

ESTIMACIÓN DE COEFICIENTES AERDODINÁMICOS MEDIANTE TÉCNICA DE HORIZONTE MÓVIL

Nicolas Trivisonno¹, Lucas Genzelis², Luciano Garelli¹, Leonardo Giovanini² and Mario Storti¹

¹*CIMEC Centro de Investigación de Métodos Computacionales, UNL, CONICET, FICH, Col. Ruta 168 s/n, Predio Conicet "Dr Alberto Cassano", 3000 Santa Fe, Argentina, <http://www.cimec.org.ar>*

²*Instituto de Investigación en Señales, Sistemas e Inteligencia Computacional, sinc(i), FICH-UNL/CONICET, Argentina*

Keywords: Coeficientes Aerodinámicos, Dinámica de Vuelo, Modelo de Cuerpo Rígido, Balística Exterior, Estimación por Horizonte Móvil.

Abstract. El objetivo del trabajo es identificar el coeficiente de arrastre (C_D) para generar una descripción del comportamiento en vuelo de un proyectil. Se aplica un algoritmo de Estimación de Horizonte Móvil (MHE) que utiliza una estimación adaptativa para calcular el costo de arribo. Se realiza la estimación sobre el coeficiente con distintas características: coeficiente constante y variable en función del número de mach (M), ya sea a través de una función analítica o una interpolación de valores. Por último, se implementa un método para estimar el coeficiente de arrastre cuando este se encuentra compuesto por dos contribuciones, las cuales corresponden al coeficiente de forma (C_{D_0}) y al yaw-drag ($C_{D_{\delta^2}}$).

Keywords: Aerodynamic coefficients, Flight Dynamics, Rigid Body Dynamics, Exterior Ballistics, Moving Horizon Estimation.

Abstract. The aim of this project is the identification of the drag coefficient (C_D) in order to generate an aerodynamic description for a projectile flight dynamic. A Movil Horizon Estimation (MHE) algorithm that utilizes adaptive estimation methods to update the parameters of the arrival cost was applied to obtain a profit in the identification process. Both constant and variable coefficients are estimated. Finally, a method was applied for estimating the drag coefficient when it is integrated by two contributions, such as the form coefficient (C_{D_0}) and the yaw-draw ($C_{D_{\delta^2}}$).

1 INTRODUCCIÓN

Asegurar que la munición alcance el objetivo deseado es de vital importancia para la comunidad de balística exterior. El vuelo de un proyectil está influenciado por varios factores externos los cuales ejercen fuerzas y momentos que modifican la trayectoria durante el vuelo libre. Poder analizar y cuantificar todos los agentes externos que alteran la trayectoria nos permitirá obtener un análisis cuantitativo del comportamiento del proyectil y así poder predecir su trayectoria real. Al conocer con exactitud dicha trayectoria, se puede incidir en las condiciones de lanzamiento de la munición, para poder alcanzar los objetivos deseados. Esta modalidad es utilizada con elevada frecuencia por lo que se debe disponer de un método preciso, ágil, flexible y de sencilla utilización para la predicción de la trayectoria de un proyectil.

Este tópico ha cautivado a la comunidad científica de balística exterior y existe una gran labor en lo que a cálculo de coeficientes respecta. [Sahu et al. \(2012\)](#) se han centrado en el desarrollo y la aplicación de CFD (Computing Fluid Dynamics, 'Dinámica Computacional de Fluidos') acoplada con RBD (Rigid Body Dynamics, 'Dinámica de Cuerpo Rígido') y FCS (Flight Control System, 'Sistema de Control de Vuelo') para predicción de la aerodinámica inestable de vuelo libre y el comportamiento de vuelo de proyectiles de forma integrada. [Burchett \(2013\)](#) investigó un algoritmo que utiliza la teoría lineal tradicional con programación no lineal para estimar los coeficientes aerodinámicos de un proyectil simétrico en vuelo libre. [Montalvo and Costello \(2010\)](#) trabajaron en la determinación de los coeficientes aerodinámicos por medio de un algoritmo llamado virtual fly que acopla CFD con RBD.

Así mismo, la utilización de observadores no lineales recientemente se ha presentado como una alternativa interesante a los filtros de Kalman y los métodos estadísticos ([Rao and Rawlings, 2000](#); [Rawlings and Ji, 2012](#)). En esta línea el algoritmo de MHE (Moving Horizon Estimation, 'Estimación de Horizonte Móvil') es una de las técnicas más utilizadas. [Vandersteen et al. \(2013\)](#) utilizan un MHE en tiempo real para estimar la actitud (u orientación) y los parámetros de calibración de los sensores de una nave espacial. En primer instancia, la actitud es estimada a partir de un magnetómetro y un giróscopo de tres ejes. Luego, utilizan un sensor estelar (star tracker) fusionado con los datos del magnetómetro y el giróscopo para obtener una estimación mejorada. Para lograr estimados en tiempo real, utilizan un algoritmo de Gauss-Newton modificado para obtener la solución del problema de optimización; aprovechando la estructura de banda de la matriz resultante. En el trabajo de [Polóni et al. \(2015\)](#) y [Girrbach et al. \(2017\)](#) utilizan MHE para fusionar la información de un receptor GPS (Global Positioning System, 'Sistema de Posicionamiento Global') con una IMU (Inertial Measurement Unit, 'Unidad de Medición Inercial') con el objetivo de estimar la posición, velocidad y actitud (u orientación) de un cuerpo en movimiento. En este trabajo, se utilizaron los datos obtenidos del vuelo de un avión de distintos sensores, algunos de bajo costo y otros de alta precisión. La combinación de un algoritmo de MHE junto con sensores GPS e IMU de bajo costo logra mejor desempeño que el obtenido utilizando las variantes no lineales del filtro de Kalman y los mismos sensores. Así mismo, destacan que los resultados obtenidos mediante el uso de MHE y sensores de bajo costo es aproximado a los obtenidos utilizando filtros de Kalman y sensores de alta precisión. En este trabajo se utilizará el algoritmo propuesto por [Sanchez et al. \(2017b\)](#), el cual utiliza métodos adaptativos para actualizar el costo de arribo del problema de MHE. El uso de este algoritmo en combinación con solvers de optimización no lineales de alto desempeño –IPOPT y CasADi ([Wächter and Biegler, 2006](#); [Andersson et al., In Press, 2018](#))– permiten la resolución de problemas de MHE en tiempo real.

