

SIMULAÇÃO EM ELEMENTOS FINITOS E COMPARAÇÃO COM SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA CONSOLIDAÇÃO DE UMA CAMADA DE ARGILA EM UMA BASE IMPERMEÁVEL

FINITE ELEMENT SIMULATION AND COMPARISON WITH ANALYTICAL SOLUTION FOR CONSOLIDATION OF A CLAY LAYER ON AN IMPERVIOUS BASE

Leon Lima Santos^a e Paulo Gustavo Cavalcante Lins^a

^aEscola Politécnica, Universidade Federal da Bahia, Rua Aristides Novis 2, Salvador/BA, 40210-630, Brasil, leon.limasantos.civil@gmail.com, plins@ufba.br, <http://www.eng.ufba.br/>

Palavras-chave: Elementos Finitos, Consolidação, Python.

Resumo. A simulação em elementos finitos do processo de consolidação de solos usualmente envolve a solução de um sistema linear onde uma matriz de acoplamento compatibiliza uma matriz de rigidez e uma matriz de condutividade hidráulica. As incógnitas nodais envolvem deslocamentos e poro pressões. Um esquema de solução ao longo do tempo é utilizado neste sistema linear acoplado. Uma solução analítica para a consolidação de uma camada de argila acima de uma base impermeável com carregamento em faixa sobre foi tomada como referência no presente trabalho. Os cálculos envolvidos na solução analítica foram implementados por meio de um programa em Python, sendo descritos em detalhes. Com o uso do programa, são obtidos os valores do recalque no centro do carregamento e do recalque adimensional em função do tempo adimensional. Os resultados da solução analítica foram comparados com a solução em elementos finitos. Uma boa aderência entre as duas abordagens foi observada.

Keywords: Finite Elements, Consolidation, Python.

Abstract. The finite element simulation of soil consolidation process usually involves the solution of a linear system where a coupling matrix matches a stiffness matrix and a hydraulic conductivity matrix. Nodal unknowns involve displacements and pore pressures. A solution scheme over the time is used in this coupled linear system. An analytical solution for consolidation of a clay layer above an impermeable base under strip loading conditions was take as reference to the present work. The calculations involved in the analytical solution were implemented through a Python program and are described in detail. Using the program, the values of the settlement at the loading center and the dimensionless settlement as a function of the dimensionless time are obtained. The results of the analytical solution were compared with the finite element solution. A good adhesion between the two approaches was observed.

1 INTRODUÇÃO

Na prática da Engenharia Geotécnica o processo de consolidação de solos ainda é muitas vezes estudado com a aplicação da teoria unidimensional de Terzaghi. Na literatura técnica são conhecidas diversas abordagens para o problema que utilizam as equações tridimensionais da elasticidade e do fluxo no meio poroso tomadas em conjunto. Dentre estas abordagens devem ser destacados os caminhos indicados no conhecido trabalho de Biot (1941), que abriu o desenvolvimento que tomou o nome de poroelasticidade. Uma noção geral do campo da poroelasticidade pode ser encontrada em Cheng (2016).

Diversas soluções analíticas para o problema formalizado por Biot (1941) foram desenvolvidas. No presente trabalho é tomada como referência a solução analítica desenvolvida por Gibson et al. (1970), que trata de uma camada de argila, com base impermeável, com aplicação de uma carga distribuída no topo. Apenas a condição de carga distribuída em faixa, para uma condição de deformação plana, será considerada no presente trabalho.

O método dos elementos finitos possui maior flexibilidade para tratar diferentes problemas de Engenharia Geotécnica. O contraste da solução numérica de elementos finitos com as soluções analíticas permite uma aplicação mais qualificada de elementos finitos, além de realizar mais validações do código utilizado.

Um programa com elementos finitos triangulares de seis pontos nodais foi utilizado para no presente estudo. Neste programa, os elementos finitos utilizados possuem incógnitas de deslocamentos e poro pressões nos pontos nodais dos vértices e apenas incógnitas de deslocamentos nos pontos nodais das arestas. Uma boa aderência foi observada entre a solução numérica e a solução analítica. O mesmo programa foi utilizado em um trabalho prévio dos autores (Santos et al. 2019).

