

PLANTEO Y SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE AMARRES NO LINEALES DE UNA PLATAFORMA FLOTANTE

Mario R. Escalante^{1,2}, Marta B. Rosales^{2,3} y Carlos P. Filipich^{2,4}

¹Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Concepción del Uruguay
3260, Concepción del Uruguay, Argentina
escalam@frcu.utn.edu.ar

²Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur,
8000, Bahía Blanca, Argentina

³CONICET

mrosales@criba.edu.ar

⁴Grupo de Análisis de Sistemas Mecánicos - U.T.N.-F.R.B.B.
8000, Bahía Blanca, Argentina
cfilipich@yahoo.com.ar

Key words: series de potencias, fuerte no linealidad, amarres.

Abstract. *El objetivo de este trabajo es analizar el comportamiento dinámico de una plataforma rígida flotante con amarres poco tensos (catenarias) mediante el uso de las series de potencias para el planteo del sistema de ecuaciones diferenciales gobernante, fuertemente no lineal. El caso analizado corresponde a un modelo 2D con 3 grados de libertad, q : desplazamiento horizontal (“surge”), h : desplazamiento vertical (“heave”), a : rotación (pitch). En la configuración física del modelo, el cable adopta una forma de catenaria con su extremo superior sujeto a la plataforma flotante y el extremo inferior amarrado al fondo del mar. El extremo superior del cable es forzado a seguir un movimiento incluyendo desplazamientos horizontales y verticales, los cuales son inducidos por la estructura flotante interactuando con las olas. La simulación de las funciones intervinientes en series de potencias permite obtener, a través de una adecuada inversión de dichas series, un algoritmo de recurrencia para determinar la tensión de los amarres sin truncamientos. Dichas fuerzas constituyen el aporte fuertemente no lineal en el sistema diferencial. Las ecuaciones diferenciales gobernantes del problema así obtenidas, son resueltas con rutinas estándares de integración y la respuesta del sistema es analizada para investigar diferentes tipos de fenómenos dinámicos. Se incluyen algunos ejemplos ilustrativos de la respuesta de este tipo estructural para determinadas condiciones geométricas y de fuerzas exteriores actuantes*

1 INTRODUCCIÓN

El área específica de la Ingeniería Oceánica (IO) es definida como el conjunto de principios y métodos de ingeniería aplicados al análisis, diseño y control de vehículos y artefactos que deben funcionar en un ambiente acuoso tanto oceánico como fluvial. La IO abarca una gran variedad de estructuras flotantes y subacuáticas. Entre las estructuras podemos circunscribir la clase de sistemas vinculados elásticamente al fondo oceánico. Exponentes de esta clase son : boyas, barcos tanques, pontones, plataformas semisumergibles y barcazas.

Las estructuras flotantes son ampliamente usadas en aplicaciones IO, por ejemplo, en prospección de suelos, asistencia de operaciones offshore y una amplia variedad de operaciones en puerto. Con el objetivo de lograr operaciones seguras, estos tipos de sistemas IO son anclados en posiciones fijas mediante múltiples cables que conforman un sistema de amarres. Las características fuerza-deformación de los mismos dependen de la aplicación específica, sobre todo de la inercia de la estructura y de las condiciones del medio ambiente, y definen acentuadamente los comportamientos no lineales de la dinámica del sistema IO.

El comportamiento resultante de vínculos y la interacción estructura-fluido es caracterizado por una dinámica no lineal muy compleja y variante en el tiempo.

Un sistema de Ingeniería Oceánica (IO) puede ser representado por diferentes modelos, y la complejidad de los mismos depende sobre todo de los grados de libertad (GDL) que caracterizan el movimiento y también de la magnitud relativa entre sus variables dinámicas.

La complejidad que demandan las operaciones oceánicas y el diseño creciente de una gran variedad de estos sistemas IO impone la necesidad de métodos y herramientas modernas para el análisis de estabilidad y diseños de sistemas de control. A los efectos de predecir el comportamiento de los sistemas IO durante operaciones, se establece la necesidad de contrarrestar efectos no lineales indeseados, tales como oscilaciones de alto período y comportamientos caóticos. Para tales propósitos es requerido un modelo analítico muy preciso del sistema IO, lo cual demanda un conocimiento acabado de las leyes que rigen la dinámica y de sus parámetros físicos.