En este trabajo el método expuesto se emplea a partir de los resultados del modelo RBD con 6DOF, con el objeto de hallar los parámetros aerodinámicos que describen al vuelo del proyectil.

El presente informe está compuesto por el modelado del vuelo de un proyectil, Sec.(2). A continuación en la Sec.(3.1) se describe de la técnica de estimación empleada: MHE. Luego se presentan los resultados obtenidos de la estimación para un coeficiente aerodinámico con distinta naturaleza, como ser coeficiente constante, Sec.(4.1) y coeficiente variable, Sec.(4.2.1) y Sec.(4.2.2). Por último se encuentra un método desarrollado para obtener una caracterización del coeficiente de drag independientemente del lanzamiento y la munición empleada, Sec.(4.2.3). A modo de resumen se encuentran las conclusiones en la Sec.(5).

2 MODELADO DEL VUELO PROYECTIL

La identificación de los coeficientes aerodinámicos están fundados en los modelos físicos de las ecuaciones que rigen las leyes de Newton. Dichos modelos están matemáticamente formulados con ecuaciones diferenciales ordinarias (ODE's) e incluyen las ecuaciones de movimiento del proyectil (ecuaciones cinemáticas) y la ecuaciones de fuerzas y momentos (ecuaciones dinámicas). Al estar en el espacio (R^3) se tienen tres posibles traslaciones, sumados a las posibles rotaciones respecto a cada uno de los ejes anteriores, de modo que resultan en los seis grados de libertad del sistema (6DOF). Es un modelo de espacio-tiempo compuesto por 12 ecuaciones de estado, una por cada grado de libertad. Nuestras incógnitas a obtener son los coeficientes aerodinámicos los cuales se definen como los parámetros mediante los cuales se caracteriza la mecánica de vuelo de cualquier proyectil.

2.1 Sistemas de Coordenadas

La descripción precisa de una posición en el espacio se hace generalmente en forma relativa a alguna referencia. Para describir en forma rigurosa la posición de un punto 'P' en el espacio se necesitan tres elementos esenciales: un sistema de referencia, un sistema de coordenadas y un sistema de unidades.

En primer lugar se necesita de un sistema de referencia el cual tiene un origen 'O' respecto del cual se describe la posición del punto 'P'. El sistema de referencia incluye, además, direcciones que sirven de referencia. El segundo elemento es el sistema de coordenadas, es decir un método para definir la ubicación de 'P' en base al sistema de referencia. Finalmente, el último elemento es el sistema de unidades utilizado para expresar las coordenadas.

Para modelar la dinámica de un cuerpo rígido con 6DOF suele emplearse diferentes marcos de referencia, los cuales se detallan a continuación. El sistema de coordenadas seleccionado es el sistema de coordenadas cartesianas y por último las unidades de sistema internacional (SI). Los diferentes marcos de referencia son:

- **Marco Tierra** $0_{(XE YE ZE)}$ También llamado marco inercial cuya posición y orientación son fijas. En aerodinámica, este marco suele elegirse de forma que el eje $0_{(XE)}$ apunte hacia el norte, el eje $0_{(YE)}$ hacia el este y el eje $0_{(ZE)}$ hacia el centro de la Tierra¹. También suele denominarse marco NED, por sus siglas en inglés de North, East, Down.
- **Marco Cuerpo** $0_{(XB YB ZB)}$ Es un marco no inercial, cuyo origen que se mantiene fijo al centro de gravedad del proyectil, y que se desliza y rota junto con el mismo. $0_{(XB)}$

¹Notar que, debido a los movimientos de rotación de la Tierra, este marco no es verdaderamente inercial. Estos movimientos pueden ser considerados añadiendo otros marcos de referencia intermedios.

apunta en dirección a la nariz del proyectil, $0_{(YB)}$ apunta hacia la derecha y $0_{(ZB)}$ es el resultado de realizar el producto vectorial entre los dos anteriores.

- **Marco Viento** $0_{(XWYWZW)}$ También llamado marco aerodinámico o de estabilidad. Se encuentra ubicado en el centro de gravedad del proyectil y es relativo a la trayectoria. $0_{(XW)}$ se encuentra alineado con el vector velocidad, $0_{(YW)}$ crece en la dirección hacia la derecha y $0_{(ZW)}$ es el resultado de realizar el producto vectorial entre los dos anteriores.