2 SOLUÇÃO ANALÍTICA

Muitas soluções para tensões e poro pressões em um meio poroso elástico através do qual um líquido sofre difusão consideram o meio ocupando um semiplano ou um semiespaço. Gibson et al. (1970) apresentam soluções para os deslocamentos verticais de uma camada de argila extensão lateral infinita apoiada em um meio rígido e impermeável. A camada possui espessura h , onde a profundidade z varia de 0 na superfície para um valor h no fundo da camada (conforme ilustrado na Figura 1). A base impermeável é livre para se deslocar na horizontal. Um carregamento f é aplicado em uma distância $2 \cdot b$.

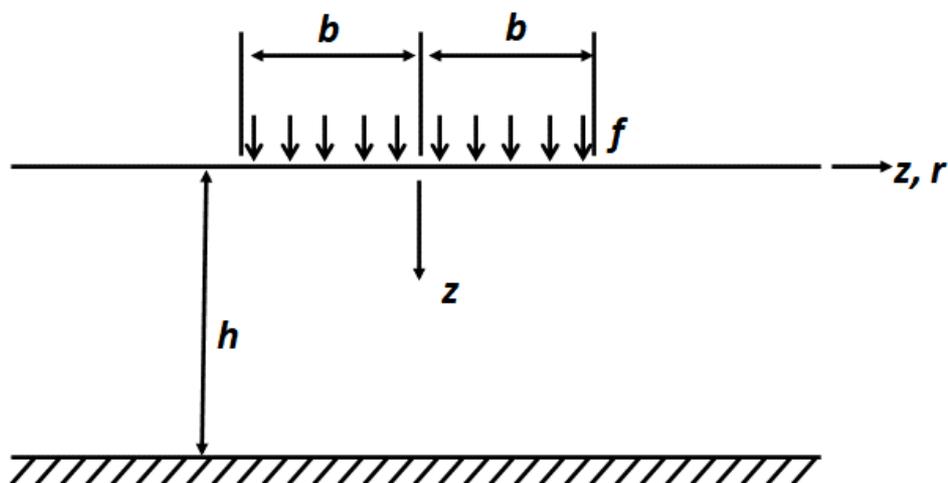


Figura 1: Problema fundamental de Gibson et al. (1970).

Para o recalque da superfície da camada de argila, Gibson et al. (1970) apresentam a seguinte expressão:

$$w_o(x, t) = \frac{\eta \cdot f}{2 \cdot G} \int_0^\infty \Gamma(x, \lambda) \cdot \frac{\tanh(\lambda)^2}{\lambda^2} \cdot \left(\frac{2 \cdot \eta \cdot M(\lambda)}{2 \cdot \eta - 1} + P(\lambda, t) \right) d\lambda. \quad (1)$$

Onde:

$$L(\lambda) = \left[\lambda^2 \cdot \eta^{-1} \cdot (1 + \lambda \cdot \operatorname{csch}(\lambda) \cdot \operatorname{sech}(\lambda))^{-1} \right] - \lambda^2. \quad (2)$$

$$M(\lambda) = \lambda \cdot \eta^{-1} \cdot \operatorname{coth}(\lambda) \cdot (1 + \lambda \cdot \operatorname{csch}(\lambda) \cdot \operatorname{sech}(\lambda))^{-1}. \quad (3)$$

$$F(\alpha_n, \lambda) = \frac{1}{M(\lambda)} - \frac{1}{2} \cdot (1 + \tan(\alpha_n)^2 + \alpha_n^{-1} \cdot \tan(\alpha_n)). \quad (4)$$

$$P(\lambda, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp\left[-(\alpha_n^2 + \lambda^2) \frac{c \cdot t}{h^2}\right]}{F(\alpha_n, \lambda)}. \quad (5)$$

Sendo α_n , as raízes da equação característica:

$$\alpha^2 - L(\lambda) = \alpha \cdot M(\lambda) \cdot \tan(\alpha). \quad (6)$$

Para a condição de deformação plana:

$$\Gamma(x, \lambda) = \frac{2 \cdot h}{\pi \cdot \lambda} \cdot \sin\left(\lambda \cdot \frac{b}{h}\right) \cdot \cos\left(\lambda \cdot \frac{x}{h}\right). \quad (7)$$

A variável auxiliar η é dada por:

$$\eta = \frac{1 - \nu}{1 - 2 \cdot \nu}. \quad (8)$$

O coeficiente de consolidação é definido por:

$$c = 2 \cdot G \cdot \eta \cdot \frac{k}{\gamma_w}. \quad (9)$$

Sendo que os parâmetros dos materiais são: E = módulo de elasticidade; ν = coeficiente de Poisson; G = módulo cisalhante, k = permeabilidade do solo; e γ_w = peso específico da água.

