

## MODELADO PARA CONTROL DE POSICIONAMIENTO DE VIGA PIEZOELÉCTRICA A PARTIR DE UN MODELO DE ELEMENTOS FINITOS

### PIEZOELECTRIC CANTILEVER MODELING FOR POSITIONING CONTROL BASED ON A FINITE ELEMENT MODEL

**Fernando J. Villegas y Rogelio L. Hecker**

*Grupo de Mecatrónica Aplicada, Universidad Nacional de La Pampa - CONICET, 110 Nro. 390,  
6360 General Pico, Argentina, fvillegas@ing.unlpam.edu.ar*

**Palabras clave:** Modelado para control, Modelo de elementos finitos, Reducción de orden, Piezoeléctrico.

**Resumen.** El método de elementos finitos es sumamente utilizado en el diseño de mecanismos en sistemas mecatrónicos. Aún así, en la etapa de diseño de control se suelen utilizar modelos aproximados obtenidos por otras metodologías, desaprovechando el caudal de información proveniente del modelo de elementos finitos. El presente trabajo muestra la obtención de un modelo de una viga piezoeléctrica en una representación típica para uso en control a partir de su modelo de elementos finitos y otras dinámicas involucradas. El procedimiento mostrado abarca el reordenamiento de los grados de libertad del modelo de elementos finitos, su reformulación en una representación matricial de primer orden de uso típico en control, hasta el problema de reducción de orden. En particular se muestra que la reducción por truncamiento modal, usada típicamente con modelos de elementos finitos, puede llevar a un error de estado estacionario del modelo reducido que puede evitarse con una reducción con compensación de ganancia de estado estacionario.

**Keywords:** Modeling for control, Finite element model, Order reduction, Piezoelectric.

**Abstract.** The finite element method is extensively used in the design of mechanisms for mechatronic systems. Even so, models used at the control design stage are usually approximate models derived from other methodologies, relinquishing the amount of information contained in the finite element model. The present work shows the derivation of a piezoelectric cantilever model in a representation that is typical for use in control, from its finite element model and other involved dynamics. The procedure shown encompasses the reordering of the degrees of freedom of the finite element model, its reformulation in a first order matrix representation typically used in control theory, as well as the order reduction problem. In particular, it is shown that reduction by modal truncation, typically used with finite element models, can lead to a steady-state error of the reduced model, which can be avoided in a reduction with DC gain matching.

## 1. INTRODUCCIÓN

El método de elementos finitos es ampliamente utilizado en la etapa de diseño de numerosos sistemas mecatrónicos, en especial con el advenimiento de los mecanismos flexibles, que presentan ventajas como mayor precisión y menor desgaste que los mecanismos clásicos (Howell, 2001). Sin embargo, en la etapa del diseño de control se suele trabajar con modelos simplificados obtenidos por otros medios, desaprovechando la información proveniente de los modelos de elementos finitos desarrollados previamente. Aún así, existen algunos trabajos en la literatura que buscan aprovechar en cierta medida estos modelos para el desarrollo del control. Tal es el caso de Largilliere et al. (2015) y Bieze et al. (2018), donde para el diseño de control de robots flexibles se utilizan modelos de elementos finitos. Sin embargo, se trata de modelos que no consideran la dinámica del sistema, obteniendo desarrollos restringidos a movimientos de baja velocidad.

Aún así, algunos trabajos también consideran la dinámica del sistema. Uno de estos es el trabajo de Meng et al. (2006a), que ilustra el modelado y control de vibraciones de una placa con parches piezoeléctricos. No obstante, este trabajo no utiliza las matrices obtenidas en el modelado, sino que utiliza la simulación de elementos finitos para obtener un modelo aproximado mediante identificación. Otros trabajos hacen uso de las matrices del modelo, tal como Lim et al. (1997) y Lim et al. (1999b) dedicados también al control de vibraciones, solo que las conclusiones se efectúan a partir de un análisis modal de las ecuaciones de elementos finitos, sin necesidad de transformarlo a un modelo dinámico similar a los empleados en teoría de control.

En efecto, resultaría conveniente transformar el modelo de elementos finitos en un modelo del tipo empleado en control, donde se describe la variación de un vector de estado en función del estado actual y de un vector de entradas, ya que existe una importante variedad de técnicas en teoría de control directamente aplicables a estos modelos. Modelos de este tipo se obtienen en Lim et al. (1999a) dentro del contexto de control de vibraciones, pero sin considerar condiciones de borde esenciales. Para esto, los autores transforman tales condiciones de manera aproximada en condiciones de borde naturales.

