ij} x^{i-1} y^{j-1} (x^2 + y^2 - 1)^k, \tag{30}$$

donde  $c_{ij}$  son coeficientes indeterminados,  $k$  es una constante que depende de las condiciones de contorno,  $k = 1$  para borde simplemente apoyado,  $k = 2$  para borde empotrado y finalmente  $k = 0$  para borde libre ó con restricciones elásticas traslacionales y rotacionales.

La aplicación del método de Ritz requiere la minimización del funcional (29) respecto de cada coeficiente  $c_{ij}$  y esto conduce al planteo del siguiente sistema de ecuaciones,

$$\frac{\partial}{\partial c_{ij}} (F) = 0, \quad i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, q. \tag{31}$$

El determinante de este sistema debe verificar

$$|\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}| = 0, \tag{32}$$

donde las matrices cuadradas y simétricas **K** y **M** contienen los términos de las energías de deformación y cinética del sistema.

## 5 RESULTADOS NUMÉRICOS

En esta sección se presentan algunos resultados que pueden determinarse aplicando la formulación propuesta. Cabe destacar, que se puede considerar la influencia de la variación de distintos parámetros en la respuesta dinámica de las placas elípticas laminadas analizadas en este trabajo. A saber:

- secuencia de apilamiento (definida a través del número de capas y del ángulo de inclinación de la fibra de refuerzo),
- propiedades elásticas del material de cada lámina,
- relación de aspecto de la placa (definida por medio de  $a/b$ ) y
- coeficientes de restricción rotacional y traslacional.

Por esta razón se determinaron las frecuencias de vibración sólo para algunos casos representativos.

Tabla 1: Comparación de los parámetros de frecuencia fundamental  $(\rho h \omega^2 a^4 / H)^{1/2}$ , con  $H = D_{12} + 2D_{66}$

$\frac{a}{b}$	Nº de términos				Referencia [11]
	2x2	3x3	4x4	5x5	
(1) Vidrio / epoxi ( $D_{11}/H = 3.75, D_{22}/H = 0.80, \nu_{12} = 0.26$ )					
2.5	39.581	38.810	38.810	38.796	38.849
2	27.725	27.349	27.349	27.345	27.376
1.25	16.425	16.236	16.236	16.234	16.242
1	14.445	14.225	14.225	14.222	14.225
(2) Carbono / epoxi ( $D_{11}/H = 15.64, D_{22}/H = 0.91, \nu_{12} = 0.32$ )					
2.5	47.055	46.482	46.482	46.476	46.501
2	36.258	35.867	35.867	35.864	35.876
1.25	27.498	26.967	26.967	26.958	26.959
1	26.242	25.469	25.469	25.444	25.442
(3) Kevlar ( $D_{11}/H = 2.60, D_{22}/H = 2.60, \nu_{12} = 0.14$ )					
2.5	65.827	63.278	63.278	63.127	63.077
2	43.297	42.109	42.109	42.074	42.043
1.25	19.989	19.742	19.742	19.740	19.726
1	15.319	15.154	15.154	15.152	15.142

En la Tabla 1 se presenta una comparación de los parámetros de frecuencia fundamental entre los obtenidos en este trabajo y los proporcionados por Chakraverty y Petyt<sup>11</sup>. Estos autores usaron el método de Rayleigh – Ritz, con polinomios ortogonales característicos en dos dimensiones como funciones admisibles. Consideraron placas elípticas empotradas en el contorno, con ortotropía rectangular y materiales con diferentes propiedades. En este caso los

ejes principales de ortotropía son paralelos a los semiejes de la placa elíptica por lo que las rigideces que definen el acoplamiento flexo-torsional son nulas, es decir  $D_{16} = D_{26} = 0$ . Se puede observar que existe muy buena concordancia en todos los casos.

