

MINIMIZACIÓN DE LA VISCOSIDAD NUMÉRICA EN ESQUEMAS DE VOLÚMENES FINITOS TRIDIMENSIONALES NO ESTRUCTURADOS

Oscar A. Falcinelli^{a,b}, Sergio A. Elaskar^{a,b} y José P. Tamagno^a

^a Departamento de Aeronáutica, FCEFN, Universidad Nacional de Córdoba. ^b CONICET
Av. Velez Sarfield 1601. Córdoba 5000, Argentina.
selaskar@efn.uncor.edu

Palabras Clave: “solver” de Riemann, ecuaciones de Euler, esquema TVD, flujo supersónico, volúmenes finitos.

Resumen. *Se presenta un esquema TVD (Total Variation Diminishing) incorporado a una formulación de volúmenes finitos centrada en celdas no estructuradas, para su aplicación a flujos de Euler tridimensionales. Con dicho esquema, para alcanzar una aproximación de segundo orden en las zonas de flujo con variaciones suaves y a la vez evitar oscilaciones en cercanías de las discontinuidades, se hace uso de distintas funciones limitadoras las cuales se aplican a cada onda en particular (onda a onda). Aquí se analiza la posibilidad de reducir la difusión numérica en las ondas de las familias dos a cuatro (ondas lineales) utilizando funciones compresivas, entendiéndose como tales a aquellas que dan una mayor ponderación a la aproximación de segundo orden del flujo numérico. Sin embargo, debido a la utilización de funciones más difusivas para las ondas de las familias uno y cinco (ondas no lineales), se comprueba que el esquema TVD no pierde robustez. Para verificar el desempeño del esquema numérico se modela un caso de una superficie de deslizamiento entre dos flujos de distintas velocidades e igual presión. Por otro lado y con la finalidad de verificar la robustez del método propuesto para capturar discontinuidades, se calcula el flujo alrededor de cuerpos romos axialmente simétricos considerando números de Mach entre cinco y quince. Los resultados muestran claramente que las modificaciones introducidas hacen que el esquema sea menos difusivo y no pierda robustez con respecto a otros esquemas TVD. Se puede afirmar que la técnica TVD propuesta conjuga las potencialidades de los esquemas que utilizan una sola clase de funciones limitadoras, consiguiéndose una adecuada definición tanto en los choques como en las discontinuidades de contacto y deslizamiento.*

1 INTRODUCCION

En la resolución numérica de las ecuaciones de la mecánica de fluidos con la técnica de volúmenes finitos surge la necesidad de discretizar las derivadas de los flujos convectivos. Las técnicas de discretización tradicionalmente utilizadas surgen de aproximar la ley de variación de las variables con funciones polinómicas de distintos grados. Estas aproximaciones dan excelentes resultados cuando las variables presentan modificaciones suaves pero tienen serias dificultades cuando la solución es discontinua. En estos casos, los esquemas que utilizan aproximaciones de orden dos o superior presentan inconvenientes en la convergencia que, de alcanzarse, resulta en soluciones con oscilaciones en las cercanías de las discontinuidades. Por su parte, los esquemas que utilizan aproximaciones de primer orden generan soluciones sin oscilaciones pero en general con discontinuidades muy pobremente resueltas (esquemas altamente difusivos).

Como solución a este problema, surgieron esquemas que implementan “funciones limitadoras” (Hirsch, 1992) para calcular localmente combinaciones lineales de las aproximaciones de primer y segundo orden según la suavidad de la variación de las variables en la zona. A estos se los conoce como esquemas TVD (Total Variation Diminishing) aunque estrictamente hablando, la condición TVD ha sido demostrada formalmente sólo para esquemas de una única ecuación de convección escalar (problemas unidimensionales con una única incógnita).

Se desarrollaron muchos tipo de funciones limitadoras (Sweeby, 1984) y se estudiaron los límites que estas deben tener para que el esquema unidimensional de una única incógnita en que se utilicen resulte TVD. Cuanto más peso se da en la combinación lineal a la aproximación de primer orden sobre la de segundo, más difusivo resulta el esquema (ausencia de oscilaciones en las cercanías de las discontinuidades aunque su definición es pobre) y recíprocamente, cuanto más peso se da a la aproximación de segundo orden, más compresivo resulta el esquema (definición aguda de las discontinuidades y tendencia del esquema a soluciones oscilantes y a tornar escalonadas a zonas de variación suave).

Para extender estos conceptos a sistemas de ecuaciones lineales y no lineales, se perdió la garantía acerca de la condición TVD (Toro, 1994) siendo necesario tomar ciertas decisiones sobre como hacer esta extensión, por ejemplo:

- Aplicar una única función limitadora o tantas como ecuaciones tiene el sistema que se está resolviendo.
- Aplicar las funciones limitadoras según una descomposición espectral del salto de variables o componente a componente de las ecuaciones
- Que variable (su modificación) tener en cuenta para el cálculo de la/las funciones limitadoras escalares.

Los esquemas que resultaron ser más robustos utilizan en general, tantas funciones limitadoras como ecuaciones a resolver tenga el sistema y trabajan sobre una descomposición espectral del salto de las variables conservativas (Toro, 1994).

Para el caso particular del sistema de ecuaciones de Euler tridimensional, la descomposición espectral da lugar a la aparición de tres familias de ondas linealmente degeneradas (Leveque, 1992). Esto hace que las discontinuidades asociadas con estos autovalores resulten muy difíciles de resolver en forma precisa excepto por esquemas que utilizan funciones limitadoras fuertemente compresivas (Hirsch, 1992) que resultan poco robustos a la hora de resolver discontinuidades en las familias de las ondas no lineales.

En este trabajo se presenta un nuevo esquema con capacidad para resolver satisfactoriamente discontinuidades asociadas a las familias de ondas linealmente degeneradas y con una robustez semejante a la de los esquemas más difusivos. Dicho esquema se

implementó en un código computacional tridimensional con capacidad de trabajar con mallas no estructuradas.

2 DESCRIPCION DEL ESQUEMA

El esquema desarrollado utiliza la técnica de volúmenes finitos para la resolución numérica de las ecuaciones de Euler tridimensionales dadas por:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f_{(U)}}{\partial x} + \frac{\partial g_{(U)}}{\partial y} + \frac{\partial h_{(U)}}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot F = 0 \quad (1)$$

donde U es el vector de variables conservativas, $f_{(U)}$, $g_{(U)}$ y $h_{(U)}$ las componentes según las tres direcciones coordenadas del vector flujo F . Integrando la ecuación anterior en un volumen cerrado y utilizando el teorema de la divergencia se obtiene:

$$\oint_{Vol} \frac{\partial U}{\partial t} \cdot \partial V + \oint_{Area} F \cdot n \cdot \partial A = 0 \quad (2)$$

donde n es el versor normal a la superficie y saliente del volumen. Estas integrales se realizan en cada una de las celdas que conforma la malla, siendo los volúmenes de integración tetraedros.

Al utilizar una formulación centrada en las celdas de una malla fija, por lo que las variables toman un único valor dentro de cada celda al igual que el flujo numérico en cada cara. Teniendo en cuenta estas hipótesis y adoptando una discretización tipo Euler hacia adelante para la derivada temporal, la Ec.2 puede discretizarse del siguiente modo:

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} \cdot Vol + \sum_{j=1}^{ncaras} F_j^* \cdot n_j \cdot A_j = 0 \quad (3)$$

aquí U^n y U^{n+1} son los vectores de variables conservativas en los pasos de tiempo n y $n+1$ respectivamente, Vol el volumen de la celda, Δt el paso de tiempo, F_j^* el vector flujo numérico en la cara j , n_j la normal y A_j su área.

La fórmula de actualización del vector de variables conservativas se deduce de la Ec.3:

$$U^{n+1} = U^n - \frac{\Delta t}{Vol} \cdot \sum_{j=1}^{ncaras} F_j^* \cdot n_j \cdot A_j = 0 \quad (4)$$

La proyección del vector flujo numérico sobre la normal $F_i^* \cdot n_i$ que en adelante llamaremos $f_{i+\frac{1}{2}}^*$ se calcula basándose en el esquema TVD propuesto por Harten (Harten, 1982; Harten, 1983) y modificado luego por Yee (Yee, Warming and Harten, 1985). Si bien este método fue originalmente desarrollado para esquemas de diferencias finitas, se lo ha extendido exitosamente para formulaciones de volúmenes finitos (Udrea, 1999) similares a la utilizada en este trabajo.