Aún obteniendo un modelo típico de control, existe el problema de que el modelo transformado tendrá un gran número de estados, asociado al gran número de grados de libertad en el modelo de elementos finitos. Esto puede hacer que ciertos cálculos a efectuar sobre el modelo dinámico consuman mucho tiempo, lo que constituye un problema, en especial si estos cálculos se tuvieran que hacer en tiempo real como parte de un algoritmo de control. Es por esto que toma importancia también la reducción del orden del modelo. De hecho, el problema de reducción de orden es considerado de por sí en modelos de elementos finitos, tal como en Lim et al. (1999b).

Dentro del contexto del análisis de elementos finitos existe una variedad de métodos de reducción de orden que se aplican sobre la ecuación de elementos finitos. No obstante, muchos se basan en una especie de transformación de coordenadas que lleva a un truncamiento de cierta parte de los modos (Qu, 2004). Como se mostrará en este trabajo esto puede llevar a diferencias significativas entre el comportamiento del sistema completo y el sistema reducido.

Así, el presente trabajo muestra el procedimiento utilizado para la obtención de un modelo en variable de estado de un flexor piezoeléctrico a partir de su modelo de elementos finitos. Este procedimiento abarca el reordenamiento de los grados de libertad del modelo de elementos finitos, su reformulación en una representación matricial de primer orden, hasta el problema de reducción de orden para obtener un modelo manejable. Dado que el actuador está alimentado por un amplificador de corriente, también se considera el aporte de esta dinámica adicional a la

de la estructura propiamente dicha.

## 2. ECUACIONES DE ELEMENTOS FINITOS PARA ESTRUCTURAS PIEZOELÉCTRICAS

El modelado por elementos finitos de estructuras piezoeléctricas lleva a ecuaciones matriciales que se pueden expresar de la forma (Meng et al., 2006b):

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{R}, \quad (1)$$

donde  $\mathbf{M}$ , la matriz de masa, es una matriz simétrica  $n \times n$ ,  $\mathbf{K}$  es la matriz de rigidez,  $\mathbf{R}$  el vector de cargas,  $\mathbf{U} = [\mathbf{d}^T \ \phi^T]^T$  es el vector de los grados de libertad nodales, en este caso conteniendo información relativa a desplazamientos ( $\mathbf{d}$ ) y potencial eléctrico ( $\phi$ ), y  $\mathbf{C}$  es la matriz de amortiguamiento. En más detalle, la matriz  $\mathbf{M}$  puede llevarse a la forma

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{M}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

donde  $\tilde{\mathbf{M}}$  es la matriz de masa estructural (Meng et al., 2006b). Si bien esta ecuación incorpora parte de las condiciones de contorno, se deben incluir además las condiciones de contorno de Dirichlet, que especifican los valores de algunas componentes del vector  $\mathbf{U}$ . Estas condiciones se pueden considerar como dadas por una ecuación de la forma  $\mathbf{B}\mathbf{U} = \mathbf{V}$ , donde por cada condición de Dirichlet de la forma  $U_i = p$  se tiene una fila de la matriz  $\mathbf{B}$  dada por el vector  $\mathbf{e}_i$  de la base canónica de  $\mathbb{R}^n$  y la fila correspondiente de  $\mathbf{V}$  con valor  $p$ . Se asume que  $\mathbf{B}$  es una matriz  $l \times n$  de rango completo,  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^l$ , y  $l < n$ , siendo  $l$  el número de condiciones de Dirichlet y  $n$  el número de grados de libertad.

Hay diferentes maneras de imponer las condiciones de Dirichlet. Una de ellas sería directamente reemplazar los valores conocidos del vector  $\mathbf{U}$  por los valores correspondientes. Otra forma sería usando el método de penalidad, que es el método usado por el software FreeFem++ (Hecht, 2012) para el planteo de la matriz de rigidez y el vector de cargas. En tal caso se tiene (Bathe, 1996):

$$\begin{aligned} \mathbf{B}\mathbf{U} &= \mathbf{V}, \\ \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + (\mathbf{K} + \gamma\mathbf{B}^T\mathbf{B})\mathbf{U} &= \mathbf{R} + \gamma\mathbf{B}^T\mathbf{V}, \end{aligned} \quad (3)$$

siendo  $\gamma \gg K_{ii}$  para  $1 \leq i \leq n$  (por defecto el valor utilizado en FreeFem++ 3.46 es  $1 \cdot 10^{30}$ ).