3 IMPLEMENTAÇÃO EM PYTHON

Para obter os resultados da solução analítica um programa em linguagem Python foi elaborado, com base nos algoritmos apresentados em Bentler (1998). O diagrama da Figura 2 indica a interdependência entre as sub-rotinas do programa implementado.

As funções $L(\lambda)$, $M(\lambda)$, $F(\alpha_n, \lambda)$ e $\Gamma(x, \lambda)$ são simples implementações das respectivas equações previamente apresentadas. Já a função $Q(\alpha, \lambda)$ permite obter as raízes da equação característica, Eq. (6), sendo definida na forma:

$$Q(\alpha, \lambda) = \alpha^2 - L(\lambda) - \alpha \cdot M(\lambda) \cdot \tan(\alpha). \quad (10)$$

Em seguida, foi criada a sub-rotina $Bisect(n, \lambda, \varepsilon, itmax)$, que implementa o método da bissecção para busca de raízes em um dado intervalo. Esta sub-rotina recebe respectivamente como parâmetros: o valor para definição do intervalo de busca, λ (variável introduzida para cálculo), o valor limite de aceitação da convergência do intervalo (ε) e a quantidade máxima de iterações. Após os cálculos, traz como retorno os limites do intervalo, $[a, b]$, obtidos como aproximação inicial.

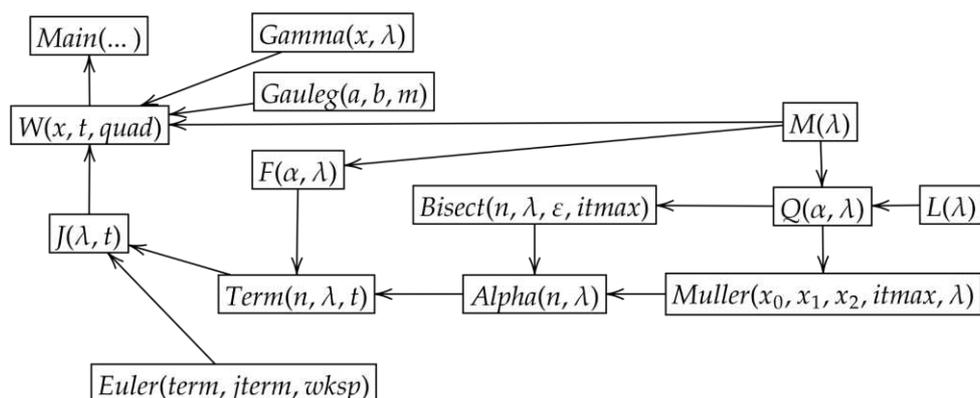


Figura 2: Fluxograma da implementação em Python.

A sub-rotina $Muller(x_0, x_1, x_2, itmax, \lambda)$ refina a estimativa obtida pela sub-rotina anterior, utilizando o método de Muller. Esse procedimento iterativo consiste no cálculo das raízes a partir de uma aproximação quadrática. Recebe respectivamente como entrada os três pontos para estimativa da parábola $(a, (a + b)/2, b)$; a quantidade máxima de iterações e λ . A sub-rotina retorna a raiz encontrada.

A função $Alpha(n, \lambda)$ chama as sub-rotinas $Bisect$, para obter uma aproximação inicial da n ésima raiz da equação característica; e $Muller$, para refinar a raiz obtida. A sub-rotina em questão recebe como entradas o valor para definição do intervalo de busca e λ . Após o processamento a sub-rotina retorna a parte real da raiz encontrada.

A função $Term(n, \lambda, t)$ calcula o n ésimo termo de $P(\lambda, t)$, indicado pela Eq. (5). A sub-rotina recebe como entradas os mesmos parâmetros de $Alpha$, além de um terceiro relacionado ao tempo.

A sub-rotina $Euler(term, jterm, wksp)$ estima a somatória de uma série infinita convergente com termos de sinal alternado. Recebe como entradas: uma somatória ponderada de alguns dos termos de $P(\lambda, t)$, um contador da posição atual do termo avaliado em relação ao método de Euler; além de um vetor que contém os valores relacionados à convergência e ao resultado. A sub-rotina retorna o último parâmetro recebido, isto é, o vetor, com as devidas atualizações.