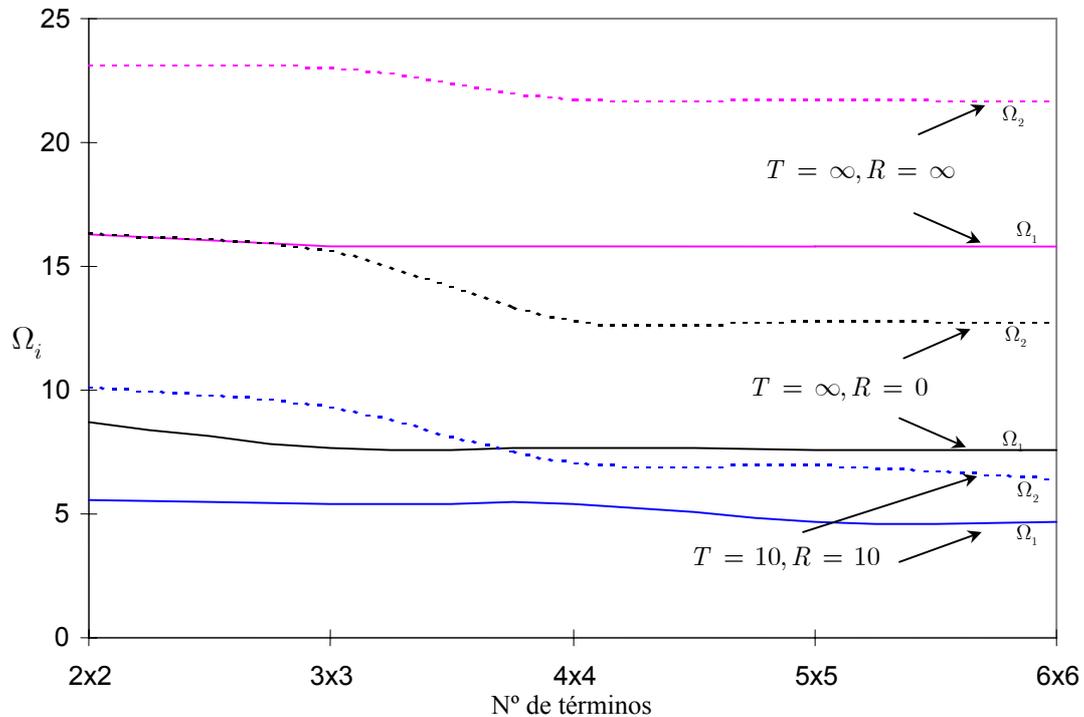


Figura 2: Variación de los dos primeros coeficientes de frecuencia  $\Omega_i = \omega_i a^2 \sqrt{\rho h / D_\beta}$  para placas elípticas laminadas  $(45^\circ, -45^\circ, -45^\circ, 45^\circ)$ , con  $a/b = 2$

Las placas analizadas en las Figuras 2 a 6 son laminados constituidos por láminas de grafito-epoxi con las siguientes propiedades elásticas:  $E_L / E_T = 40.0$ ,  $G_{LT} / E_T = 0.5$  y  $\nu_{LT} = 0.25$ , proporcionadas por Liew y Lim<sup>18</sup>.

A los efectos de mostrar la convergencia de los valores numéricos obtenidos con la aplicación del algoritmo desarrollado en el presente trabajo, en la Figura 2 se muestra la variación de los coeficientes de frecuencia adimensional  $\Omega_i = \omega_i a^2 \sqrt{\rho h / D_\beta}$ , con  $D_\beta = \bar{Q}_{11} h^3 / 12 = E_{LL} h^3 / [12(1 - \nu_{LT} \nu_{TL})]$ , correspondientes a los dos primeros modos de vibración, a medida que se incrementa el número de términos en la función de aproximación. Se analizaron placas elípticas laminadas, con relación de aspecto  $a/b = 2$ , y distintas condiciones de contorno: simplemente apoyadas, empotradas y con restricciones elásticas. La secuencia de apilamiento del laminado es  $(45^\circ, -45^\circ, -45^\circ, 45^\circ)$ . Teniendo en cuenta que los resultados obtenidos con la aplicación del método de Ritz son cotas superiores de los valores

exactos, se puede concluir que es posible obtener una buena aproximación tomando 4x4 términos en la función de aproximación para la frecuencia fundamental. En el caso de la segunda frecuencia es necesario tomar más términos. Además, se aprecia que la influencia de las condiciones de contorno en la convergencia de los coeficientes de frecuencia correspondientes a los modos superiores, es mayor.