Suponiendo que la cara en que se evalúa el flujo numérico separa dos celdas que llamamos i e $i+1$, para calcular el flujo numérico propuesto por Harten-Yee se debe comenzar desde los estados derecho e izquierdo (U_{i+1} y U_i), calcular el estado promedio de Roe (Roe, 1981; Roe and Pike, 1984) ($U_{i+\frac{1}{2}}$), calcular los autovalores ($\lambda_{i+\frac{1}{2}}^m$) y autovectores ($\overline{r}_{i+\frac{1}{2}}^m$) de la matriz

acobiana y expresar al salto de U a través de la cara como combinación lineal de los autovectores del estado intermedio:

$$U_{i+1} - U_i = \sum_m \alpha_{i+\frac{1}{2}}^m \cdot \overline{r_{i+\frac{1}{2}}^m} \quad (5)$$

Posteriormente, el flujo numérico se calcula según:

$$f_{i+\frac{1}{2}}^* = \frac{f_i + f_{i+1}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sum_m \Phi_{i+\frac{1}{2}}^m \cdot \overline{r_{i+\frac{1}{2}}^m} \quad (6)$$

donde f_i y f_{i+1} son los flujos teóricos (físicos) normales a la cara en cada una de las celdas que dicha cara separa y $\Phi_{i+\frac{1}{2}}^m$ es el limitador de flujo que en el esquema original de Harten-Yee se calcula como:

$$\Phi_{i+\frac{1}{2}}^m = g_i^m + g_{i+1}^m - \left| \lambda_{i+\frac{1}{2}}^m + \gamma_{i+\frac{1}{2}}^m \right| \cdot \alpha_{i+\frac{1}{2}}^m \quad (7)$$

siendo:

$$g_i^m = \frac{S}{2} \cdot \max \left[0, \min \left(\left| \lambda_{i+\frac{1}{2}}^m \cdot \alpha_{i+\frac{1}{2}}^m \right|, S \cdot \left| \lambda_{i-\frac{1}{2}}^m \right| \cdot \alpha_{i-\frac{1}{2}}^m \right) \right] \quad (8)$$

$$S = \text{sign} \left(\lambda_{i+\frac{1}{2}}^m \right) \quad (9)$$

$$\gamma_{i+\frac{1}{2}}^m = \begin{cases} \frac{g_{i+1}^m - g_i^m}{\alpha_{i+\frac{1}{2}}^m} & \text{si } \alpha_{i+\frac{1}{2}}^m \neq 0 \\ 0 & \text{si } \alpha_{i+\frac{1}{2}}^m = 0 \end{cases} \quad (10)$$

La función limitadora utilizada por este esquema (Ec.8) se conoce popularmente como minmod (Sweeby, 1984; Leveque, 1992; Hirsch, 1992; Toro, 1999) y es la más difusiva, ya que toma el mínimo valor posible para que el esquema mantenga su condición TVD. Esto implica que en las discontinuidades el peso que se da en la combinación lineal al flujo de bajo orden es alto comparado con el que se da al de alto orden, con lo que el esquema resulta muy robusto pero con tendencia a ser demasiado difusivo. El otro extremo es la función limitadora "superbee" (Hirsch, 1992) que pondera mayormente la contribución del flujo de alto orden. La implementación de esta función conduce a esquemas excesivamente compresivos y con una tendencia a oscilaciones que hace que resulte muy poco robusto para aplicaciones prácticas generales.

En la solución numérica de las ecuaciones de Euler tridimensionales aparecen cinco familias de ondas. Si se las enumera según su velocidad, siendo la uno la más lenta y la cinco la más rápida, se demuestra (Hirsch, 1992; Toro, 1999) que en las ondas de las familias dos a cuatro, la velocidad de las características a uno y otro lado de la discontinuidad son iguales e

igual a la velocidad de movimiento de la discontinuidad. Esto hace que resulte muy difícil resolverlas numéricamente con precisión y que tiendan a resultar difusamente resueltas.

En este trabajo se explora la posibilidad de usar diferentes funciones limitadoras para las distintas familias de ondas. Se procura mejorar la resolución de las discontinuidades asociadas con las familias dos a cuatro usando funciones limitadoras compresivas (superbee) sin perder robustez gracias al uso de funciones limitadoras más difusivas (minmod) para las familias de ondas uno y cinco.

Para introducir la función limitadora “superbee” en el esquema de Harten-Yee se reemplaza la Ec.8 por la Ec.11:

$$g_i^m = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha_{i+\frac{1}{2}}^m \cdot \alpha_{i-\frac{1}{2}}^m < 0 \\ \max[0, \min(2 \cdot r, 1), \min(r, 2)] \cdot \frac{1}{2} \cdot \left| \lambda_{i-\frac{1}{2}}^m \right| \cdot \alpha_{i-\frac{1}{2}}^m & \text{si } \alpha_{i+\frac{1}{2}}^m \cdot \alpha_{i-\frac{1}{2}}^m \geq 0 \end{cases} \quad (11)$$

siendo:

$$r = \frac{\left| \lambda_{i+\frac{1}{2}}^m \right| \cdot \alpha_{i+\frac{1}{2}}^m}{\left| \lambda_{i-\frac{1}{2}}^m \right| \cdot \alpha_{i-\frac{1}{2}}^m} \quad (12)$$

Para aumentar la robustez del esquema, la implementación de esta idea se lleva a cabo utilizando diferentes funciones limitadoras sólo en aquellas interfaces en que las discontinuidades de mayor intensidad relativa son las registradas en las ondas centrales y utilizando el esquema de Harten-Yee tradicional en el resto de los casos. Surge la necesidad entonces de comparar la intensidad de las distintas ondas. Para lograrlo no se pueden comparar directamente los coeficientes de la descomposición espectral $\left(\alpha_{i+\frac{1}{2}}^m \right)$ ya que estos dependen del módulo que se haya dado a cada autovector.

En este trabajo se adoptó un sistema de coordenadas local en cada cara donde el versor i coincide con la normal, y los versores j y k indican dos direcciones tangenciales a la cara en cuestión. Teniendo en cuenta este sistema de coordenadas, los autovectores utilizados fueron:

$$r_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ u - a \\ v \\ w \\ H - u \cdot a \end{bmatrix} \quad r_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ v \\ w \\ \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \end{bmatrix} \quad r_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ v \end{bmatrix} \quad r_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ w \end{bmatrix} \quad r_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ u + a \\ v \\ w \\ H + u \cdot a \end{bmatrix} \quad (13)$$

siendo H la entalpía de estancamiento.

De la Ec.13 puede deducirse que $\alpha_{i+\frac{1}{2}}^1$, $\alpha_{i+\frac{1}{2}}^2$ y $\alpha_{i+\frac{1}{2}}^5$ miden el salto de densidad en las ondas 1, 2 y 5 respectivamente y que $\alpha_{i+\frac{1}{2}}^3$ y $\alpha_{i+\frac{1}{2}}^4$ miden el salto en ambas componentes de la

velocidad tangencial en las ondas tres y cuatro. Para comparar estos saltos se hace necesario la elección de una densidades de referencia ρ_{ref} y una velocidades de referencia u_{ref} para así comparar las intensidades:

$$I_1 = \frac{|\alpha_{i+\frac{1}{2}}^1|}{\rho_{\text{ref}}}, \quad I_2 = \frac{|\alpha_{i+\frac{1}{2}}^2|}{\rho_{\text{ref}}}, \quad I_3 = \frac{|\alpha_{i+\frac{1}{2}}^3|}{u_{\text{ref}}}, \quad I_4 = \frac{|\alpha_{i+\frac{1}{2}}^4|}{u_{\text{ref}}}, \quad I_5 = \frac{|\alpha_{i+\frac{1}{2}}^5|}{\rho_{\text{ref}}} \quad (13)$$

En este trabajo se fijó como densidad de referencia a la densidad media de los dos estados que la celda separa y como velocidad de referencia al promedio de las velocidades del sonido de dichas celdas.