En cuanto a la matriz de amortiguamiento, esta se introduce para aproximar la disipación de energía del sistema, y usualmente se obtiene como una combinación lineal de las matrices de rigidez y masa estructurales, es decir como  $\tilde{\mathbf{C}} = \alpha\tilde{\mathbf{M}} + \beta\tilde{\mathbf{K}}$  (Meng et al., 2006b). En el caso específico de transductores piezoeléctricos se puede considerar  $\alpha = 0$  (Nader et al., 2004), con lo cual

$$\tilde{\mathbf{C}} = \beta\tilde{\mathbf{K}} \quad (4)$$

Si bien usualmente se considera que la matriz de damping total  $\mathbf{C}$  es distinta de cero solo en el bloque asociado a los grados de libertad mecánicos ( $\tilde{\mathbf{C}}$ ), se puede simplificar las ecuaciones considerando que la matriz de amortiguamiento total cumple con la misma relación, es decir  $\mathbf{C} = \beta\mathbf{K}$ . Sin embargo, esto lleva a la inclusión de una dinámica espuria para los grados de libertad eléctricos. No obstante, el ancho de banda de esta dinámica es tan alto que su efecto en el comportamiento del sistema será difícilmente apreciable al considerar las restricciones de medición detalladas en Sec. 5. Así, con esta simplificación adicional, las ecuaciones quedan

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}(\mathbf{U} + \beta\dot{\mathbf{U}}) + \gamma\mathbf{B}^T\mathbf{B}\mathbf{U} = \mathbf{R} + \gamma\mathbf{B}^T\mathbf{V} \quad (5)$$

### 3. SISTEMA CONSIDERADO

En este trabajo, el procedimiento se ilustra con la estructura piezoeléctrica de la Fig. 1. Esta consiste en dos placas de material piezoeléctrico PZT de  $300\ \mu\text{m}$  de espesor y  $12\ \text{mm}$  de longitud con la dirección de polarización mostrada en la figura (indicada con una flecha junto a la letra P), donde las caras superior e inferior se mantienen a un potencial de  $30\ \text{V}$  y  $-30\ \text{V}$  respectivamente, mientras que en la capa intermedia se aplica la tensión de control. El ancho de las placas es de tres veces su longitud, y se asume que se puede considerar como válida la hipótesis de deformaciones planas.

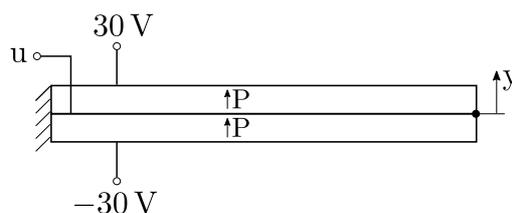


Figura 1: Diagrama de flexor piezoeléctrico.

Para la estructura dada se tiene como entrada  $u$  la tensión entre capas del bimorfo piezoeléctrico, y como salida la posición vertical del punto medio del extremo libre del mismo.

La entrada del actuador piezoeléctrico es alimentada por un amplificador de corriente. Este amplificador de corriente limita el ancho de banda, lo que puede modelarse como un primer orden con un ancho de banda apropiado. De esta manera, la dinámica del sistema completo estará dada por un bloque asociado al amplificador de corriente en cascada con el bloque que modela la dinámica de la estructura piezoeléctrica.

### 4. OBTENCIÓN DE LA REPRESENTACIÓN EN VARIABLE DE ESTADO DE LA ESTRUCTURA PIEZOELÉCTRICA

Para el modelado del sistema de Fig. 1, se utiliza una malla con un nodo coincidente con el punto cuyo desplazamiento vertical se toma como salida. Así, la salida del sistema vendrá dada por uno de los grados de libertad mecánicos.

Para obtener la representación matricial en variable de estado, primero ordenamos las matrices de Ec. (5) de una manera más conveniente. Para esto definimos una matriz de permutación  $S$  de la forma

$$S = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} \quad (6)$$

de manera que el vector  $\bar{U} = SU$  se pueda expresar como

$$\bar{U} = \begin{bmatrix} U_{CC} \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} \quad (7)$$

donde  $U_{CC} = S_1 U$  representa los valores conocidos del vector  $U$  a partir de las condiciones de Dirichlet, y donde los valores desconocidos se agrupan en  $U_3 = S_3 U$  que contiene valores de potencial eléctrico y  $U_2 = S_2 U$  que contiene la información sobre desplazamientos y donde se encuentra la salida de interés de nuestro sistema.