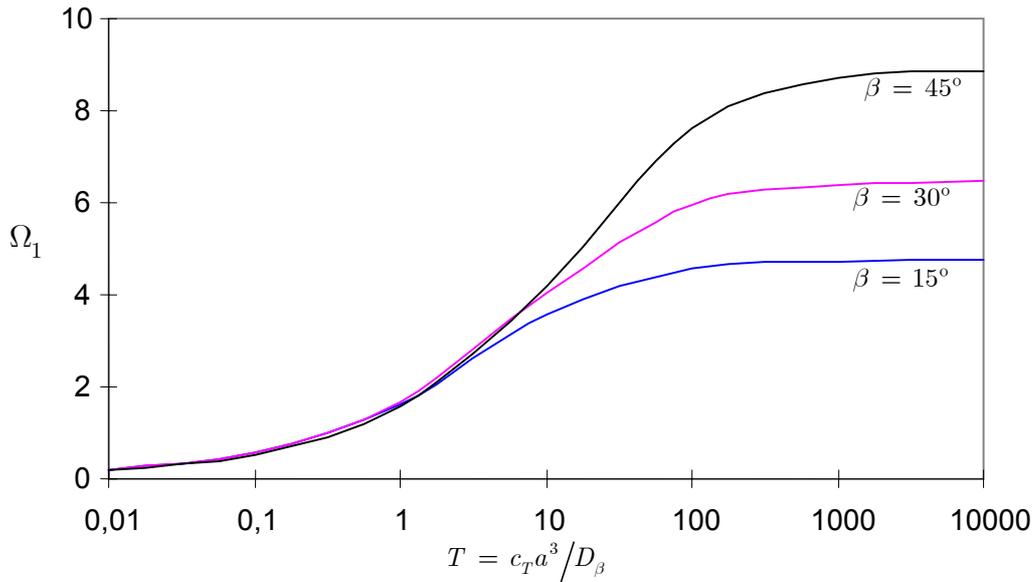


Figura 3: Variación del coeficiente de frecuencia fundamental  $\Omega_1 = \omega_1 a^2 \sqrt{\rho h / D_\beta}$  con el coeficiente de restricción traslacional.

En la Figura 3 se muestra la variación del coeficiente de frecuencia fundamental  $\Omega_1 = \omega_1 a^2 \sqrt{\rho h / D_\beta}$ , con el parámetro adimensional de restricción traslacional  $T = c_T a^3 / D_\beta$ , tomando  $c_R = 0$ . La Figura 4 muestra la variación del coeficiente de frecuencia fundamental, con el parámetro adimensional de restricción rotacional  $R = c_R a / D_\beta$ , tomando  $c_T = \infty$ . Los casos mostrados en Figuras 3 y 4 corresponden a placas equiangulares con secuencia de apilamiento  $(\beta, -\beta, -\beta, \beta)$  y relación de aspecto  $a/b = 2$ . Como es esperable, en ambas figuras se observa que al aumentar el coeficiente de restricción aumenta la frecuencia para todos los valores del ángulo  $\beta$ . En la Figura 5 se muestra la variación del coeficiente de frecuencia fundamental, con los parámetros de restricción rotacional y traslacional de placas elípticas laminadas con secuencia de apilamiento  $(45^\circ, -45^\circ, -45^\circ, 45^\circ)$ , para tres relaciones de aspecto  $(a/b = 1, 2, 3)$ .