A sub-rotina $J(\lambda, t)$ estima $P(\lambda, t)$, utilizando a transformação de Euler. Usa-se também a transformação de van Wijngaarden para converter $P(\lambda, t)$ em uma série alternada de modo que a transformação de Euler possa ser compatível. A sub-rotina recebe como entradas λ e uma variável relacionada ao tempo. Seus retornos são um vetor que contém o resultado final da estimativa de Euler para uma dada tolerância e a quantidade de tentativas dessa convergência.

A sub-rotina $Gauleg(a, b, m)$ implementa a quadratura de Gauss-Legendre, que permite aproximar a integral definida de uma função. A sub-rotina recebe como entradas o início do intervalo, o final do intervalo e a quantidade de pontos da regra da quadratura. Retorna uma matriz cuja primeira coluna armazena os pontos gaussianos e a segunda contém os respectivos pesos gaussianos para cada ponto dentro do intervalo $[a, b]$.

A sub-rotina $W(x, t, quad)$ permite calcular o recalque, $w(x, t)$. Recebe respectivamente como entradas a posição, o tempo e a quantidade de pontos de quadratura. Essa sub-rotina chama $Gauleg(a, b, m)$ para realizar o cálculo com uso da regra da quadratura, sendo que a integral é separada em subpartes de comprimento igual a π . Essa divisão é feita para compatibilizar o cálculo ao período da função $w(x, t)$, que possui esse mesmo valor.

A rotina principal $Main$ é responsável pela definição do vetor *tempo* que contém os valores de tempo para os quais se deseja determinar o recalque; pela conversão desse vetor em um novo

contendo tempos adimensionais; pela conversão do recalque obtido em recalque dimensional e pela geração de um gráfico relacionando esses dois últimos resultados.

O programa implementado foi validado por comparação com os dados com os apresentados em [Bentler \(1998\)](#) e com os gráficos de [Gibson et al. \(1970\)](#).

4 ANÁLISE DE CONSOLIDAÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS

O desenvolvimento da formulação de elementos finitos para análise do problema de consolidação pode ser realizado por diversas abordagens. Por exemplo, [Ghaboussi e Wilson \(1973\)](#) fazem o desenvolvimento a partir de princípios variacionais; em outra forma, [Ding e Naylor \(1989\)](#) apresentam uma demonstração a partir de trabalhos virtuais.

Para o ponto nodal do elemento finito usualmente são considerados no problema bidimensional dois deslocamentos e uma poro pressão. No problema tridimensional usualmente são considerados três deslocamentos e uma poro pressão.

Seguindo a notação de [Ding e Naylor \(1989\)](#), ao longo do tempo t , o problema pode ser representado pela solução de um sistema do tipo:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}^T & -\mathbf{H}\alpha\Delta t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{r}_u(t + \Delta t) \\ \mathbf{r}_p(t + \Delta t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}^T & -\mathbf{H}(1 - \alpha)\Delta t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{r}_u(t) \\ \mathbf{r}_p(t) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{R}_u \\ \mathbf{R}_p \end{Bmatrix} \quad (11)$$

Onde, \mathbf{K} é matriz de rigidez da fase sólida; \mathbf{H} é a matriz de fluxo; \mathbf{C} é a matriz de acoplamento; \mathbf{r}_u é o vetor de componentes de deslocamento nodais; \mathbf{r}_p é o vetor de poro pressões nodais; α é uma constante de integração no tempo; Δt é o passo do tempo. Os demais termos da Eq. (11) são detalhados em [Ding e Naylor \(1989\)](#), por exemplo.

No presente trabalho foi utilizado o programa CRISP (*CRITICAL State Program*), descrito em [Britto e Gunn \(1987\)](#). O CRISP foi projetado para análises geotécnicas, possuindo diversas capacidades, que incluem análises não drenadas, drenadas ou de consolidação com acoplamento completo, em estado plano de deformação ou simetria axial.

Nas análises realizadas no presente trabalho foi utilizado o elemento triangular de deformação linear (LST) para consolidação com 6 pontos nodais e 15 graus de liberdade. Conforme ilustrado na [Figura 3](#), este elemento finito possui duas incógnitas de deslocamento e uma incógnita de poro pressão nos pontos nodais dos vértices e apenas duas incógnitas de deslocamento nos pontos nodais das arestas.