En más detalle,  $\mathbf{S}_1$  es una matriz  $l \times n$ , y teniendo en cuenta la forma en que se definió la matriz  $\mathbf{B}$  para imponer las condiciones de Dirichlet, las  $l$  columnas de  $\mathbf{S}_1^T$  son una base del espacio fila de  $\mathbf{B}$ . Del mismo modo, las de  $\mathbf{S}_2^T$  junto con las de  $\mathbf{S}_3^T$  forman una base del espacio nulo de  $\mathbf{B}$ . De esta manera, al hacer el cambio de variable  $\mathbf{U} = \mathbf{S}^T \bar{\mathbf{U}}$  y premultiplicar Ec. (5) por  $\mathbf{S}$  resulta, teniendo en cuenta la simetría de  $\mathbf{M}$  y la ortogonalidad de  $\mathbf{S}$ :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} & 0 \\ \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ddot{\bar{\mathbf{U}}} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \mathbf{K}_{13} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} & \mathbf{K}_{23} \\ \mathbf{K}_{31} & \mathbf{K}_{32} & \mathbf{K}_{33} \end{bmatrix} (\bar{\mathbf{U}} + \beta \dot{\bar{\mathbf{U}}}) + \begin{bmatrix} \gamma \mathbf{S}_1 \mathbf{B}^T \mathbf{B} \mathbf{S}_1^T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 + \gamma \mathbf{S}_1 \mathbf{B}^T \mathbf{V} \\ \mathbf{R}_2 \\ \mathbf{R}_3 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

donde las submatrices utilizadas se definen como  $\mathbf{M}_{ij} = \mathbf{S}_i \mathbf{M} \mathbf{S}_j^T$ ,  $\mathbf{K}_{ij} = \mathbf{S}_i \mathbf{K} \mathbf{S}_j^T$  y los vectores como  $\mathbf{R}_i = \mathbf{S}_i \mathbf{R}$ , para  $1 \leq i \leq 3$  y  $1 \leq j \leq 3$ .

Reemplazando la tercera fila de la ecuación matricial por bloques en Ec. (8) en la segunda fila, obtenemos

$$\ddot{\mathbf{U}}_2 = \mathbf{P}(\mathbf{U}_2 + \beta \dot{\mathbf{U}}_2) + \mathbf{Q}(u, \dot{u}, \ddot{u}), \quad (9)$$

con

$$\mathbf{P} = -\mathbf{M}_{22}^{-1} (\mathbf{K}_{22} - \mathbf{K}_{23} \mathbf{K}_{33}^{-1} \mathbf{K}_{32}),$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{M}_{22}^{-1} \left[ \mathbf{R}_2 - \mathbf{K}_{23} \mathbf{K}_{33}^{-1} \mathbf{R}_3 + (\mathbf{K}_{23} \mathbf{K}_{33}^{-1} \mathbf{K}_{31} - \mathbf{K}_{21}) (\mathbf{U}_{CC} + \beta \dot{\mathbf{U}}_{CC}) - \mathbf{M}_{21} \ddot{\mathbf{U}}_{CC} \right].$$

Si se denomina  $\mathbf{U}_2^*$  al punto de equilibrio de Ec. (9) para  $u = \dot{u} = \ddot{u} = 0$ , es decir  $\mathbf{P} \mathbf{U}_2^* + \mathbf{Q}(0, 0, 0) = \mathbf{0}$ , y definimos  $\tilde{\mathbf{U}}_2 = \mathbf{U}_2 - \mathbf{U}_2^*$ , linealizando Ec. (9) alrededor de estos valores de equilibrio tenemos

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{\mathbf{U}}}_2 &= \mathbf{P} \tilde{\mathbf{U}}_2 + \mathbf{P} \beta \dot{\tilde{\mathbf{U}}}_2 + \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial u}(0, 0, 0)u + \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \dot{u}}(0, 0, 0)\dot{u} + \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \ddot{u}}(0, 0, 0)\ddot{u} \\ &= \mathbf{P} \tilde{\mathbf{U}}_2 + \mathbf{P} \beta \dot{\tilde{\mathbf{U}}}_2 + \mathbf{B}_0 u + \mathbf{B}_1 \dot{u} + \mathbf{B}_2 \ddot{u} \end{aligned} \quad (10)$$

Teniendo en cuenta que en el sistema considerado las únicas condiciones de contorno dependientes del tiempo estarán asociadas a la tensión de entrada  $u$ , se asume que  $\mathbf{U}_{CC} = \mathbf{E}_1 u + \mathbf{E}_2$ , siendo  $\mathbf{E}_i$  para  $i = 1, 2$  vectores constantes. Como consecuencia, se tiene que

$$\frac{\partial \mathbf{U}_{CC}}{\partial u} = \frac{\partial \dot{\mathbf{U}}_{CC}}{\partial \dot{u}} = \frac{\partial \ddot{\mathbf{U}}_{CC}}{\partial \ddot{u}} = \mathbf{E}_1.$$