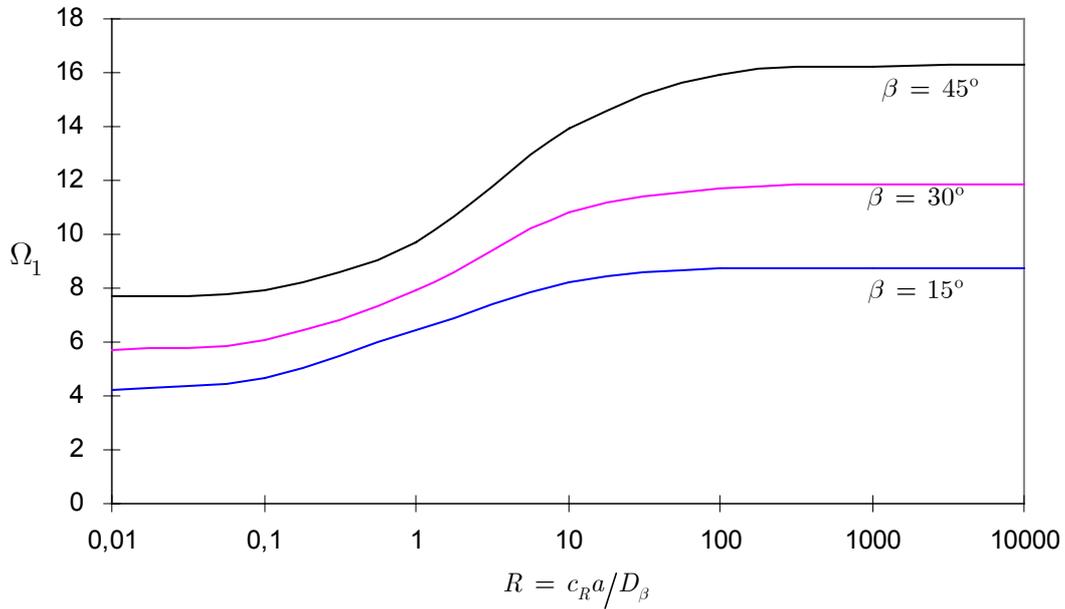


Figura 4: Variación del coeficiente de frecuencia fundamental  $\Omega_1 = \omega_1 a^2 \sqrt{\rho h / D_\beta}$  con el coeficiente de restricción rotacional