Finalmente, si el máximo de I_1, I_5 es mayor que el máximo de I_2, I_3, I_4 se utiliza el esquema Harten-Yee sin modificar; en caso contrario, los valores de g_i^2, g_i^3 y g_i^4 se calculan con la función limitadora superbee (Ecs.11 y 12) y los de g_i^1 y g_i^5 con la función limitadora “minmod” (Ec.8).

3 IMPLEMENTACION

3.1 Evaluación de las funciones limitadoras

Para el cálculo de la Ec.7, es necesario evaluar las descomposiciones espectrales de los incrementos de las variables conservativas (Ec.5) no sólo en la interfase $i + \frac{1}{2}$ sino también en la interfase $i - \frac{1}{2}$ para el cálculo de g_i^m y en la interfase $i + \frac{3}{2}$ para el cálculo de g_{i+1}^m .

Como se comentara anteriormente, el método de Harten-Yee fue desarrollado originalmente para esquemas de diferencias finitas en donde está claramente definido qué valores toman las variables a ambos lados de las interfases $i - \frac{1}{2}$ e $i + \frac{3}{2}$. Sin embargo, en el contexto de mallas no estructuradas tridimensionales en general de tetraedros, la identificación de las celdas i e $i+1$ resulta intuitiva (las dos celdas que la cara separa) pero no la de las celdas $i-1$ e $i+2$, ya que alejándose de la cara, no hay dos únicas celdas en contacto con los tetraedros que ella separa.

Para alcanzar segundo orden de exactitud en espacio y tiempo, el esquema necesita recavar información acerca de cómo están variando las variables conservativas hacia la derecha de la celda derecha y hacia la izquierda de la celda izquierda.

Si se analizan dos tetraedros iguales con una cara en común, se ve que los nodos no pertenecientes a la cara común son puntos del espacio representativos del lugar en que se busca dicha información. Luego, si valiéndose de algún criterio, a esos nodos se les asignan valores de variables conservativas, pueden usarse como “celdas imaginarias” $i-1$ e $i+2$.

En el presente trabajo se han implementado estas ideas, calculándose los valores nodales como un promedio ponderado de las variables conservativas entre todas las celdas que tocan a cada nodo. El criterio de ponderación utilizado fue la inversa de las distancias:

$$U_{\text{nodo } k} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{U_{\text{celda } i}}{d_{\text{CG}_{\text{celda } i} - \text{nodo } k}}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{d_{\text{CG}_{\text{celda } i} - \text{nodo } k}}} \quad (14)$$

donde $d_{\text{CG}_{\text{celda } i} - \text{nodo } k}$ es la distancia que separa al CG de la celda i y al nodo k y n es el número de celdas que tocan al nodo k .

3.2 Imposición de las Condiciones de Contorno

El tratamiento de los contornos se hace a través de la técnica de celdas imaginarias (Hirsch, 1992; Toro, 1999). Se contemplan cinco tipos de contornos diferentes:

1. Entrada Subsónica
2. Entrada Supersónica
3. Salida Subsónica
4. Salida Supersónica
5. No penetración (Contorno sólido y simetría)

La determinación de los valores de las variables primitivas en las celdas imaginarias se hace o por extrapolación desde el interior del dominio o a partir de los valores impuestos en el contorno, dependiendo del número de características entrantes al dominio en cada caso.

En caso de tener que extrapolar el valor de una variable cualquiera V desde el interior del dominio, a la celda imaginaria se le asigna el mismo valor V de la celda adyacente al contorno. Como el flujo en la cara del contorno se calcula exactamente igual que el flujo en una cara interna, debe asignarse no sólo valor a la celda imaginaria sino también al cuarto nodo de la misma no incluido en la cara en cuestión. A este se le asigna el mismo valor del cuarto nodo de la celda adyacente al contorno no incluido en la cara en cuestión.

En el caso de imponerse variables tomando información de la condición impuesta en el contorno, para determinar el valor en el centro de la celda imaginaria ($V_{\text{celda imaginaria}}$), se hace una interpolación lineal entre el valor de V en la celda del contorno ($V_{\text{celda real}}$) y el impuesto en el contorno ($V_{\text{impuesto contorno}}$) calculándose:

$$V_{\text{celda imaginaria}} = 2 \cdot V_{\text{impuesto contorno}} - V_{\text{celda real}} \quad (14)$$

Llamando u , v y w a las tres componentes del vector velocidad, para los contorno de tipo uno a cuatro, las variables que se imponen y extrapolan son:

Variable	Entrada subsónica	Entrada supersónica	Salida Subsónica	Salida supersónica
densidad	Impone	Impone	Extrapolación	Extrapolación
U	Impone	Impone	Extrapolación	Extrapolación
V	Impone	Impone	Extrapolación	Extrapolación
W	Impone	Impone	Extrapolación	Extrapolación
presión	Extrapolación	Impone	Impone	Extrapolación

Tabla 1. Criterios seguidos en el tratamiento de los contornos.

Para los contornos en que se impone no penetración, se proyecta la velocidad en las direcciones del sistema normal-tangentes y se extrapolan todas las variables excepto la velocidad normal que se impone igual a cero en el contorno.

4 CASOS DE PRUEBA ANALIZADOS

Con el objeto de verificar el desempeño y la robustez del esquema propuesto se modelaron tres casos de ejemplo. El primero es el flujo en un tubo de choque que representa la materialización de un problema de Riemann. Con él se pretende explorar la capacidad del esquema para modelar discontinuidades de contacto en las que el flujo no tiene velocidad respecto de la discontinuidad (discontinuidad en ondas de la familia 2). El segundo es el modelado de una capa de deslizamiento entre dos flujos de distinta velocidad e igual presión. Fue elegido para estudiar la capacidad del esquema para resolver flujos en que la discontinuidad se presenta en las velocidades tangenciales a la interfase (discontinuidad en ondas de las familias 3 y 4). El tercer caso es el flujo alrededor de un cuerpo de nariz roma de radio constante a velocidades supersónicas de número de Mach creciente. El objeto de este análisis es ponderar la robustez del esquema ante la aparición de ondas de choque de gran intensidad (discontinuidad en ondas de las familias 1 y 5).

4.1 Flujo en el interior de un tubo de choque

El modelo a analizar es un tubo de sección rectangular de 4cm x 4cm y de 2m de longitud lleno con aire. Se parte de una condición inicial atmosférica en la mitad izquierda del tubo y presión de 0.1atm. y temperatura ambiente en la mitad derecha.

La evolución temporal del flujo tiene solución analítica conocida (Toro, 1999) consistente en un sistema de tres ondas, un choque que avanza hacia la derecha a una velocidad de 543.4m/s, una discontinuidad de contacto que también se mueve hacia la derecha a una velocidad de 277.6m/s y un abanico de expansión que avanza hacia la izquierda a velocidades de entre 338.1 y 4.9m/s.