En este trabajo se centra el análisis en el comportamiento dinámico de una plataforma rígida flotante con amarres poco tensos mediante el uso de las series de potencias para el planteo del sistema de ecuaciones diferenciales gobernante, fuertemente no lineal. Es un tipo especial de estructuras que en inglés se las suele denominar CALM (catenary anchor leg mooring). Se trata de una boya amarrada mediante un cierto número de cadenas poco tensas (catenarias), generalmente para uso de iluminación, portadoras de grúas o torres y también estructuras intermedias en transporte de petróleo o rompeolas.

Este tipo de sistema estructural exhibe un comportamiento complejo debido a no linealidades provenientes principalmente de la configuración geométrica en cada instante (efecto de catenaria) de los cables de amarre. La dinámica de estructuras flotantes de modelos simplificados de un grado de libertad han sido desarrollados por varios autores, por ejemplo, Esmailzadeh y Goodarzi¹, Sannasiraj *et al.*² Sarkar and Eatock Taylor³, Smith and MacFarlane⁴. En particular, los autores del primer trabajo mediante sucesivos truncados en las expansiones de Taylor obtuvieron una ecuación del tipo Duffing.

El análisis se centra en la no linealidad aportada por los amarres. Los efectos hidrodinámicos son simplificados a un par de fuerzas armónicas horizontal y vertical. En una etapa futura se incluirán otros enfoques para estas acciones.

2 DESCRIPCIÓN DEL MODELO

El caso analizado corresponde a un modelo 2D con 3 grados de libertad, q : desplazamiento horizontal (“surge”), h : desplazamiento vertical (“heave”), a : rotación (pitch). Es extensión de uno previo 2D de 1 grado de libertad desarrollado por los autores (Rosales and Filipich⁵). En la configuración física del modelo, el cable adopta una forma de catenaria con su extremo superior sujeto a la plataforma flotante y el extremo inferior amarrado al fondo del mar. El extremo superior del cable es forzado a seguir un movimiento incluyendo desplazamientos horizontales y verticales, los cuales son inducidos por la estructura flotante interactuando con las olas.

En la Figura 1 se describe el modelo analizado en su posición de equilibrio. Aunque este es un modelo simplificado, se hace especial atención en la no linealidad que surge del cambio de la geometría de los cables. El método de las series de potencias permite modelar completamente tal no linealidad sin truncados previos.

Estudios futuros incluirán otros elementos del modelo físico con el objeto de lograr una mejor representación de la estructura, tal como las acciones hidrodinámicas sobre los cables. No obstante, la metodología propuesta aquí puede ser útil para determinar completamente la no linealidad proveniente de los amarres.

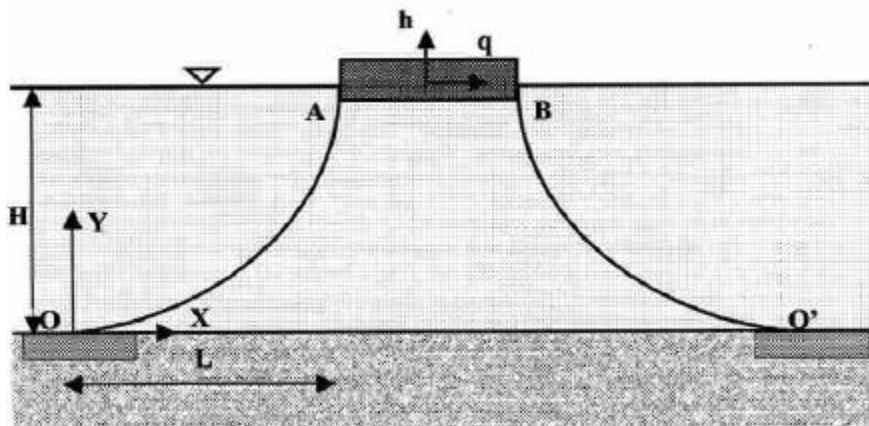


Figura 1: Configuración geométrica del modelo del sistema CALM de dos dimensiones

3 PLANTEO DE LAS ECUACIONES GOBERNANTES

El principio básico de esta metodología ha sido la aplicación de series algebraicas (series

de potencias) que conduce a algoritmos simples de recurrencia. La presente metodología aparece como una alternativa a los métodos aproximados para resolver ecuaciones no lineales (escalas múltiples, balance armónico, perturbación, etc) y de herramientas de integración numérica como Runge-Kutta, Newmark, diferencia central, etc. El método asegura la exactitud teórica de la respuesta y la precisión arbitraria de los resultados. Todas las funciones del tiempo que aparecen en el sistema gobernante son expandidas en series de potencia (Filipich and Rosales⁶, Filipich *et al.*⁷, Rosales *et al.*⁸). Obviamente se acepta que las funciones existen y son analíticas. En este trabajo esta herramienta de series de potencias es utilizada para el planteo de la ecuación diferencial gobernante a través de una conveniente inversión de series.