2.2 Ecuaciones de Estado - Modelo de Dinámica de Vuelo

Por otra parte, las ecuaciones de estado del modelo pueden clasificarse en dos tipos: cinemáticas y dinámicas. Las primeras relacionan las velocidades lineales y angulares con los cambios de posición y orientación, mientras que las dinámicas relacionan las fuerzas y torques actuando sobre el sistema con los cambios de las velocidades lineales y angulares). En [Kokes et al. \(2007a\)](#) se presentan las ecuaciones de "un proyectil rígido estándar en el marco cuerpo", Ec.(1), Ec.(2), Ec.(3), Ec.(4). Estas ecuaciones son en realidad válidas para cualquier cuerpo rígido, y se las repite a continuación, aplicando la clasificación mencionada.

- Ecuaciones Cinemáticas:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix}_{NED} = \begin{bmatrix} c_\theta c_\psi & s_\phi s_\theta c_\psi - c_\phi s_\psi & c_\phi s_\theta c_\psi + s_\phi s_\psi \\ c_\theta s_\psi & s_\phi s_\theta s_\psi + c_\phi c_\psi & c_\phi s_\theta s_\psi - s_\phi c_\psi \\ -s_\theta & s_\phi c_\theta & c_\phi c_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}_{BODY} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}_{NED} = \begin{bmatrix} 1 & s_\phi t_\theta & c_\phi t_\theta \\ 0 & c_\theta & -s_\phi \\ 0 & s_\phi / c_\theta & c_\phi / c_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}_{BODY} \quad (2)$$

- Ecuaciones Dinámicas:

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix}_{BODY} = \begin{bmatrix} F_x/m \\ F_y/m \\ F_z/m \end{bmatrix}_{BODY} - \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}_{BODY} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix}_{BODY} = I^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix}_{BODY} - \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix} I \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}_{BODY} \right\} \quad (4)$$

donde s_θ , c_θ y t_θ son las operaciones trigonométricas usuales, $\sin(\theta)$, $\cos(\theta)$ y $\tan(\theta)$, m es la masa del proyectil, \underline{I} es su tensor de inercia expresado en el marco cuerpo (que será por lo tanto constante), el vector $\vec{x} = [x, y, z]$ es su posición respecto del marco inercial, y los restantes vectores se hayan expresados en el marco cuerpo: $\vec{V} = [u, v, w]$ es la velocidad lineal del proyectil, $\vec{\Omega} = [p, q, r]$ es su velocidad angular, $\vec{F} = [F_x, F_y, F_z]$ es la fuerza total actuando sobre el proyectil y $\vec{T} = [T_x, T_y, T_z]$ es el torque total resultante. Los ángulos ϕ , θ y ψ se denominan ángulos de Euler o de Tait-Bryan, y definen la orientación del cuerpo, es decir, que permiten relacionar las representaciones de vectores en el marco inercial con sus correspondientes representaciones en el marco cuerpo. En particular, la Ec. (1) relaciona las coordenadas del vector velocidad expresado en el marco cuerpo $\vec{V} = [u, v, w]$ con las del vector velocidad expresado en el marco inercial $\dot{\vec{x}} = [\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}]$. Por otra parte, la Ec. (2) modela

la evolución de la orientación dada por los ángulos de Euler en función de la velocidad angular del proyectil en el marco cuerpo $\vec{\Omega} = [p, q, r]$.

En el campo de la aeronáutica es tradicional definir las rotaciones representadas por los ángulos de Euler en el orden zyx . Es decir, que los ángulos ψ , θ y ϕ se corresponden a una secuencia de rotaciones en el orden yaw , $pitch$, $roll$, que deben realizarse para alinear el marco inercial con el marco cuerpo: en primer lugar, respecto del eje z del marco inercial, luego respecto del eje y del marco obtenido y finalmente respecto del eje x del marco resultante. Existen otras 11 variantes posibles del orden de las rotaciones, que se emplean en mucho menor medida: xyz , xzy , yxz , yzx , zxy , xyx , xzx , yxy , yzx , zxx y zyz .

Observando las Ecs. (1) a (4), puede verse que los ángulos de Euler aparecen sólo en las ecuaciones cinemáticas. En consecuencia, si se opta por representar la orientación del cuerpo de otra forma, por ejemplo, empleando cuaterniones, sólo se verá afectada la matriz de cosenos directores o el vector de rotación (Bekir, 2007), mientras que la forma general de las ecuaciones dinámicas se mantendrá inalterada.

Por último, debe notarse que la diferencia que se presenta entre el modelo del vuelo del proyectil y cualquier otro modelo de un cuerpo rígido está dada por los parámetros específicos del cuerpo (masa, centro de gravedad y tensor de inercia) y el cómputo de las fuerzas y torques que actúan sobre el mismo.