La discretización espacial utilizada parte de una “célula generadora” constituida por 6 tetraedros que forman un cubo de 1cm de lado que se repite en un arreglo de 4x4x200 para formar la malla completa:

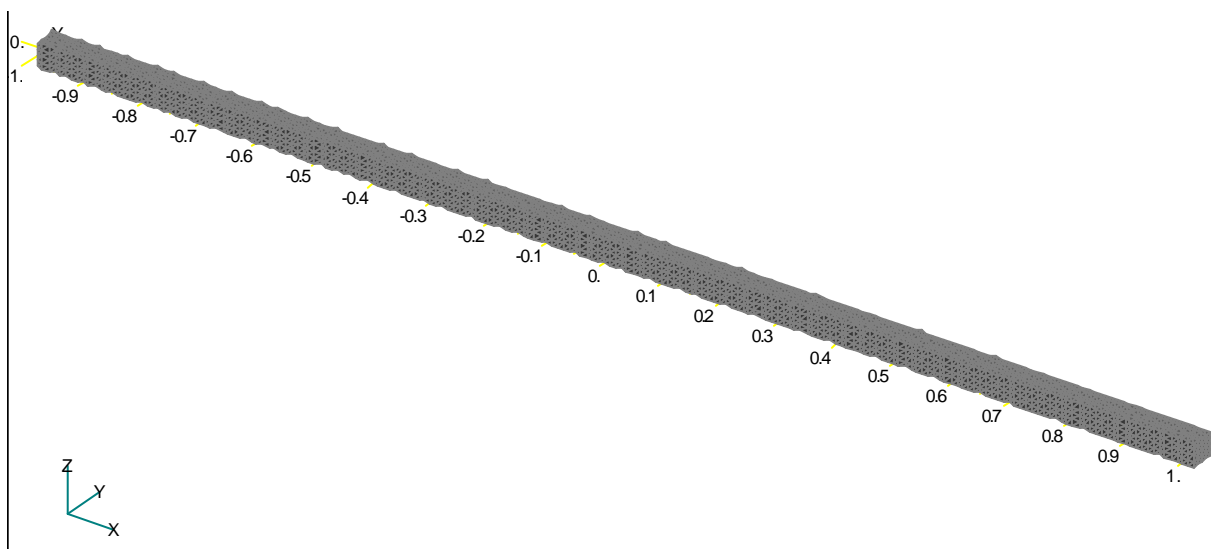


Figura 1. Malla utilizada para el modelado del flujo en el interior del tubo de choque.

4.2 Superficie de deslizamiento

El segundo caso de estudio consiste en un flujo de aire con una densidad de $1.225 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$, una velocidad de $1690.3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ y una presión de 100000 Pa que fluye sobre otro con una densidad de $3 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$, una velocidad de $648.1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ y una presión de 100000 Pa.

Por ser no viscoso el modelo matemático utilizado, la solución analítica para este caso consiste simplemente en el deslizamiento sin interferencia de un flujo sobre el otro. La viscosidad numérica introducida por el esquema hace que se produzca una aparente zona de mezcla que se ensancha aguas abajo de la entrada y es precisamente esto lo que cuantifica la falta de exactitud del esquema numérico.

Para el modelado numérico de este caso se utilizó una malla no estructurada que adrede no cuenta con ningún plano particular en donde debe ubicarse la discontinuidad de deslizamiento de modo que la misma corte las celdas que allí se ubiquen y el modelado sea representativo de una discontinuidad calculada en una zona cualquiera de una malla general.

La malla utilizada para este caso (Figura 2) tiene 57.790 celdas tetraedros y 11.503 nodos. El volumen de control tiene 5m en la dirección de avance del flujo, 1m de alto y 1m de ancho.

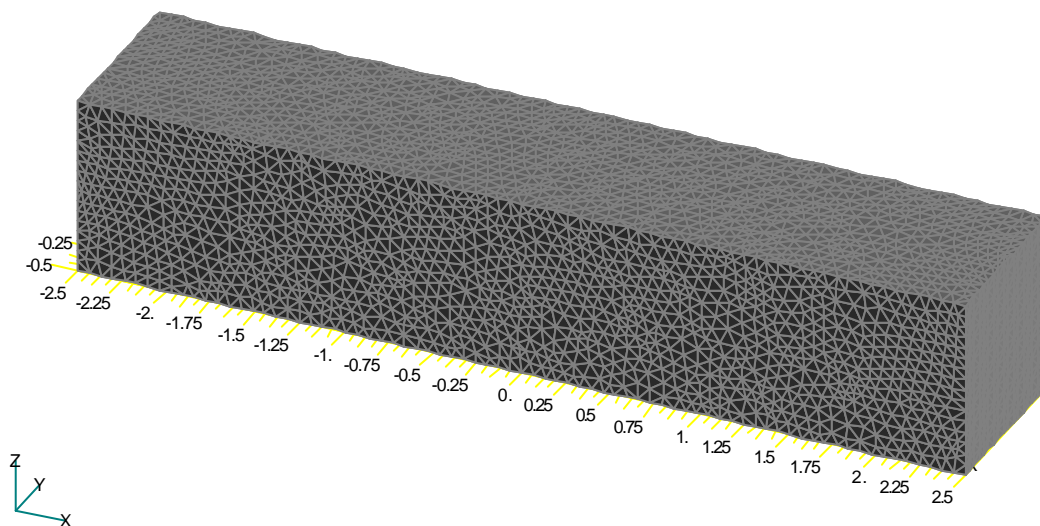


Figura 2. Malla utilizada para el modelado de capa de deslizamiento.

Las condiciones de contorno que se utilizaron son entrada supersónica con valores:

$$\rho = 3 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}, u = 648.1 \frac{\text{m}}{\text{s}}, v = w = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}, p = 100000 \text{ Pa}$$

en:

$$x = -2.5\text{m}; -0.5\text{m} = y = 0.5 \text{ m}; 0 \text{ m} = z = 0.5 \text{ m}$$

entrada supersónica con valores:

$$\rho = 1.225 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}, u = 1690.3 \frac{\text{m}}{\text{s}}, v = w = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}}, p = 100000 \text{ Pa}$$

en:

$$x = -2.5 \text{ m} ; -0.5 \text{ m} = y = 0.5 \text{ m} ; 0.5 \text{ m} = z = 1 \text{ m}$$

En los planos laterales, techo y piso del volumen de control se impuso condición de no penetración y en el plano de salida ($x = 2.5\text{m}$) se impuso salida supersónica.

La condición inicial utilizada fue la solución analítica.

4.3 Flujo supersónico sobre cuerpo de nariz roma

El modelo analizado consiste en el flujo alrededor del cuerpo de revolución graficado en la Figura 3. El radio de la nariz es de 0.15m, sigue luego una parte cónica de 10° de ángulo y 0.3m de largo y finalmente otra parte cónica con ángulo de 20° y 0.2m. Se corrieron dos casos, uno a $M = 5$ y otro a $M = 15$.

Con la simulación numérica de este flujo se pretende analizar las siguientes capacidades del programa para:

- modelar el flujo sobre la nariz esférica a $M=5$, que por alcanzarse flujo supersónico nuevamente no depende de la forma del cuerpo detrás de ella.
- definir con precisión la onda de choque que debe producirse en la zona de cambio de conicidad
- verificar que los resultados tridimensionales reproduzcan la simetría axial del problema.
- Se destaca que la simulación para $M=15$ no pretende predecir resultados físicamente correctos, debido a que la hipótesis de gas perfecto carece de validez para números de tan elevados. Sin embargo, es interesante estudiar la capacidad del programa para trabajar con discontinuidades de choque de gran intensidad como las que se producen en flujos de tales características.

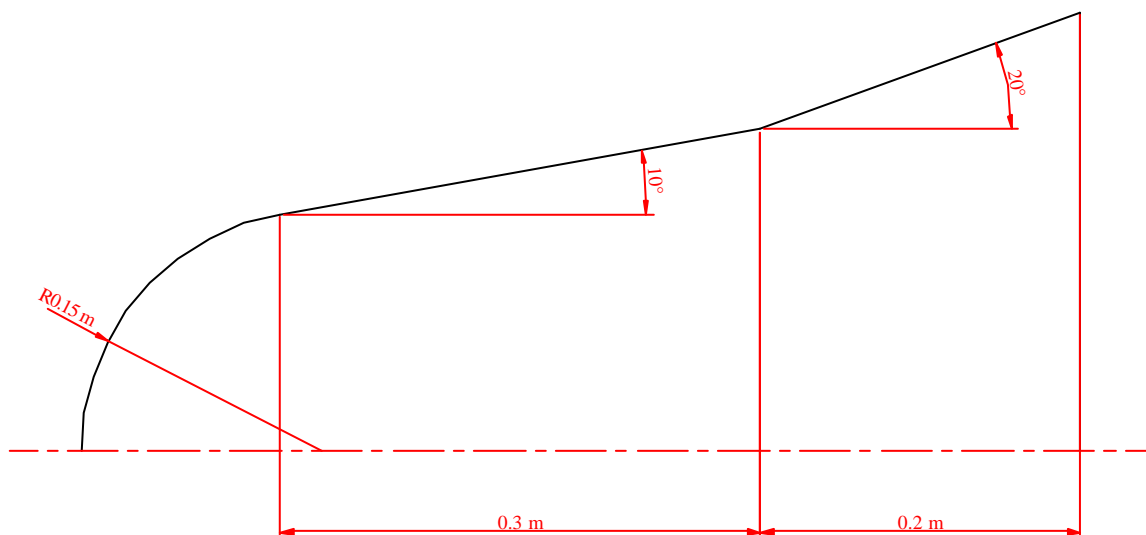


Figura 3. Esquema cuerpo de nariz roma.