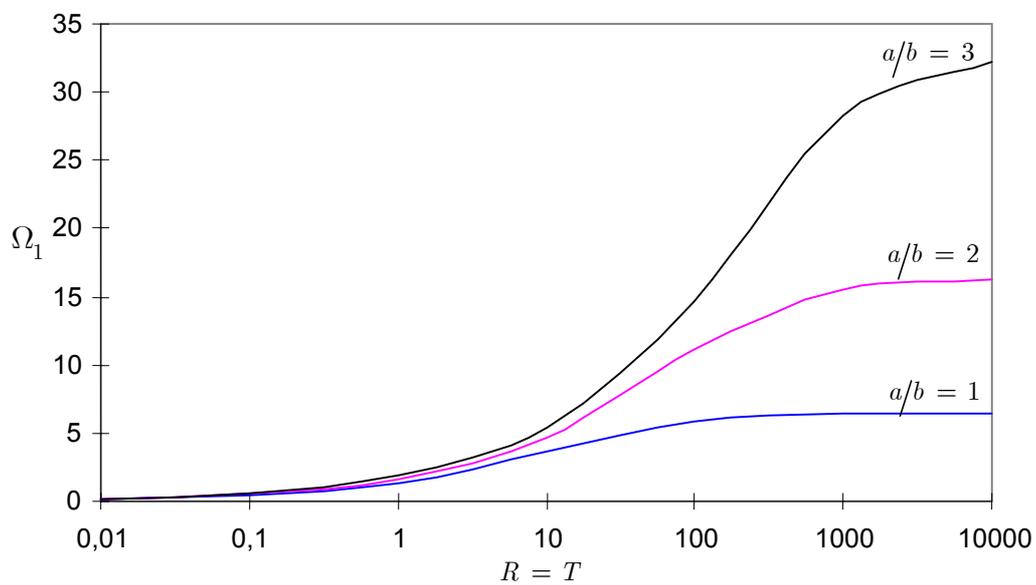


Figura 5: Variación del coeficiente de frecuencia fundamental  $\Omega_1 = \omega_1 a^2 \sqrt{\rho h / D_\beta}$  con los coeficientes de restricción rotacional y traslacional para una placa laminada

Finalmente, a modo ilustrativo en la Figura 6 se muestran las frecuencias y formas modales correspondientes a los ocho primeros modos de vibración de una placa elíptica laminada  $(45^\circ, -45^\circ, -45^\circ, 45^\circ)$ , con bordes elásticamente restringidos  $R = 50, T = 50$  y relación de aspecto  $a/b = 2$ .

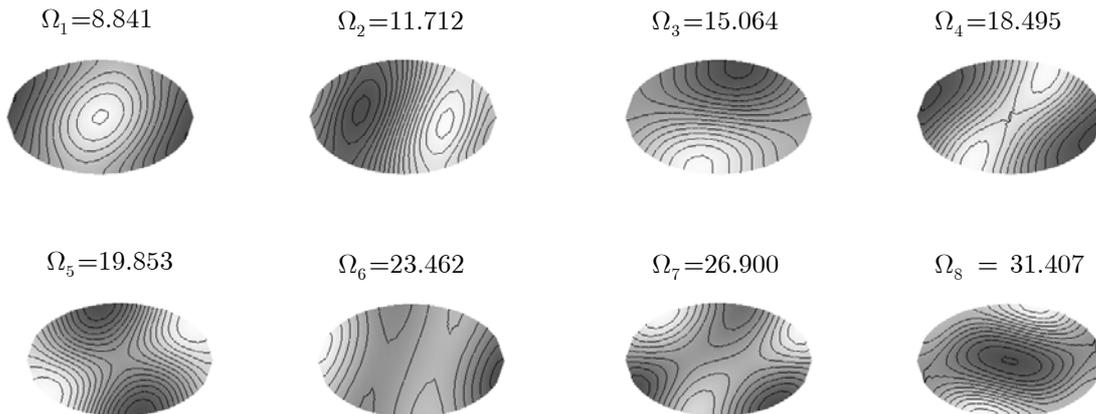


Figura 6: Coeficientes de frecuencia  $\Omega_1 = \omega_1 a^2 \sqrt{\rho h / D_\beta}$  y formas modales de una placa elíptica laminada  $(45, -45, -45, 45)$ , con  $a/b=2$ , coeficiente de restricción rotacional  $R = 50$  y coeficiente de restricción traslacional  $T = 50$

## 6 CONCLUSIONES

La formulación débil de un problema de contorno y/o de autovalores cobra importancia cuando la solución clásica no existe, y este es el caso de la mayoría de los problemas reales. Obtener la solución clásica consiste en hallar una función que verifique determinadas características de continuidad. Por otra parte, aunque la solución clásica exista, esta puede ser de muy difícil obtención. A todo esto se debe sumar que en la formulación débil, las demostraciones de existencia y unicidad se concretan de una forma mucho más sencilla y elegante. Finalmente, se tiene que recordar que las soluciones débiles constituyen la base de varios métodos numéricos de muy amplia difusión y aplicación en nuestros días, tal como es el caso del método de los elementos finitos. Por esta razón, en este trabajo se presenta la demostración de la existencia y unicidad de la solución débil del problema de contorno y del problema de autovalores que describen respectivamente el comportamiento estático y dinámico del sistema mecánico estudiado.