Para a visualização dos resultados foi implementada no CRISP uma interface com o pré e pós processador genérico GiD (CIMNE, 2021).

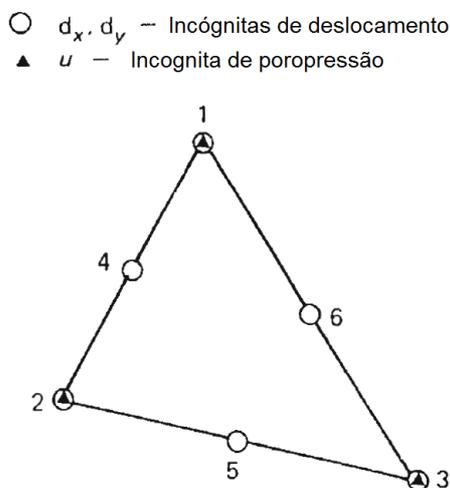


Figura 3: Elemento LST para consolidação com 6 nós e 15 graus de liberdade ([Britto e Gunn, 1987](#)).

5 MODELO DE ELEMENTOS FINITOS

A simulação foi realizada para uma condição de estado plano de deformação. Para o modelo foram adotados os seguintes parâmetros: profundidade da camada $h = 4$ m, metade da largura da faixa de carregamento $b = 4$ m, sobrecarga $f = 30$ kPa, módulo de elasticidade para condição drenada $E = 3000$ kPa, coeficiente de Poisson para condição drenada $\nu = 0,3$, coeficiente de permeabilidade $k = 1 \cdot 10^{-8}$ m/s, e peso específico da água $\gamma_w = 10$ kN/m³.

A malha e as condições de contorno mecânicas adotadas para a simulação estão representadas na Figura 4. O deslocamento horizontal é impedido na lateral esquerda do modelo. O deslocamento vertical é impedido na base do modelo. Nos primeiros 4 metros do topo, próximo da lateral esquerda é aplicada a carga f . O comprimento do modelo de elementos finitos é de quatro vezes a profundidade da camada, conforme adotado por Ghaboussi e Wilson (1973).

As condições de contorno hidráulicas do modelo são apresentadas na Figura 5. Na lateral direita, na lateral esquerda e na base do modelo foi assumida uma condição de contorno “natural”, ou seja, impermeável. No topo do modelo foi assumida uma distribuição de poro pressão nula, o que permite que existam vazões neste contorno.

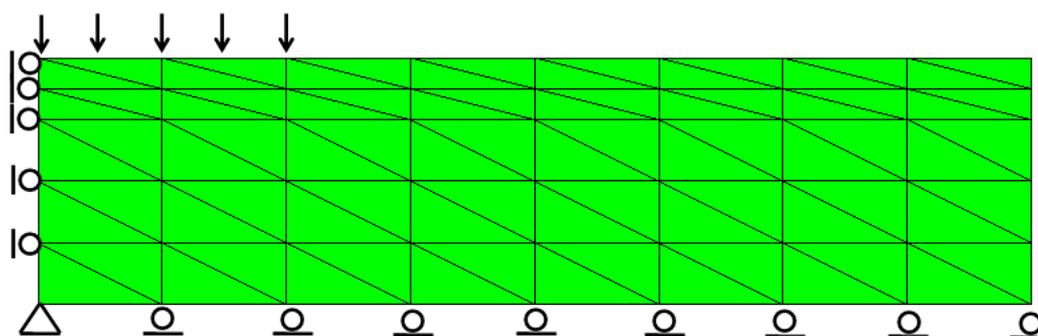


Figura 4: Malha e condições de contorno mecânicas.



Figura 5: Malha e condições de contorno hidráulicas.