Para el desarrollo de la malla (Figura 4), se hizo uso de la simetría axial del problema y se modeló solamente un sector de 90° del flujo externo al cuerpo. La forma exterior de la misma es similar a la forma que toma la onda de choque principal minimizando así la cantidad de celdas que quedan por delante de dicha onda que agregan costo computacional. Tiene 110.067 celdas y 23.020 nodos.

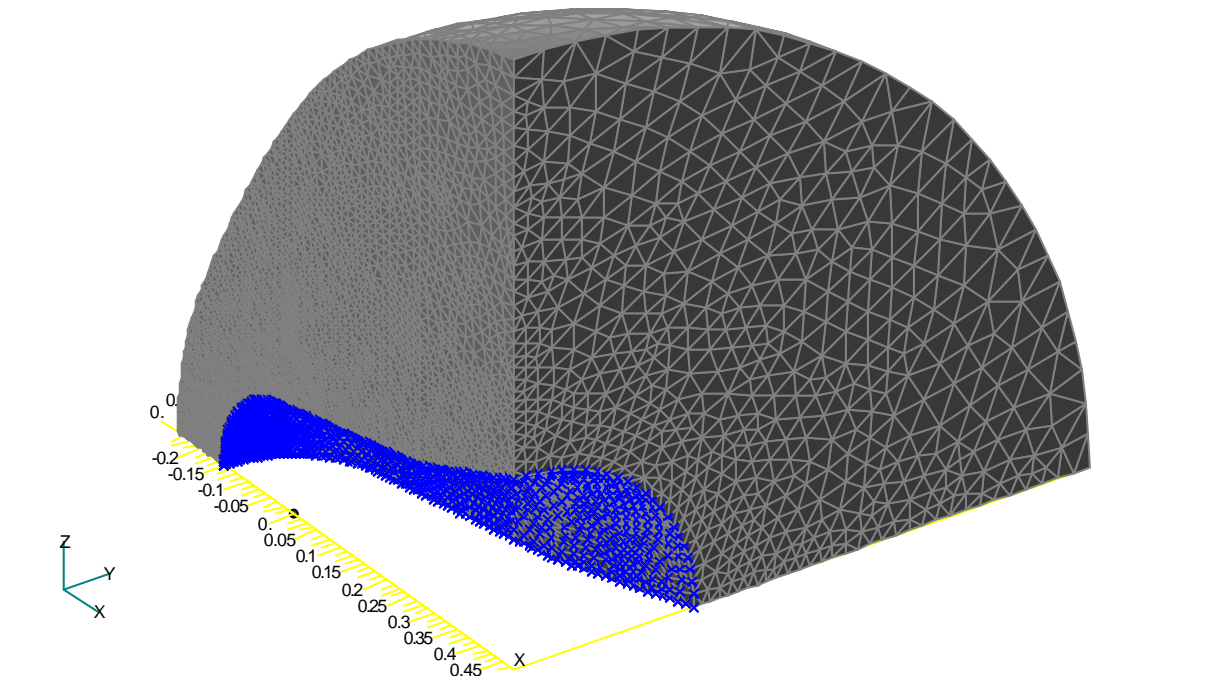


Figura 4. Malla utilizada para el flujo sobre cuerpo romo.

Las condiciones de contorno utilizadas fueron entrada supersónica en toda la parte delantera del volumen de control, salida supersónica en el plano trasero y no penetración en el cuerpo y los planos $y-x$ y $z-x$.

Para el flujo de entrada en todos los casos se utilizó aire con una densidad de $1.225 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$ y una presión de 100.000 Pa, las componentes de velocidad impuesta en las direcciones z y y fueron cero y la componente según x fue de $1690.3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ para el caso de $M = 5$ y 5070.9 para el caso de $M = 15$.

5 RESULTADOS OBTENIDOS

5.1 Problema del tubo de choque

Como se sabe (Leveque, 1992; Hirsch, 1992; Toro, 1999) la solución de los problemas de Riemann para el caso de las ecuaciones de Euler conduce a un problema de similitud, por lo que las variables no son funciones del espacio y del tiempo independientemente sino de su cociente $\left(\frac{x}{t}\right)$. Su solución general es un sistema formado por tres tipos de ondas (choques y/o abanicos de expansión en los extremos y discontinuidad de contacto en la zona central). Para analizar el desempeño del esquema en la predicción de ondas de las tres familias, en la

Figura 5 se grafica la variación de la densidad como función de $\left(\frac{x}{t}\right)$. Se presenta la solución analítica en línea roja llena, en rombos azules los resultados obtenidos por el esquema propuesto en este trabajo y en cuadrados magenta los obtenidos con el esquema de Harten-Yee tradicional.

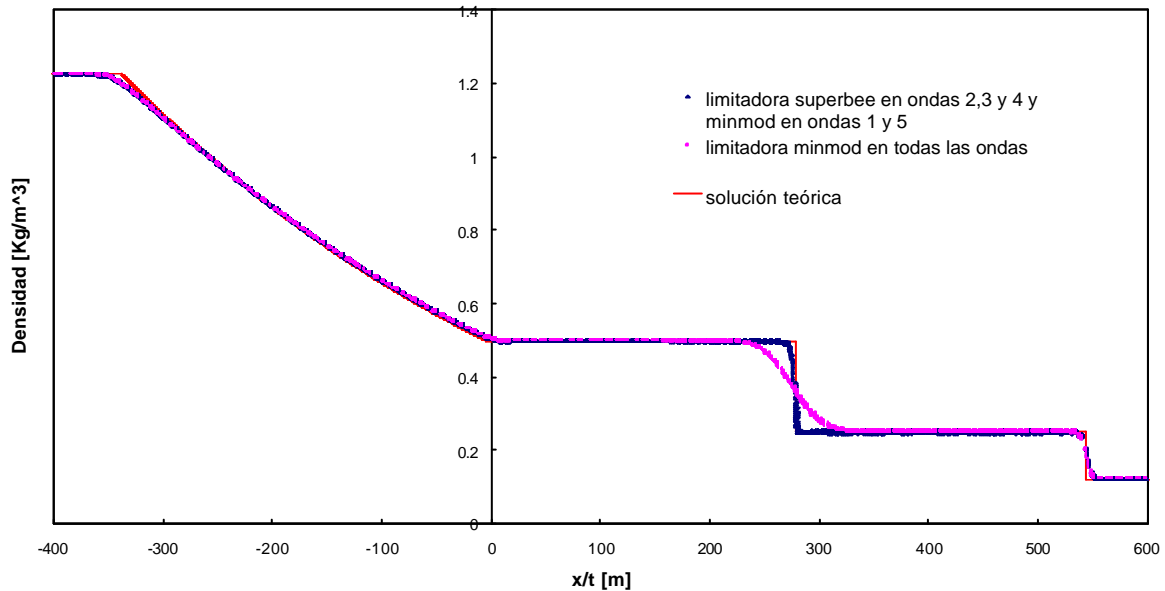


Figura 5. Resultados tubo de choque.

Puede apreciarse en la Figura 5 que el modelado de las ondas no lineales es exactamente igual para ambos esquemas pero el modelado de la discontinuidad de contacto ha sido notablemente mejorado gracias al cambio de función limitadora en las ondas centrales.

Se destaca la ausencia de oscilaciones en las cercanías de las discontinuidades en las predicciones de ambos esquemas y la exactitud en el cálculo de las velocidades de propagación de las ondas.

5.2 Superficie de deslizamiento

En la Figura 6 se presenta la distribución del error porcentual en la predicción de la velocidad en uno de los planos laterales del dominio computacional para el esquema de Harten-Yee tradicional en la mitad superior y para el propuesto en este trabajo en la inferior.