Entonces, siguiendo el procedimiento de Brogan (1991) para sistemas con derivadas de la entrada, esta ecuación diferencial se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \beta \mathbf{P} & \mathbf{I} \\ \mathbf{P} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 + \beta \mathbf{P} \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_0 + \mathbf{P} \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} u, \\ \tilde{\mathbf{U}}_2 &= [\mathbf{I} \quad \mathbf{0}] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + \mathbf{B}_2 u, \end{aligned} \quad (11)$$

donde

$$\mathbf{B}_0 = \mathbf{M}_{22}^{-1} (\mathbf{K}_{23} \mathbf{K}_{33}^{-1} \mathbf{K}_{31} - \mathbf{K}_{21}) \mathbf{E}_1,$$

$$\mathbf{B}_1 = \beta \mathbf{B}_0,$$

$$\mathbf{B}_2 = -\mathbf{M}_{22}^{-1} \mathbf{M}_{21} \mathbf{E}_1.$$

Finalmente, la salida de interés es el desplazamiento vertical de uno de los nodos de la malla respecto de su posición de equilibrio, es decir  $y = \mathbf{H}(\mathbf{U}_2 - \mathbf{U}_2^*) = \mathbf{H} \tilde{\mathbf{U}}_2$  para un vector  $\mathbf{H}$  con

valor 1 en la componente específica correspondiente al grado de libertad de interés y 0 en el resto. De esta manera, la ecuación de salida del sistema se puede escribir como

$$y = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} + \mathbf{H}\mathbf{B}_2 u. \quad (12)$$

## 5. REDUCCIÓN DEL ORDEN

En un sistema de control típicamente se trabaja con sensores con un ancho de banda limitado así como también se suele efectuar el muestreo de la señal para su procesamiento. En este sentido, el límite impuesto por el sistema a las frecuencias que se pueden observar hace que la idea de reducir el orden del sistema basándose en la representación modal del mismo sea atractiva también para el diseño de control.

La reducción de orden modal es frecuentemente utilizada en el trabajo con elementos finitos (Qu, 2004). En ese caso, la reducción de orden modal se basan en una transformación de coordenadas de la forma

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{T}\mathbf{Z}(t)$$

para una matriz  $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , con lo que se efectúa un truncamiento modal, dejando solo  $m$  modos del sistema original (de orden  $n$ ) que resultan de interés para el análisis.

Si bien en elementos finitos esto se hace sobre la Ec. (1), la misma idea podría plantearse para las ecuaciones de estado usadas típicamente en control. Sin embargo la diferencia entre el comportamiento del sistema completo y el del sistema reducido cuando se usa este simple truncamiento modal puede resultar importante para ciertos análisis, por ejemplo cuando se busca analizar al error de estado estacionario en el control de un sistema. Esto se puede ver más claramente considerando el siguiente sistema genérico (que se asume se encuentra en su representación modal)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{J}_a & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_a \\ \mathbf{B}_b \end{bmatrix} u, \\ y &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_a & \mathbf{C}_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix} + Du, \end{aligned} \quad (13)$$

donde  $y$  es la salida del sistema,  $u$  su entrada,  $\mathbf{x}_a$  representa la parte del vector de estado correspondiente a los modos que se desea conservar en la representación reducida y  $\mathbf{x}_b$  corresponde a aquellos que se desea descartar. Así, se puede hacer la descomposición en los subsistemas

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}_a}{dt} &= \mathbf{J}_a \mathbf{x}_a + \mathbf{B}_a u, \\ y_a &= \mathbf{C}_a \mathbf{x}_a + Du, \\ \frac{d\mathbf{x}_b}{dt} &= \mathbf{J}_b \mathbf{x}_b + \mathbf{B}_b u, \\ y_b &= \mathbf{C}_b \mathbf{x}_b, \end{aligned} \quad (14)$$

con lo cual  $y = y_a + y_b$ . Entonces, la ganancia de estado estacionario del sistema completo resulta  $-\mathbf{C}_a \mathbf{J}_a^{-1} \mathbf{B}_a + D - \mathbf{C}_b \mathbf{J}_b^{-1} \mathbf{B}_b$ . Obviamente, si se hace el truncamiento modal para descartar los modos del subsistema  $b$  se pierde el término  $-\mathbf{C}_b \mathbf{J}_b^{-1} \mathbf{B}_b$ , lo que puede resultar en un error en la ganancia de estado estacionario del sistema reducido.