Para el caso del proyectil, dependiendo de los fenómenos que considere el modelo, las fuerzas y momentos actuantes serán por ejemplo, fuerzas aerodinámicas, fuerzas de efecto magnus, peso de la munición, momentos aerodinámicos, momentos de amortiguamiento y momentos de efecto magnus, entre otros. Para el presente trabajo se considera solamente la fuerza debido a la resistencia aerodinámica omitiéndose los demás esfuerzos. Dicha fuerza es la debida a la resistencia que ofrece el medio fluido (aire) por el cual se desplaza el objeto sólido (munición), es por eso que tiene signo negativo, a que representa una resistencia u oposición al movimiento.

$$\sum \mathbf{F} = [\mathbf{F}_{AERODYNAMICS}] + [\mathbf{F}_{MAGNUS}] + [\mathbf{F}_{WEIGHT}] \quad (5)$$

$$\sum \mathbf{F} = [\mathbf{F}_{AERODYNAMICS}] + [\mathbf{F}_{MAGNUS}] + [\mathbf{F}_{WEIGHT}] \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}_x \\ \mathbf{F}_y \\ \mathbf{F}_z \end{bmatrix} = - \underbrace{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2}_{p_\infty} \underbrace{\frac{\pi}{4} D^2}_A C_D \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \cos(\beta) \\ \sin(\beta) \\ \sin(\alpha) \cos(\beta) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} m * g_x \\ m * g_y \\ m * g_z \end{bmatrix} \quad (7)$$

donde $[\mathbf{F}_{WEIGHT}]_B$ es el peso del proyectil expresado en marco cuerpo, cuya expresión transformada al marco inercial será $\mathbf{W}_{NED} = [0, 0, W]$, siendo W el peso escalar. La configuración de \mathbf{W}_B depende del método elegido para representar la orientación del cuerpo. La expresión presentada en Kokes et al. (2007b) concuerda con la Ec.(7), la cual usa ángulos de Euler. Además en Ec.(7) ρ hace referencia a la densidad, V_∞ es la velocidad de corriente libre, D , m el diámetro y la masa del proyectil y g la magnitud de la aceleración de la gravedad. Los anteriores parámetros constituyen la presión dinámica p_∞ , el área del proyectil A y la aceleración de la gravedad.

3 ALGORITMO DE ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS

La estimación es el proceso que permite inferir el valor de los estados o parámetros de un sistema dinámico a partir de su modelo y mediciones ruidosas (directas o indirectas). En la

formulación de estos problemas hay dos cuestiones fundamentales a resolver: cómo modelar el sistema dinámico en consideración (modelo y descripción de incertidumbre) y cómo elegir el criterio de optimización correcto para cada problema.

3.1 Método de Horizonte Móvil

El método MHE es una técnica en la cual se realizan estimaciones no lineales de estados sin necesidad de linealizar el modelo y tampoco utiliza información estadística de las perturbaciones. La característica de este método es que realiza estimaciones ajustando el modelo de acuerdo a un horizonte de datos pasados y estima (a partir del modelo ajustado) los nuevos datos. Básicamente este método utiliza únicamente los N últimos datos para realizar la estimación, Fig.(1). El horizonte se mueve hacia delante en cada instante de muestreo para poder así utilizar las medidas actuales, y la ganancia se obtiene al estimar una menor cantidad de datos, justamente los correspondientes a la ventana actual, ya que los anteriores son virtualmente desechados. Se dice virtualmente ya que no se estiman sino que se contemplan en la función denominada costo de arribo.

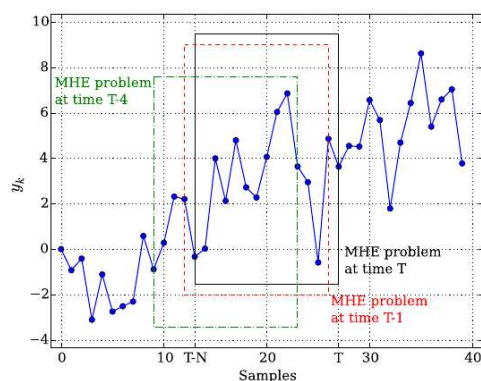


Figure 1: Actualización suave de MHE

Dicha técnica se realiza en un proceso que incluye dos etapas:

- **minimización de la función de costo de arribo** → Minimiza la función costo de arribo con respecto al estado inicial x_{k-N} y a las perturbaciones del modelo w_k . La función del costo de arribo implementada es la medida de la distancia entre la salida del sistema y la salida del estimador a lo largo de un instante de tiempo anterior al instante de tiempo para el que se requiere la estimación del estado (N intervalos hacia el pasado).
- **iteración desde $T - N$ hacia el futuro** → Partiendo del estado inicial óptimo y de las perturbaciones óptimas, se itera recursivamente el modelo desde el instante $T - N$ hacia el futuro

Consideramos el sistema discreto no lineal

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= f(x_k, w_k, \theta), \\ y_k &= h(x_k, \theta) + v_k \end{aligned} \quad (8)$$

donde $x_k = x(k) \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^{n_x}$ es el vector de estados, $p \in \mathcal{P} \subseteq \mathbb{R}^{n_p}$ es el vector de parámetros del sistema, $w_k = w(k) \in \mathcal{W} \subseteq \mathbb{R}^{n_w}$ y $v_k = v(k) \in \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^{n_v}$ son los ruidos de proceso

y de medición, respectivamente, e $y_k = y(k) \in \mathbb{R}^{n_y}$ es el vector de mediciones. El sistema (8) puede obtenerse a partir del sistema continuo compuesto por las ecuaciones cinemáticas y dinámicas del modelo, aplicando posteriormente métodos de discretización adecuados (como ser, por ejemplo, métodos de Runge-Kutta).