Se grafica el valor absoluto del error en porcentaje de la velocidad promedio entre la de la capa superior y la de la capa inferior:

$$e_{\%} = \frac{|u_{\text{numérico}} - u_{\text{teórico}(z)}|}{\bar{u}} \cdot 100 \quad (15)$$

siendo $u_{\text{numérico}}$ la velocidad predicha por el programa en cada punto, $u_{\text{teórico}(z)} = 1690.3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ si la celda en que se calcula el error tiene su CG a una coordenada mayor de 0.5m o, $648.1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ si

es menor y además $\bar{u} = \frac{1690.3 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 648.1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2} = 1169.2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Las soluciones numéricas obtenidas no muestran variaciones apreciables según el ancho del dominio computacional, por lo que las soluciones de cualquier plano son representativas de lo que ocurre en todo el dominio. Es por eso que en la Figura 6 se presentan los resultados sólo en el plano lateral ($y = -0.5 \text{ m}$).

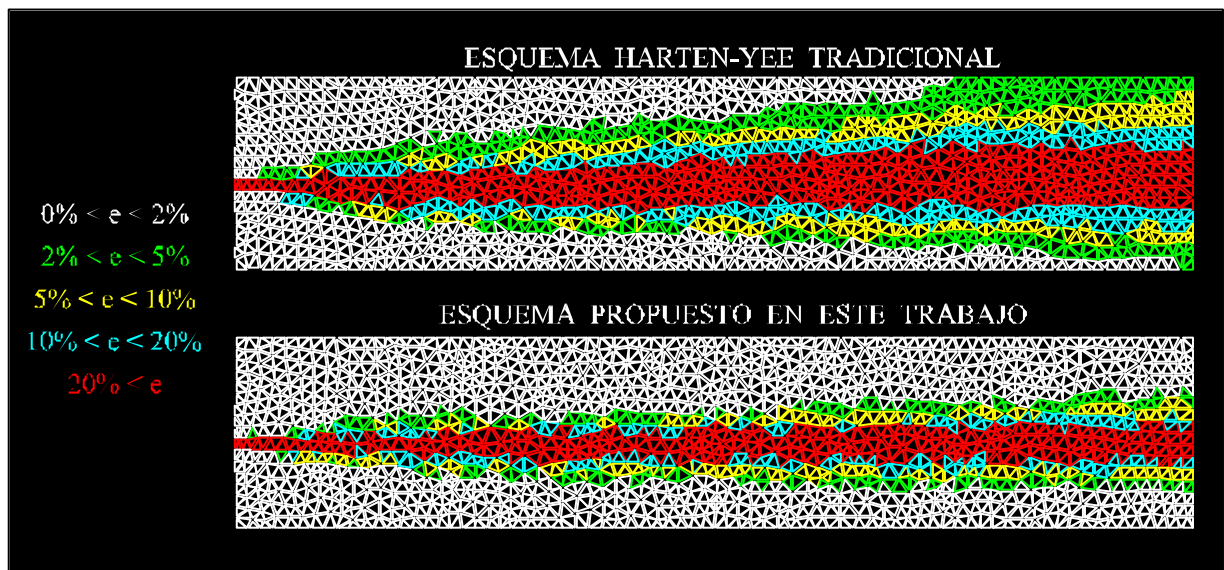


Figura 6. Resultados superficie de deslizamiento.

Si se aproxima una recta que contenga la zona con errores absolutos mayores al 2% y se mide el ángulo entre la línea superior y la inferior, los resultados obtenidos con el esquema de Harten Yee tradicional forman un ángulo de “estela” de 9.9° , mientras que los obtenidos con el esquema propuesto uno de 4.8° .

Se constata entonces que el esquema propuesto resulta notablemente menos difusivo que el esquema de Harten-Yee tradicional.

5.3 Flujo supersónico sobre cuerpo de nariz roma

Este caso fue analizado solamente con el esquema propuesto en este trabajo ya que interesa verificar si éste goza o no de la robustez necesaria para simular discontinuidades de gran intensidad, no siendo de interés demostrar esta cualidad en el esquema tradicional.

En las Figuras 7, 8 y 9 se presenta la distribución de presiones calculada sobre el cuerpo y los planos de los contornos para el caso de $M=5$. En la Figura 8 se utilizó una escala de presiones adecuada para la visualización del choque secundario formado en la zona de cambio de conicidad. En la Figura 9 se presentan las presiones para todas las celdas en contacto con el cuerpo proyectando el ángulo de revolución desde cero hasta noventa grados. Se destaca en la figura la adecuada simetría axial de los resultados y en las Figuras 7 y 8 la excelente captura de los choques. La distribución de presiones sobre la parte roma del cuerpo fue comparada

con los resultados presentados por otros autores (Pirolo and Wardlaw, 1991) mostrando una coincidencia satisfactoria.

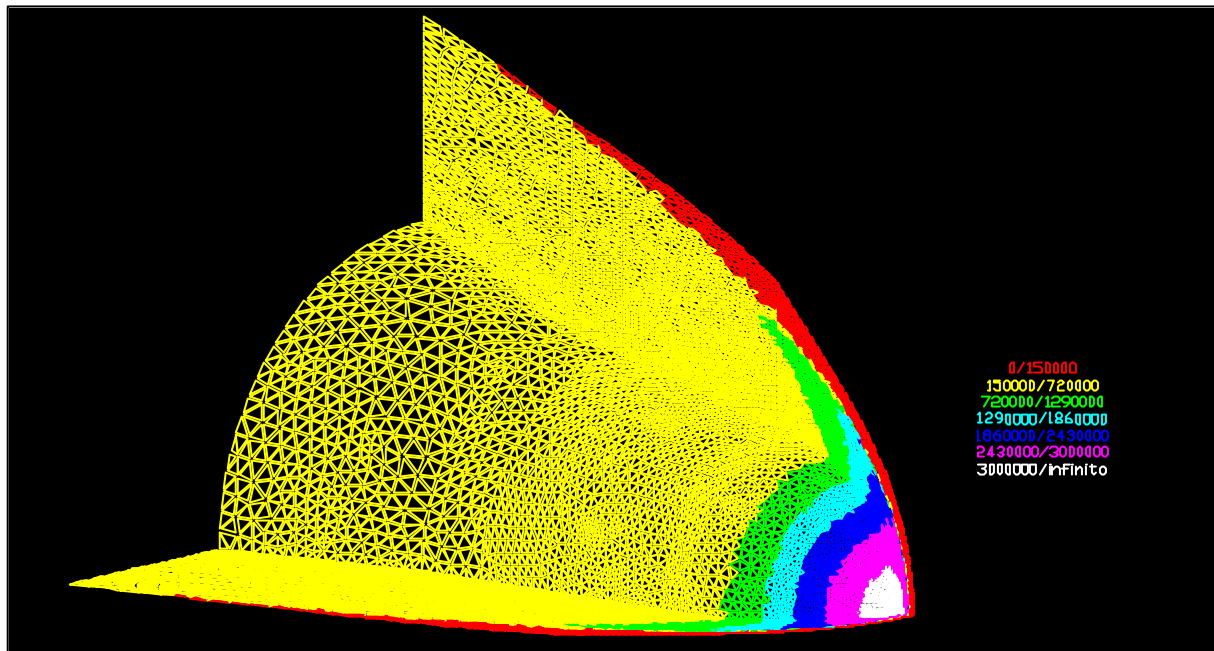


Figura 7. Distribución de presiones sobre el cuerpo axilsimétrico con flujo externo a $M=5$. Visualización choque primario.