Considerando la situación descrita al comienzo de la sección sobre el ancho de banda limitado en el sensado, si los modos de un subsistema particular corresponden a frecuencias por

encima del ancho de banda, el efecto del subsistema se puede considerar similar al de una ganancia, en particular a la de su ganancia de estado estacionario. Esto sugiere que una forma conveniente de efectuar la reducción de orden de un sistema en esa situación sería precisamente descomponiendo el sistema original (en su representación modal) en dos subsistemas, uno con los modos correspondientes a las frecuencias de interés (correspondiente a  $\mathbf{x}_a$ ), y otro con los modos que se pretende descartar (correspondiente a  $\mathbf{x}_b$ ). Una vez hecho esto, se reemplaza este último subsistema por su ganancia de estado estacionario, en este caso  $-\mathbf{C}_b\mathbf{J}_b^{-1}\mathbf{B}_b$ .

Así, se obtiene el sistema reducido como

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_r &= \mathbf{J}_a\mathbf{x}_r + \mathbf{B}_a u, \\ y_r &= \mathbf{C}_a\mathbf{x}_r + (D - \mathbf{C}_b\mathbf{J}_b^{-1}\mathbf{B}_b) u.\end{aligned}\quad (15)$$

donde  $\mathbf{x}_r$  es el vector de estados del sistema reducido, y puede verse que su dinámica coincide con la de  $\mathbf{x}_a$ . Por otro lado, la salida  $y_r$  del sistema reducido difiere de la salida  $y_a$  por efecto de la ganancia de estado estacionario del subsistema  $b$  de Ec. (14). Es fácil comprobar que la ganancia de estado estacionario de este sistema reducido es coincidente con la del sistema completo en Ec. (13).

## 6. RESULTADOS

Con el objeto de comparar el desempeño de la reducción con compensación de ganancia de estado estacionario con el de la reducción por truncamiento modal, en esta sección se efectuó el modelado por elementos finitos de la estructura descrita en la sección 3, así como la simulación del sistema completo.

### 6.1. Detalles del modelado

Tal como se mencionara en la sección 3, se asumió la validez de la hipótesis de deformaciones planas, efectuándose el modelado de la estructura en dos dimensiones. El material piezoeléctrico considerado es el PZT BM500 de SensorTech. Para modelar aproximadamente el amortiguamiento se utilizó información de placas de material PZT del fabricante Piezo Systems Inc. mientras que para la frecuencia de resonancia se utilizaron datos del flexor PI PL112.10.

En el modelado se despreció la influencia del peso propio del material piezoeléctrico, ya que su efecto en el desplazamiento de la viga es despreciable. Aún más, el efecto del peso aparece en el término  $\mathbf{R}$  de Ec. (1) de manera independiente de la tensión de entrada  $u$ . Esto lleva a que la dinámica linealizada de la estructura no se encuentre influenciada por el peso, cuyo efecto solo será alterar el punto de equilibrio alrededor del cual se hace la linealización del modelo de control, y por lo tanto no tiene ningún efecto en las variaciones de la posición de interés respecto de ese punto.



Figura 2: Malla del modelo.

Para el modelado por elementos finitos se utilizó el software FreeFem++ (Hecht, 2012), utilizando elementos triangulares lineales con la malla mostrada en Fig. 2. Cabe recordar que el objetivo de este trabajo es mostrar la conversión de un modelo de elementos finitos a un modelo dinámico típico de teoría de control, y que para comparar el desempeño se van a efectuar simulaciones no solo de los modelos reducidos sino también del modelo completo. Teniendo

en cuenta que las limitaciones de memoria del sistema utilizado para efectuar las simulaciones imponen una limitación en el número de estados a considerar y por lo tanto en el número de grados de libertad del modelo de elementos finitos, no se buscó refinar la malla. Obviamente, en un caso de aplicación práctica no sería necesario limitar los grados de libertad del modelo de elementos finitos ya que se trabajaría mayormente sobre el modelo reducido.

A partir de esto se obtuvieron las matrices  $480 \times 480$   $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{K}$ , el vector  $480 \times 1$   $\mathbf{R}$  así como información adicional que permite identificar los grados de libertad del vector  $\mathbf{U}$ . En MATLAB se utiliza esta información para obtener la matriz de amortiguamiento  $\mathbf{C}$ , la matriz de permutación  $\mathbf{S}$  y el resto de las matrices necesarias para obtener la representación del sistema dinámico de Ec. (11), correspondiente a un sistema con 620 estados.

Para la reducción del modelo se descartaron los modos correspondientes a tiempos de establecimiento por debajo de los  $200 \mu\text{s}$ , es decir con  $\text{Re}(\lambda_i) < -23000$ , quedando un sistema con solo 4 polos, siendo estos complejos conjugados en  $-18751,94 \pm i54472,86 \text{ s}^{-1}$  y  $-458,71 \pm i8998,77 \text{ s}^{-1}$ .