Dado un horizonte de N mediciones $\{y_{k-N}, \dots, y_k\}$ hasta tiempo k , el problema MHE no lineal consiste en encontrar los estados, parámetros, ruidos de proceso y de medición que resuelven el siguiente problema de optimización

$$\begin{aligned} \min_{\hat{x}_{k-N|k}, \hat{w}_k, \hat{p}} \mathcal{J}_k &= Z_{k-N}(\hat{x}_{k-N|k}) + \sum_{j=k-N}^k \hat{w}_{j|k}^2 Q^{-1} + \hat{v}_{j|k}^2 R^{-1} \\ \text{st. } \begin{cases} \hat{x}_{j+1|k} &= f(\hat{x}_{j|k}, \hat{p}, \hat{w}_{j|k}), \\ y_j &= h(\hat{x}_{j|k}, \hat{p}) + \hat{v}_{j|k}, \\ \hat{x}_{j|k} &\in \mathcal{X}, \hat{p} \in \mathcal{P}, \hat{w}_{j|k} \in \mathcal{W}, \hat{v}_{j|k} \in \mathcal{V} \end{cases} \end{aligned} \quad (9)$$

donde Z_{k-N} es el término denominado *costo de arribo* y las matrices Q y R son matrices de peso simétricas definidas positivas que se eligen de forma adecuada. Su función es penalizar las estimaciones de los ruidos. El problema de optimización no lineal puede ser resuelto utilizando estrategias de *single shooting*, *multiple shooting*, *collocation* o linealizaciones sucesivas, tal como se discute en [Sanchez et al. \(2017a\)](#).

3.2 MHE con Costo de Arribo adaptativo

En las formulaciones convencionales de MHE se utilizan ventanas de estimación de gran tamaño con la finalidad de reducir los errores producidos debido al cálculo incorrecto del costo de arribo, es decir en lugar de resolver el problema de raíz, se enmascara con un aumento del tamaño del problema de optimización. Esto se debe a la complejidad que lleva aparejada el cálculo de la función de costo de arribo, la cual es vital en esta técnica ya que materializa toda la información de los estados pasados y los incorpora a las estimaciones de los estados actuales haciendo de nexo entre estos y su historia.

[Sanchez et al. \(2017b\)](#) propone un método en el cual la función de costo de arribo se calcula con una técnica adaptativa basada en la historia previa de los estados anteriores. De esta manera se logran resultados muy satisfactorios ya que se reduce considerablemente el tamaño el problema de optimización garantizando la estabilidad y convergencia de las estimaciones. Este hecho se debe a la capacidad del factor de olvido variable para proporcionar buenas capacidades de adaptación que permiten al estimador incorporar la información relevante de los datos y seguir tanto cambios paulatinos como variaciones bruscas.

En este trabajo el método expuesto se emplea partiendo de tomar como mediciones los resultados del modelo RBD con 6DOF's, con el objeto de hallar los parámetros aerodinámicos que describen al vuelo del proyectil.

4 RESULTADOS

El algoritmo de estimación recibe los datos de los esfuerzos obtenidos por el simulador de RBD y mediante las ecuaciones del modelo, Ec.(7), estima los coeficientes involucrados. Por otro lado esos datos se disponen, ya que fueron ingresados al modelo RBD como entrada, ya que caracterizaban el comportamiento aerodinámico del proyectil, de este modo es posible realizar la comparación del valor real ingresado y el valor obtenido mediante el estimador. A dicha discrepancia se la considera error y se designa con la letra griega ε .

Se resuelven distintas situaciones las cuales cuentan con una complejidad gradual. En primera instancia se estima un coeficiente de drag constante, $C_D = C$, Sec.(4.1), luego un

coeficiente variable en función del número de mach, $C_D = C_{D(M)}$, Sec.(4.2.1) y por último se estima el coeficiente de drag correspondiente a la munición Sierra .308 de 168 gr cuyos datos fueron obtenidos de McCoy (1999), Sec.(4.2.2).

4.1 Coeficiente de Drag constante - $C_D = C$

Sobre el caso en cuestión se analizan el coeficiente mediante el estimador desarrollado en la Sec.(3). En la Fig.(2) se presentan los resultados obtenidos de estimar el coeficiente de arrastre C_D en función del tiempo y del Mach, para el cual el valor original del coeficiente de arrastre es $C_D = 0.3$. Se aprecia que la estimación es muy satisfactoria, ya que se obtiene el valor con una variación $\varepsilon = \pm 2 \times 10^{-4}$, lo que representa un error de orden $O(10^{-4})$.

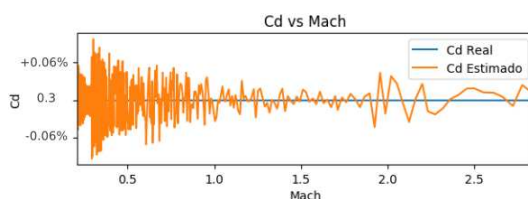


Figure 2: Estimación C_D constante

4.2 Coeficiente de Drag variable

En la Sec.(4.1) el coeficiente de drag era un valor fijo durante todo el vuelo del proyectil. Ahora se introduce una complejidad extra donde dicho coeficiente de drag se va modificando durante el transcurso del vuelo, en otras palabras es un coeficiente variable. Se analizarán dos casos donde en primera instancia, Sec.(4.2.1) se utiliza un coeficiente variable en función del Mach según la ley de la Ec.(10). En segundo lugar, Sec.(4.2.2) se utiliza un coeficiente de drag a partir de una interpolación de valores, T.(1) los cuales corresponden a la munición Sierra 0.308 168 gr.