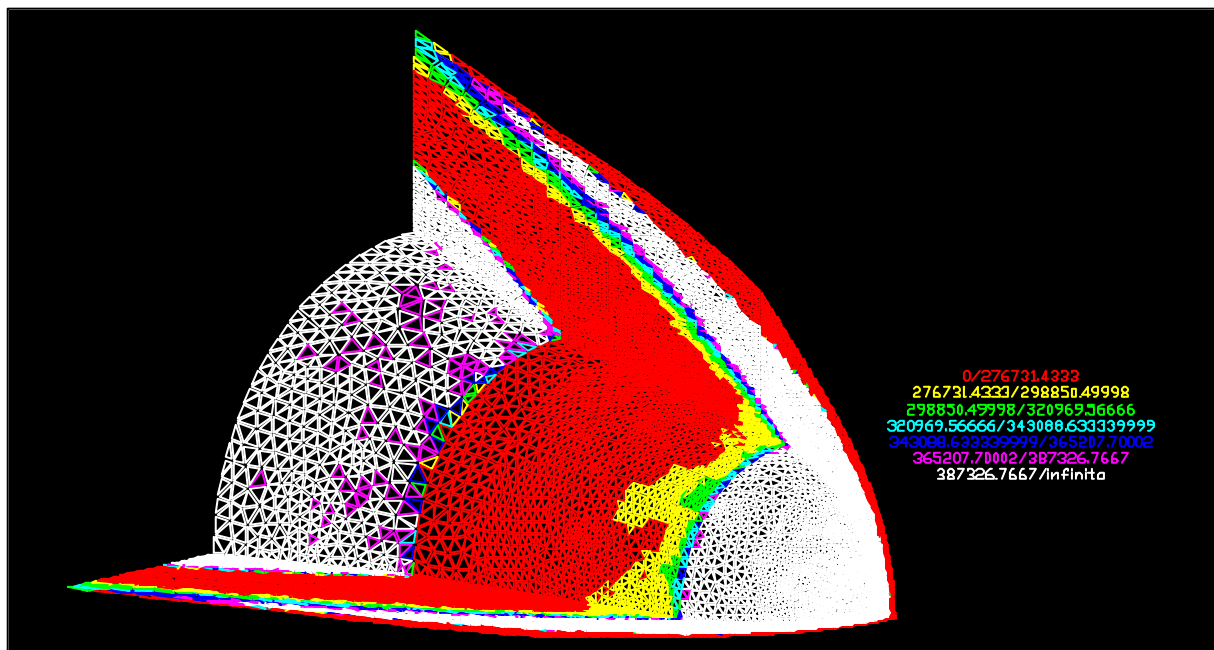


Figura 8. Distribución de presiones sobre el cuerpo axilsimétrico con flujo externo a $M=5$. Visualización choque secundario.

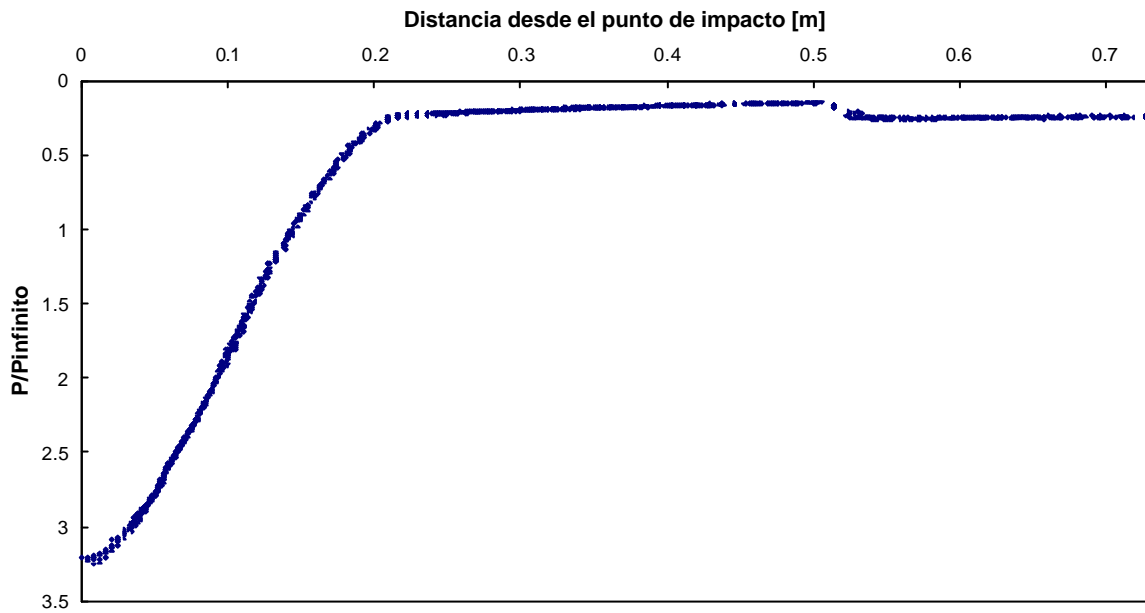


Figura 9. Distribución de presiones obtenida sobre cuerpo axilsimétrico con flujo externo a $M=5$.

En las Figuras 10, 11 y 12 se presentan las distribuciones de presiones obtenidas para $M=15$. Como puede apreciarse, la resolución de las discontinuidades es satisfactoria, no se presentan oscilaciones en sus cercanías y se reproduce satisfactoriamente la simetría axial de los resultados.

Se hace notar que en las Figuras 8 y 11 aparecen zonas de cambio de color que ponen en duda la simetría axial de los resultados; sin embargo, se hace notar que la escala en ellas utilizada es sumamente pequeña para visualizar precisamente la calidad de definición del choque secundario (se utilizan todos los colores de la escala). Puede apreciarse en las Figura 9 y 12 que la dispersión de los resultados en cualquier estación x es muy pequeña comparada con la presión dinámica respectiva, por lo que se puede concluir que la solución numérica si presenta una simetría axial adecuada.

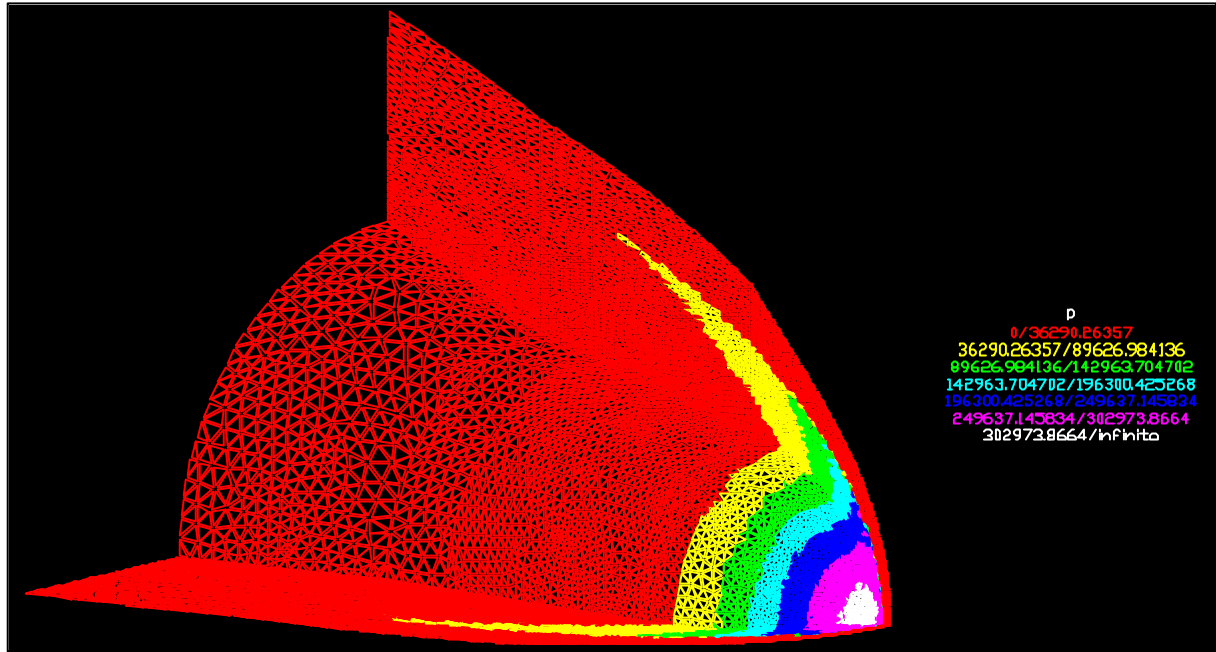


Figura 10. Distribución de presiones sobre el cuerpo axilimétrico con flujo externo a $M=15$. Visualización choque primario.