En cuanto a la dinámica asociada al amplificador de corriente, se modeló mediante un primer orden con un ancho de banda de 272 Hz (correspondiente al amplificador detallado en [Physik Instrumente \(2018\)](#) para una carga con una capacidad eléctrica similar a la del actuador PI PL112.10).

## 6.2. Simulación

Para cada modelo del actuador piezoeléctrico se simuló la respuesta a escalón del conjunto compuesto por actuador y amplificador de corriente, con una discretización de  $100 \mu\text{s}$ . Se efectuó la simulación del modelo completo (cuya dinámica se describe en Ec. (11) y cuya ecuación de salida es Ec. (12)), así como la del modelo reducido por truncamiento modal (equivalente a descartar el subsistema  $b$  en Ec. (14)), y por la reducción con compensación de ganancia (Ec. (15)), mostrándose los resultados en Fig. 3.

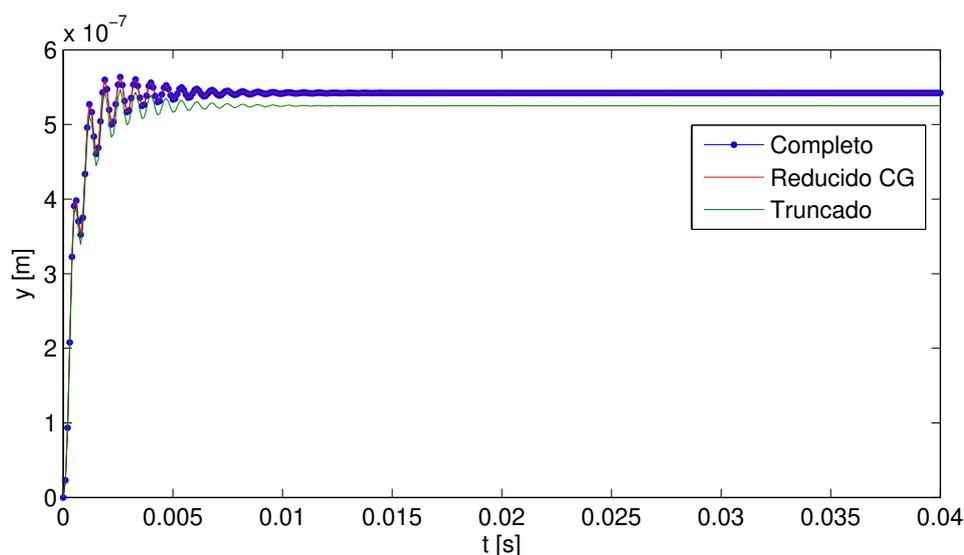


Figura 3: Simulación respuesta a escalón modelo completo y reducidos.

Como se observa, la salida del modelo de 4 estados con la reducción con compensación de ganancia, coincide aproximadamente con la del modelo completo de 620 estados para la

simulación realizada. En cambio, se observa que la salida del modelo reducido por truncamiento modal posee un error de estado estacionario, tal como se advirtió en la sección 5.

La coincidencia entre el modelo completo y el modelo reducido con compensación de ganancia no es de sorprender, ya que como se observa en Fig. 4 la respuesta en frecuencia para ambos modelos de la estructura piezoeléctrica coincide muy bien hasta cerca de los 10 kHz, mientras que la frecuencia de Nyquist para el muestreo considerado en la simulación es de 5 kHz.