Para el tratamiento de las vibraciones transversales de placas elípticas laminadas con contorno elásticamente restringidos, se propone un algoritmo general basado en la aplicación del método de Ritz con el uso de productos de polinomios simples como funciones

admisibles. De esta manera, se deriva la ecuación de frecuencias que permite el análisis de placas con diversas características geométricas y mecánicas. El algoritmo es numéricamente estable, sumamente flexible, general y de fácil implementación en una computadora.

## 7 REFERENCIAS

- [1] R.O. GROSSI and P.A.A. LAURA, “Transverse vibrations of rectangular orthotropic plates with one or two free edges while the remaining are elastically restrained against rotation”, *Ocean Engineering*, 6, 527-539 (1979).
- [2] P.A.A. LAURA and R.O. GROSSI, “Transverse vibrations of rectangular anisotropic plates with edges elastically restrained against rotation”, *Journal of Sound and Vibration*, 64(2), 257-267, (1979).
- [3] R.O. GROSSI and L.G. NALLIM, “On the approximate determination of the fundamental frequency of vibration of rectangular anisotropic plates carrying a concentrated mass”, *Journal of Sound and Vibration*, 207(2), 276-279, (1997).
- [4] K.M. Liew, Y. Xiang, S. Kitipornchai, “Vibration of laminated plates having elastic edge flexibilities”. *J. Eng. Mech.*, 123(10), 1012-9, (1997).
- [5] L.G. Nallim y R.O. Grossi, “Análisis del comportamiento dinámico de placas ortótropas y anisótropas”, *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. 15, 1, 155-167, (1999).
- [6] D.R. Avalos, H.A. Larrondo and P.A.A. Laura, “Analysis of vibrating rectangular anisotropic plates with free – edge holes”, *Journal of Sound and Vibration*, 222(4), 691-695, (1999).
- [7] L.G. Nallim, S. Oller Martinez and R. O. Grossi. “Statical and dynamical behaviour of thin fibre reinforced composite laminates with different shapes”. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194, 1797-1822, (2005).
- [8] L.G. Nallim, B.M. Luccioni and R.O. Grossi, “Vibration Of General Triangular Composite Plates With Elastically Restrained Edges”, *Thin Walled Structures*, in press, (2005).
- [9] A.W. Leissa, NASA SP-160 Vibration of Plates. Washington: NASA, (1979).
- [10] A.W. Leissa, “Recent research in plate vibrations”, *The Shock and Vibration Digest*, 9, 13-24, (1977); 13, 11-22, (1981); 13, 19-36, (1981); 19, 11-18, (1987); 19, 10-24, (1987).
- [11] S. Chakraverty and M. Pteyt, “Free vibration analysis of elliptic and circular plates having rectangular orthotropy”, *International Journal of Structural Engineering and Mechanics*, 7, 53-67, (1999).
- [12] S. Chakraverty, R.B. Bhat and I. Stiharu, “Vibration of annular orthotropic plates using two dimensional orthogonal polynomials”, *Journal of Applied Mechanics and Engineerin*, 5, 843-866, (2000).
- [13] C. S. Kim, “Natural frequencies of orthotropic, elliptical and circular plates”, *Journal of Sound and Vibration*, 259(3), 733-745, (2003).
- [14] J.M. WHITNEY, *Structural Analysis of Laminated Anisotropic Plates*, Technomic Publishing Co. Inc. Pennsylvania, USA, (1987).

- [15] J.N. Reddy, *Mechanics of Laminated Anisotropic Plates: Theory and Analysis*. CRC Press, Boca Raton, Florida, (1997).
- [16] K. REKTORYS *1980 Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering*, D. Reidel Co.
- [17] R.O. GROSSI. "On the existence of weak solutions in the study of anisotropic plates", *Journal of Sound and Vibration*, 242(3), 542-552, (2001).
- [18] K.M. Liew and C.W.Lim. "Vibratory characteristics of general laminates, I: symmetric trapezoids", *Journal of Sound and Vibration*, 183(4), 615-642, (1995).