6 RESULTADO DAS SIMULAÇÕES

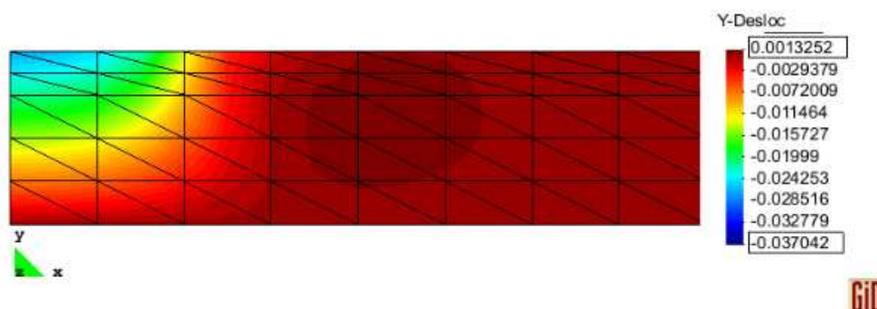
Os resultados são apresentados em termos de um tempo adimensional dado por:

$$\tau = \frac{c}{h^2} \cdot t. \quad (12)$$

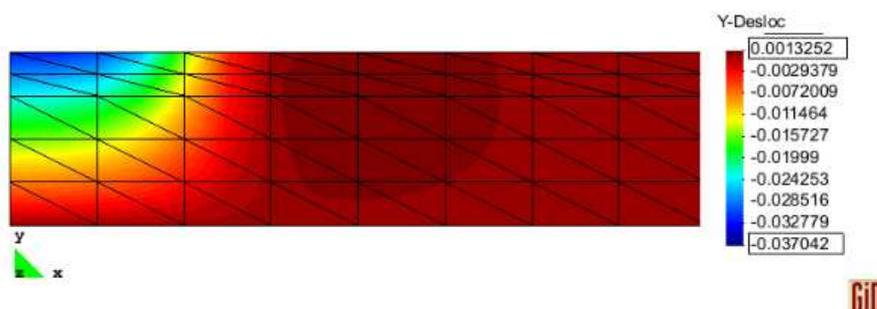
Um recalque adimensional é definido na forma:

$$\bar{w} = \frac{G}{b \cdot f} \cdot w. \quad (13)$$

Os resultados da simulação com o programa CRISP podem ser observados por meio dos contornos de deslocamento vertical ao longo do tempo representados na Figura 6. O modelo de elementos finitos mostra os recalques em toda a camada. A solução de Gibson et al. (1970) apresenta os recalques apenas para o topo da camada.



(a) $t = 1 \cdot 10^4$ s ($\tau = 0,001442$).



(b) $t = 8 \cdot 10^5$ s ($\tau = 0,1154$).



(c) $t = 5 \cdot 10^6$ s ($\tau = 0,7212$).



(d) $t = 6 \cdot 10^7$ s ($\tau = 8,6538$).

Figura 6: Contornos de deslocamento vertical ao longo da simulação.

A Figura 7 mostra os recalques no ponto central do carregamento, no topo da camada. Pode ser observado que os resultados da simulação numérica apresentam valores bastante próximos dos previstos pelas equações de Gibson et al. (1970).

O método de Gibson et al. (1970) pressupõe um recalque imediato dado por:

$$\bar{w}(0^+) = \frac{f \cdot h}{4 \cdot G} \quad (14)$$

Sendo que o recalque final é dado por:

$$\bar{w}(\infty) = \frac{\eta \cdot f \cdot h}{2 \cdot (2 \cdot \eta - 1) \cdot G} \quad (15)$$

Os valores dados pela Eq. (14) e Eq. (15) definem as assíntotas horizontais, do recalque ao longo do tempo, observadas na Figura 7.

A Tabela 1 mostra alguns resultados dos recalques no ponto central do carregamento obtidos pelo programa Python e a simulação no CRISP, de passos no tempo seleccionados. Os resultados das simulações em elementos finitos são muito próximos aos fornecidos pela solução analítica.