4.2.1 Coeficiente de Drag variable - $C_D = C_{D(M)}$

Se representa el coeficiente de drag mediante una función dependiente del M, Ec.(10). Se selecciona la misma de modo que la característica de su comportamiento sea similar a la física que experimenta la resistencia aerodinámica del proyectil durante su vuelo.

$$C_D = 0.125 \cdot \tanh(5 \cdot (M - 0.9)) + 0.425 \quad (10)$$

La Fig.(3a) presenta la estimación obtenida, alcanzándose resultados fidedignos con errores de estimación es de $\varepsilon = \pm 1 \times 10^{-4}$, lo que representa un error de orden $O(10^{-4})$.

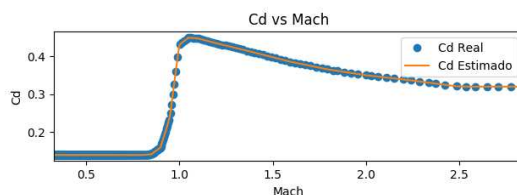


Figure 3: Estimación C_D variable - $C_D = 0.125 \cdot \tanh(5 \cdot (M - 0.9)) + 0.425$

4.2.2 Coeficiente de Drag variable (Tabla) - Sierra .308

Ahora se analiza el caso de la munición Sierra .308 168[gr] donde el coeficiente de drag C_D se obtiene a partir de la interpolación de valores de la T.(1), McCoy (1999). El mismo se compone por una contribución constante C_{D_0} denominada *zero drag* la cual corresponde a la resistencia aerodinámica cuando la munición se encuentra con ángulo de ataque nulo. Además cuenta con una contribución adicional que varía en función del ángulo de ataque, $C_{D_{\delta^2}}$, denominada *yaw-drag*. Dicho coeficiente se expresa mediante la ley de la Ec.(11) donde $\delta = \sin(\alpha_T)$ depende del ángulo de ataque total, α_T .

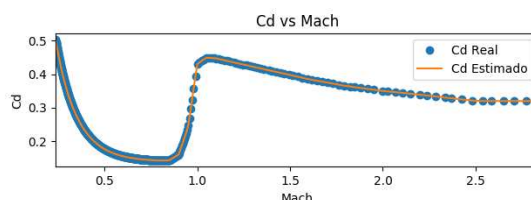
$$C_D = C_{D_0} + C_{D_{\delta^2}} \cdot \delta^2 \tag{11}$$

M_{D_0}	0	0.8	0.85	0.9	0.95	1.0	1.05	1.1	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.5
C_{D_0}	0.14	0.14	0.142	0.16	0.24	0.43	0.449	0.447	0.434	0.41	0.385	0.365	0.35	0.339	0.32

M_{δ^2}	0	0.95	1	1.05	1.1	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0	2.2	2.5
$C_{D_{\delta^2}}$	2.9	2.9	3.0	3.1	3.6	6.5	7.6	7.3	6.8	6.1	5.4	4.4

Table 1: Valores munición Sierra .308

La Fig.(4) presenta la estimación del C_D realizada, obteniendo resultados idénticos a los reales, sobre los cuales se obtienen errores de $\varepsilon = \pm 2 \times 10^{-4}$, es decir un error de orden $O(10^{-4})$. Sin embargo el coeficiente de drag obtenido C_D tiene un comportamiento diferente al esperado, el cual tendría que tener una semejanza con los valores de la tabla C_{D_0} y $C_{D_{\delta^2}}$, ver Fig.(5c) y Fig.(5d).



(a)

Figure 4: Estimación C_D Sierra .308

4.2.3 Disgregación coeficiente - C_D

En relación a la estimación obtenida surge una cuestión con respecto a la mediciones realizadas sobre el CD, ya que el algoritmo de MHE estima el coeficiente de drag respecto al #M y también lo expresa respecto al tiempo de vuelo (CD vs M y CD vs t). Sin embargo, ese resultado no es propicio para caracterizar al proyectil ya que si varía el ángulo de ataque durante la trayectoria, también se modificará el CD, y por ende el resultado obtenido. Frente a esto se concluye que para caracterizar el comportamiento del proyectil se debe estimar ambas contribuciones y no único valor de CD. Dicha situación no es posible mediante el algoritmo MHE, ya que existen infinitas soluciones de C_{D_0} y $C_{D_{\delta^2}}$ para un dado C_D , debido a que se tiene una ecuación con dos incógnitas, Ec.(11). Para garantizar unicidad en la solución se debe anclar un valor de modo

que la Ec.(11) tenga un sólo grado de libertad . En tal sentido, es necesario usar un parámetro característico del drag de modo que se evite la situación mencionada, y además este debe ser distintivo y standard para poder siempre repetir el mismo procedimiento independientemente de las características del lanzamiento realizado y la munición utilizada.