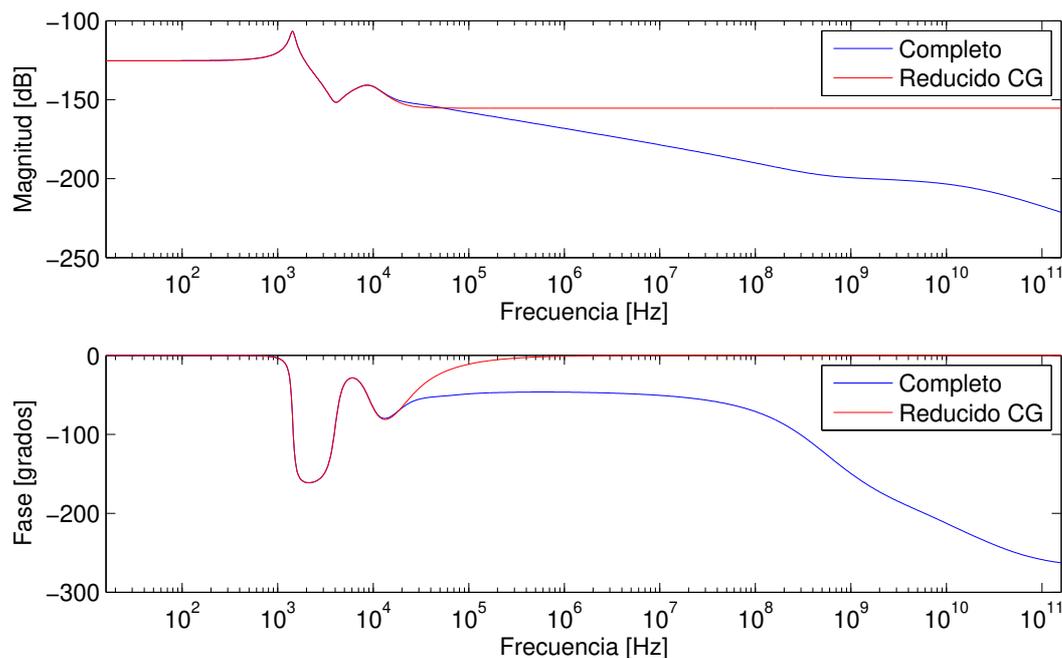


Figura 4: Respuesta en frecuencia de estructura piezoeléctrica, dinámica completa y reducida con compensación de ganancia.

Finalmente, cabe remarcar la diferencia en tiempo de cálculo entre utilizar un modelo reducido y el modelo completo, aún en este caso donde se tiene solo algunos cientos de grados de libertad. De hecho, en el sistema en que se efectuó la simulación, el tiempo promedio requerido fue de 1.09 s para el modelo completo, mientras que para los modelos reducidos fue de 5.3 ms para el modelo reducido por truncamiento modal y 5.4 ms para el modelo reducido con compensación de ganancia de estado estacionario.

## 7. CONCLUSIONES

En este trabajo se desarrolló el procedimiento utilizado para obtener un modelo de un flexor piezoeléctrico en una representación típica para uso en control a partir de su modelo de elementos finitos y de las dinámicas adicionales involucradas.

También se observó que teniendo en cuenta las restricciones del sistema en lo relativo a ancho de banda, es posible obtener un sistema reducido con una exactitud apropiada mediante una reducción modal con compensación de ganancia de estado estacionario.

## REFERENCIAS

Bathe K.J. *Finite Element Procedures*. Prentice-Hall, 1996.

- Bieze T.M., Largilliere F., Kruszewski A., Zhang Z., Merzouki R., y Duriez C. Finite element method-based kinematics and closed-loop control of soft, continuum manipulators. *Soft Robotics*, 5(3):348–364, 2018.
- Brogan W.L. *Modern Control Theory*. Prentice-Hall, 3 edición, 1991.
- Hecht F. New development in freefem++. *Journal of Numerical Mathematics*, 20(3-4):251–265, 2012.
- Howell L.L. *Compliant Mechanisms*. John Wiley & Sons, Inc., 2001.
- Largilliere F., Verona V., Coevoet E., Sanz-Lopez M., Dequidt J., y Duriez C. Real-time control of soft-robots using asynchronous finite element modeling. En *Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation*, páginas 2550–2555. 2015.
- Lim Y., Gopinathan S., Varadan V., y Varadan V. Finite element simulation of smart structures using an optimal output feedback controller for vibration and noise control. *Smart Materials and Structures*, 8:324–337, 1999a.
- Lim Y.H., Varadan V., y Varadan V. Closed loop finite element modeling of active structural damping in the time domain. *Smart Materials and Structures*, 8:390–400, 1999b.
- Lim Y.H., Varadan V.V., y Varadan V.K. Closed loop finite element modeling of active structural damping in the frequency domain. *Smart Materials and Structures*, 6:161–168, 1997.
- Meng G., Ye L., Dong X., y Wei K. Closed loop finite element modeling of piezoelectric smart structures. *Shock and Vibration*, 13:1–12, 2006a.
- Meng G., Ye L., jian Dong X., y xiang Wei K. Closed loop finite element modeling of piezoelectric smart structures. *Shock and Vibration*, 13:1–12, 2006b.
- Nader G., Nelli Silva E.C., y Adamowski J.C. Effective damping value of piezoelectric transducer determined by experimental techniques and numerical analysis. En *ABCM Symposium Series in Mechatronics*, volumen 1, páginas 271–279. 2004.
- Physik Instrumente. E650 datasheet - piezo amplifier for multilayer bending actuators. 2018.
- Qu Z.Q. *Model Order Reduction Techniques*. Springer, 2004.