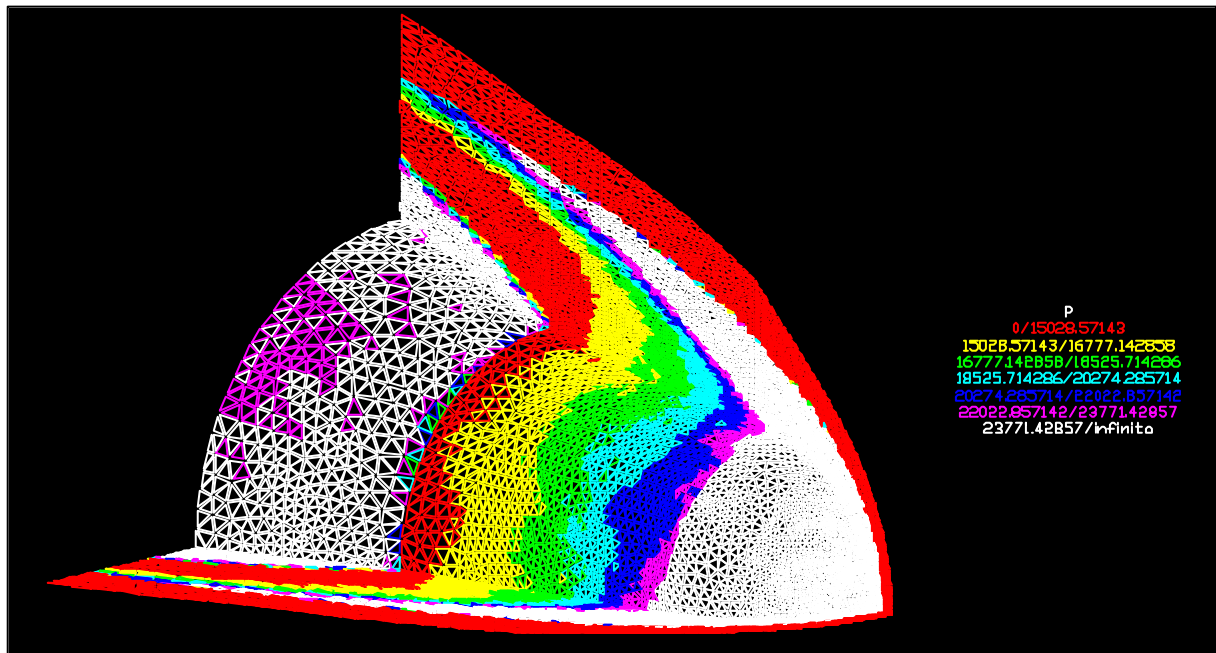


Figura 11. Distribución de presiones sobre el cuerpo axilimétrico con flujo externo a $M=15$. Visualización choque secundario.

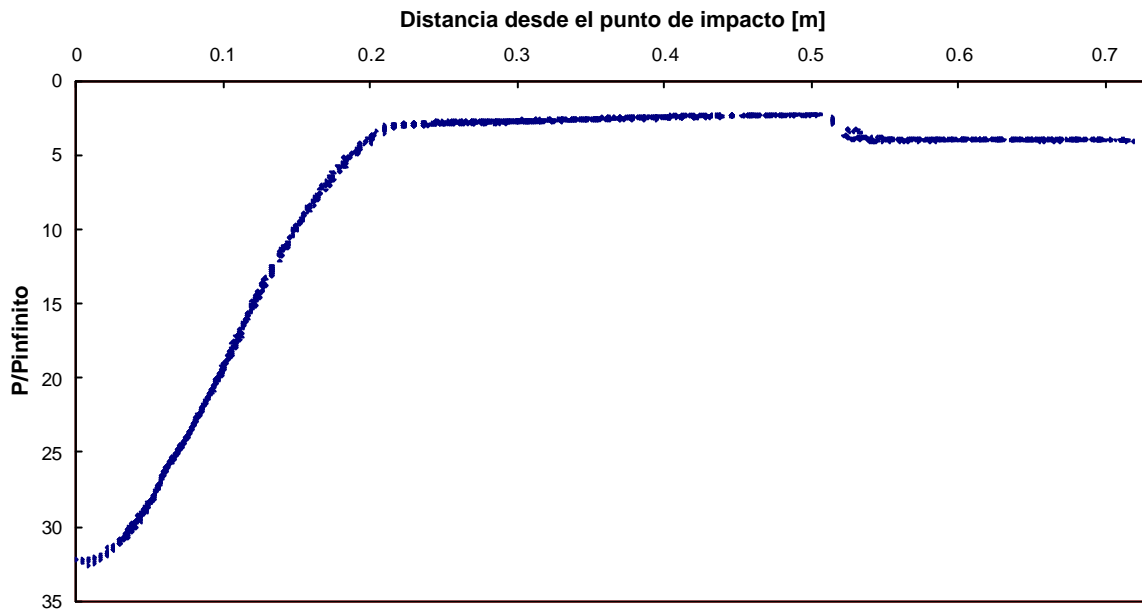


Figura 12. Distribución de presiones obtenida sobre cuerpo axilsimétrico con flujo externo a $M=15$.

6 COCNLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

Los resultados obtenidos en el modelado del flujo en el tubo de choque muestra que el esquema propuesto disminuye considerablemente la viscosidad numérica del esquema de Harten-Yee en el modelado de discontinuidades de contacto asociadas con ondas de la familia dos.

Conclusiones similares se desprenden del modelado de la superficie de deslizamiento del punto 4.2. Los resultados presentados en la Figura 6 muestran que el esquema propuesto soluciona con mayor eficiencia problemas con discontinuidades en las ondas de las familias tres y cuatro. Esta mejora es tal vez más interesante que la anterior dado que numerosos problemas de interés en la ingeniería presentan este tipo de fenómenos como chorros, estelas, capas de mezcla, etc.

Finalmente, cabe destacar que la mejora en definición de discontinuidades no afectó la robustez del esquema que mostró no tener inconvenientes con discontinuidades como ondas de choque teóricas con relación de compresión tan altas como 262:1 como el choque principal asociado al flujo con $M=15$.

Las siguientes etapas en esta investigación apuntan a liberar la hipótesis de gas perfecto para pasar a equilibrio químico para finalmente liberar esta última y considerar reacciones químicas de tasa finita.

7 REFERENCIAS

- A. Harten, "On a Class of High Resolution Total-Variation-Stable Finite Difference Schemes". Technical report, NYU, Octubre 1982.
- A. Harten, "High resolution schemes for hyperbolic conservation laws", *J. Comput. Phys.*, 49: 250-257, (1983).
- C. Hirsch, *Numerical Computation of Internal and External Flows, Vol.2 Computational Methods for Inviscid and Viscous Flows*, John Wiley & Sons Ltd. England (1992).
- R. J. Leveque, *Numerical Methods for Conservation Law*, Birkhäuser Verlag (1992).

- F. J. Pirolo and A. B. Wardlaw Jr. "High Temperature Effects for Missile Type Bodies Using the Euler Solver ZEUS", *AIAA Applied Aerodynamics Conference, Baltimore Maryland, Sept 1991*, AIAA Paper N°91-3259 (1991).
- P.L. Roe, "Approximate Riemann Solver, Parameter Vectors, and Difference Schemes", *J. Comput. Phys.*, 43: 357-372, (1981).
- P.L. Roe and J. Pike, "Efficient Construction and Utilization of Approximate Riemann Solutions", *In Computing Methods in Applied Science and Engineering*. North-Holland, 1984.
- P.K. Sweeby, "High Resolution Schemes Using Flux Limiters for Hyperbolic Conservation Laws", *SIAM J. on Numerical Anal.*, 21: 995-1011, (1984).
- E. F. Toro, *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*, Springer-Verlag (1999).
- B. Udrea, "An advanced implicit solver for MHD", *PhD Thesis*, University of Washington (1999).
- H.C. Yee, R.F. Warming and A. Harten, "Implicit Total Variation Diminishing (TVD) Schemes for Steady-State Calculations", *J. Comput. Phys.*, 57: 327-360, (1985).