Para ello se desarrolla el siguiente método, en el cual la estimación se realiza en dos etapas. En primer lugar se estima sólo el C_{D0} y una vez obtenido dicho valor, se utiliza como *input* para a partir de este obtener el valor faltante $C_{D\delta^2}$. La técnica utilizada se resume en el siguiente procedimiento:

1. Cálculo de C_{D0}
2. Cálculo de $C_{D\delta^2}$ a partir del item(1)

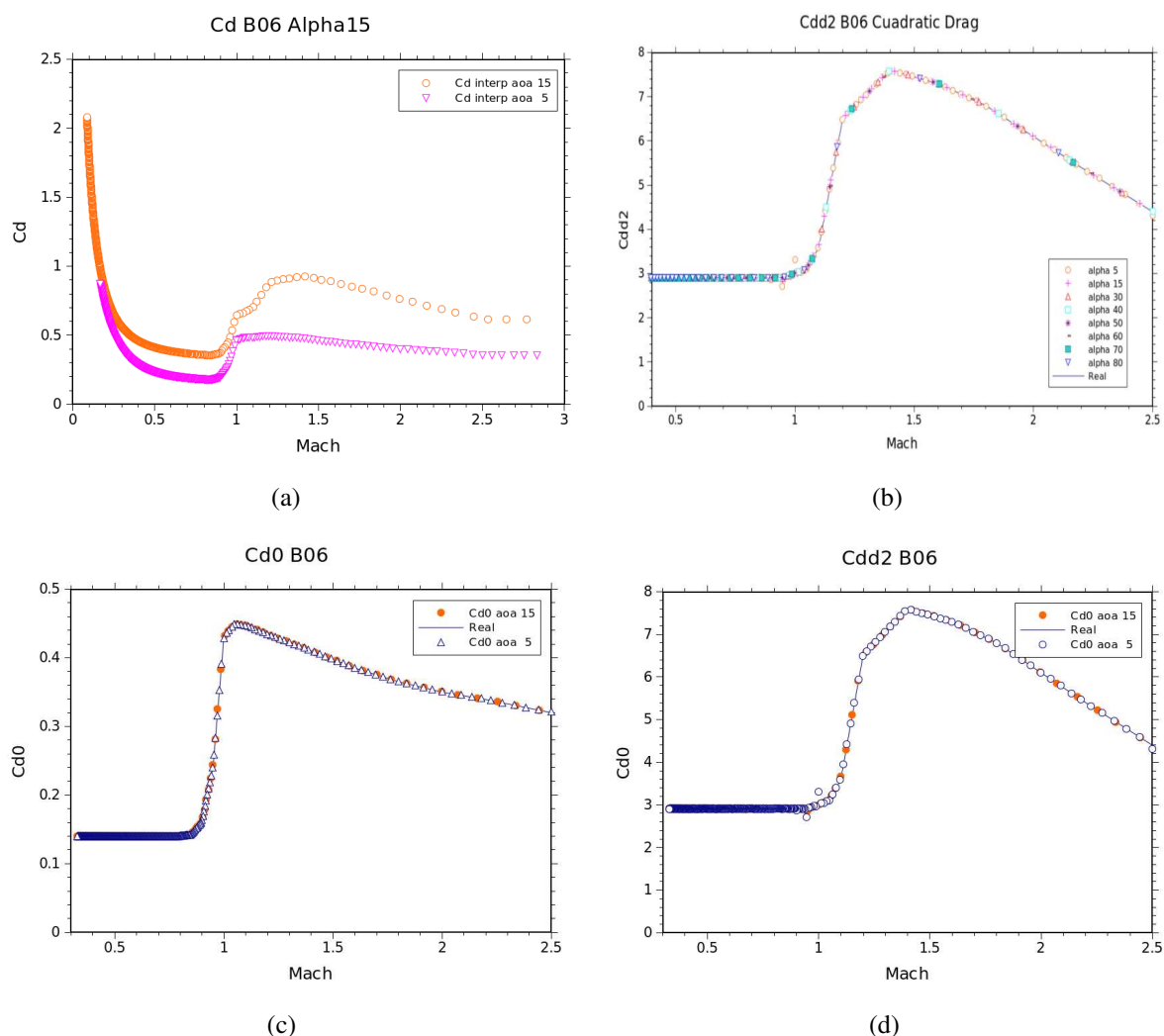


Figure 5: Estimación C_D como composición de C_{D0} y $C_{D\delta^2}$

Cálculo de zero-drag - C_{D0}

El estimador MHE calcula un único valor de coeficiente aerodinámico, con lo cual si se desea obtener solo la contribución del *zero-drag* C_{D0} se deben generar las condiciones de vuelo

para que se anule la otra componente y de este modo solo sobreviva la componente que se desea estimar. Esto se lleva a cabo anulando la contribución del *yaw-drag*, es decir, haciendo que el ángulo de ataque sea nulo durante toda la trayectoria. Para ello se debe simular un lanzamiento con ángulo de ataque nulo y además se debe eliminar la presencia del campo gravitatorio que curve la trayectoria, de este modo, el resultado de la estimación será el referido a la contribución correspondiente al *zero-drag*, Ec.(12):

$$\begin{aligned} C_D &= C_{D_0} + C_{D_{\delta^2}} \cdot \delta^2 \\ C_D &= C_{D_0} + \cancel{C_{D_{\delta^2}} \cdot \theta^2} \\ C_D &= C_{D_0} \end{aligned} \quad (12)$$

Cálculo de *yaw-drag* - $C_{D_{\delta^2}}$

Una vez obtenido la contribución correspondiente al C_{D_0} ahora mediante la estimación MHE es posible determinar el *yaw-drag* ya que se cuenta con una ecuación con sólo una incógnita. De la Ec.(11) se despeja la incógnita a calcular, donde se dispone de C_{D_0} debido a la simulación realizada en el paso previo, y además el algoritmo MHE estima el valor C_D para el actual lanzamiento, por lo que la contribución del *yaw-drag* será:

$$\begin{aligned} C_D &= C_{D_0} + C_{D_{\delta^2}} \cdot \delta^2 \\ \frac{C_D - C_{D_0}}{\delta^2} &= C_{D_{\delta^2}} \end{aligned} \quad (13)$$

Se realiza dicho procedimiento para la munición Sierra .308 con ángulo de ataque de 5 y 15 grados, obteniéndose resultados con elevada precisión. La Fig.(5) contrasta las situaciones de calcular un único coeficiente de drag C_D y calcular las distintas contribuciones que integran dicho coeficiente C_{D_0} y $C_{D_{\delta^2}}$. La diferencia yace en que la estimación del C_D , varía según la situación del vuelo, Fig(5a). Mientras que las distintas contribuciones que integran dicho coeficiente serán las mismas en todo momento, Fig.(5c) y Fig.(5d).