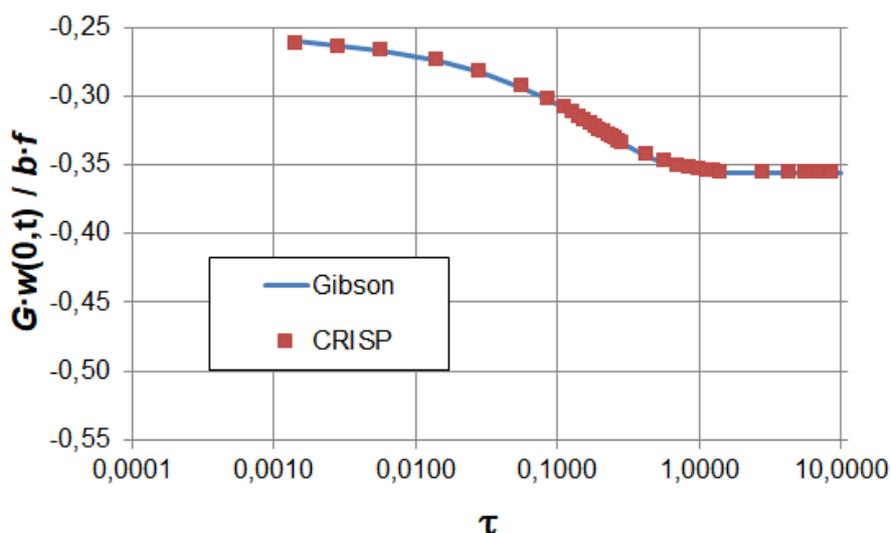


Figura 7: Recalque adimensional do centro do carregamento no topo da camada ao longo do tempo adimensional.

Tempo (10 ⁴ s)	Tempo adimensional (10 ⁻⁴)	Python Recalque (10 ⁻² m)	Python Rec. adim. (10 ⁻¹)	CRISP Rec. adim. (10 ⁻² m)	CRISP Rec. adim. (10 ⁻¹)
1	14	-2,708	-2,604	-2,730	-2,625
10	144	-2,850	-2,741	-2,848	-2,738
40	577	-3,057	-2,939	-3,051	-2,934
80	1154	-3,216	-3,092	-3,214	-3,091
100	1442	-3,276	-3,150	-3,277	-3,151
150	2163	-3,393	-3,262	-3,396	-3,265
500	7212	-3,664	-3,523	-3,648	-3,508
1000	14423	-3,702	-3,560	-3,698	-3,556
6000	86538	-3,705	-3,563	-3,704	-3,562

Tabela 1: Resultados da simulação para alguns tempos seleccionados.

7 CONCLUSÕES

O trabalho descreveu a implementação de uma solução analítica de consolidação de uma camada de solo, com um carregamento em faixa na superfície, em um programa em Python. Esta implementação permite a comparação da referida solução com simulações de elementos finitos do mesmo problema. Sendo uma boa forma de validação de códigos de elementos finitos que resolvam problemas de consolidação.

O problema do carregamento de uma camada finita de argila, com carregamento em uma faixa na superfície, foi modelado com elementos finitos triangulares de seis pontos nodais, com duas incógnitas de deslocamento e uma incógnita de poro pressão nos pontos nodais dos vértices e apenas duas incógnitas de deslocamento nos pontos nodais das arestas. Estas simulações numéricas apresentaram resultados bastante coerentes com a solução analítica. Os resultados foram obtidos com uma malha pouco refinada. Isto mostra que o elemento finito utilizado é computacionalmente robusto.

A flexibilidade do método dos elementos finitos permite facilmente a modelagem de outros problemas onde a física de acoplamento da mecânica um meio poroso com o fluxo de um fluido no mesmo está presente. Um destes problemas envolve a determinação dos recalques induzidos pela retirada de fluido do reservatório ou aquífero. Este problema deverá ser objeto de trabalhos futuros.

REFERÊNCIAS

- Bentler, D.J., *Finite element analysis of deep excavation*. PhD Dissertation. Virginia Polytechnic Institute and State University. 1998.
- Biot, M.A., General theory of three-dimensional consolidation. *Journal of Applied Physics*, 12 (2):155–164, 1941.
- Britto, A.M. e Gunn, M.J., *Critical state soil mechanics via finite elements*. John Wiley & Sons, 1987.
- Cheng, A.H.-D., *Poroelasticity*. Springer, 2016.
- CIMNE (2021) *GiD - The personal pre and post processor*. International Center for Numerical Methods in Engineering (CIMNE). Disponível em: <https://www.gidhome.com/>.
- Ding, D. e Naylor, D.J., A virtual work derivation of the Biot consolidation finite element formulation. *Engineering Computations*, 6 (2):158–162, 1989.
- Ghaboussi, J. e Wilson, E.L., Flow of compressible fluid in porous elastic media. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 5 (3):419–442, 1973.
- Gibson, R.E., Schiffman, R.L. e Pu, S.L., Plane strain and axially symmetric consolidation of a clay layer on a smooth impervious base. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 23 (4): 505–520, 1970.
- Santos, L.L., Lima, R.S., Lins, P.G.C., Simulação do processo de consolidação de solos moles pelo método dos elementos finitos. In: *II Seminário Geotécnico Bahia/Sergipe*, Cruz das Almas, 2019.