Por último se varía el ángulo de ataque desde 5 a 80 grados para evidenciar que la técnica desarrollada permite estimar los coeficientes aerodinámicos independientemente del tipo de lanzamiento, Fig.(5b). Se presenta solamente la contribución del $C_{D_{\delta^2}}$, ya que esta es el último paso en el procedimiento desarrollado, por lo que si se obtiene una correcta estimación en dicho coeficiente se evidencia la precisión del método empleado.

5 CONCLUSIONES

Se realizaron estimaciones mediante el método MHE obteniéndose resultados con muy buena correlación. Durante la investigación se analizaron distintas naturalezas de coeficientes aerodinámicos, como ser coeficiente de arrastre constante, coeficiente de arrastre variable dado por una ley en función del número de mach y coeficiente de arrastre variable dado por una interpolación de datos obtenidos a partir de una munición real. Se obtienen resultados precisos al utilizar el método propuesto para obtener los parámetros aerodinámicos de una munición independientemente del tipo de lanzamiento. Se concluye que para caracterizar de forma genérica la resistencia aerodinámica de un proyectil se deben disponer tanto del *zero-drag* (C_{D_0}) como del *yaw-drag* ($C_{D_{\delta^2}}$).

REFERENCES

- Andersson J.A.E., Gillis J., Horn G., Rawlings J.B., and Diehl M. CasADi – A software framework for nonlinear optimization and optimal control. *Mathematical Programming Computation*, In Press, 2018.
- Bekir E. *Introduction to modern navigation systems*. World Scientific, 2007.
- Burchett B.T. Aerodynamic parameter identification for symmetric projectiles: an improved gradient based method. *Aerospace Science and Technology*, 30(1):119–127, 2013.
- Girrbach F., Hol J., Bellusci G., and Diehl M. Optimization-Based Sensor Fusion of GNSS and IMU Using a Moving Horizon Approach. *Sensors*, 17(6):1159, 2017. ISSN 1424-8220. doi:10.3390/s17051159.
- Kokes J., Costello M., and Sahu J. Generating an aerodynamic model for projectile flight simulation using unsteady time accurate computational fluid dynamic results. *Computational Ballistics III*, 45:11131, 2007a.
- Kokes J., Costello M., and Sahu J. Generating an aerodynamic model for projectile flight simulation using unsteady time accurate computational fluid dynamic results. *Computational Ballistics III*, 45:11131, 2007b.
- McCoy R. *Modern exterior ballistics: The launch and flight dynamics of symmetric projectiles*. Schiffer Pub., 1999.
- Montalvo C. and Costello M. Estimation of projectile aerodynamic coefficients using coupled cfd/rbd simulation results. In *AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference*, page 8249. 2010.
- Polóni T., Rohal-Ilkiv B., and Arne Johansen T. Moving Horizon Estimation for Integrated Navigation Filtering. *IFAC-PapersOnLine*, 48(23):519–526, 2015. ISSN 24058963. doi: 10.1016/j.ifacol.2015.11.331.
- Rao C.V. and Rawlings J.B. Nonlinear Moving Horizon State Estimation. In *Nonlinear Model Predictive Control*, pages 45–69. Birkhäuser Basel, Basel, 2000. doi:10.1007/978-3-0348-8407-5_3.
- Rawlings J.B. and Ji L. Optimization-based state estimation: Current status and some new results. *Journal of Process Control*, 22(8):1439–1444, 2012. ISSN 09591524. doi:10.1016/j.jprocont.2012.03.001.
- Sahu J., Costello M., and Montalvo C. Development and application of multidisciplinary coupled computational techniques for projectile aerodynamics. In *7th International Conference on Computational Fluid Dynamics*. 2012.
- Sanchez G., Murillo M., Genzelis L., Deniz N., and Giovanini L. MPC for nonlinear systems: A comparative review of discretization methods. In *2017 XVII Workshop on Information Processing and Control (RPIC)*, pages 1–6. IEEE, 2017a. ISBN 978-987-544-754-7. doi: 10.23919/RPIC.2017.8214333.
- Sanchez G., Murillo M., and Giovanini L. Adaptive arrival cost update for improving Moving Horizon Estimation performance. *ISA Transactions*, 68:54–62, 2017b. ISSN 00190578. doi:10.1016/j.isatra.2017.02.012.
- Vandersteen J., Diehl M., Aerts C., and Swevers J. Spacecraft Attitude Estimation and Sensor Calibration Using Moving Horizon Estimation. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 36(3):734–742, 2013. ISSN 0731-5090. doi:10.2514/1.58805.
- Wächter A. and Biegler L.T. On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming. *Mathematical Programming*, 106(1):25–57, 2006. ISSN 1436-4646. doi:10.1007/s10107-004-0559-y.