Las ecuaciones del movimiento son obtenidas a partir de la formulación clásica, tienen la forma de un sistema acoplado de ecuaciones diferenciales no lineales cuya expresión general es

$$\ddot{X} + D(\dot{X}) + R(X) = F(X, \dot{X}, \ddot{X}, t) \quad (1)$$

donde $R(X)$ y $D(\dot{X})$ son los vectores del sistema de fuerzas de recuperación del resorte no lineal y el amortiguamiento respectivamente. $F(X, \dot{X}, \ddot{X}, t)$ es el vector fuerza dependiente del tiempo que excita el sistema, y $X = (q, h, \mathbf{a})$ es el vector desplazamiento del sistema que representa los movimiento surge (q :desplazamiento horizontal) , heave(h :desplazamiento vertical) y pitch (\mathbf{a} :rotación en el plano $q-h$).

Las ecuaciones de equilibrio que gobiernan el sistema son:

$$\begin{cases} \sum F_x = ma_x \\ \sum F_y = ma_y \\ \sum M_G = I\omega_G \end{cases} \quad (2)$$

O bien

$$\begin{cases} m\ddot{q}(t) + C_{Dx}\dot{q}(t) + (S_{Ax}^l - S_{Bx}^r) = F_x(t) & (a) \\ m\ddot{h}(t) + C_{Dy}\dot{h}(t) + (S_{Ay}^l + S_{By}^r) = F_y(t) & (b) \\ I\ddot{\mathbf{a}}(t) + C_{Da}\dot{\mathbf{a}}(t) + (S_{Ax}^l + S_{Bx}^r)d \sin \mathbf{a}(t) = M(t) & (c) \end{cases} \quad (3)$$

donde m es la masa de la plataforma, C_{Dx} , C_{Dy} y C_{Da} son los coeficientes que representan el amortiguamiento del sistema correspondientes a cada grado de libertad, S es la tensión en la cadena de amarre en la que los subíndices indican la componente horizontal (x) o vertical (y) en los puntos A y B respectivamente; y el superíndice indica el amarre derecho (r) o izquierdo (l); las fuerzas dinámicas externas que excitan el sistema, se representan mediante sus componentes horizontal y vertical F_x y F_y respectivamente; y d es la mitad de la longitud de la plataforma.

Las expresiones de las componentes horizontales de las tensiones de los amarres en un instante t , quedan determinadas por medio de la Segunda Ley de Newton mediante

$$\begin{cases} S_{Ax} = S_{Ox}^l + m_c \ddot{x}_c^l & (a) \\ S_{Bx} = S_{Ox}^r - m_c \ddot{x}_c^r & (b) \end{cases} \quad (4)$$

en la que m_c es la masa de la cadena, $S_{Ox}^{l,r}$ son las tensiones en la base del amarre y $\ddot{x}_c^{l,r}$ son las aceleraciones de la masa localizada en el centro de gravedad de cada cadena.

Luego, siendo $S_{Ox}^l = S_{Ox}^r$ resulta

$$S_{Ax} - S_{Bx} = m_c (\ddot{x}_c^l + \ddot{x}_c^r) \quad (5)$$

Ahora bien, si l_c es la longitud de la cadena y denominamos x_c es la abscisa del centro de gravedad del cable, esta última estará determinada en su configuración de equilibrio por la ecuación

$$x_c = L - \frac{\mathbf{b}_0}{l_c} H \quad (6)$$

siendo $\mathbf{b}_0 = S_o / \mathbf{r}$, y \mathbf{r} el peso específico de los amarres. En el instante t , considerando el signo superior para la cadena izquierda (l) y el inferior para la cadena derecha (r), la abscisa será

$$x_c^{l,r}(t) = (L \pm q(t) + d(1 - \cos \mathbf{a}(t)) - \frac{\mathbf{b}(t)}{l_c} (H + h(t) \mp d \sin \mathbf{a}(t))) \quad (7)$$

y su aceleración

$$\begin{aligned} \ddot{x}_c^{l,r} = & \left(\ddot{q} \mp d (\dot{\mathbf{a}}(t))^2 \cos \mathbf{a}(t) \mp d \ddot{\mathbf{a}}(t) \sin \mathbf{a}(t) \right) - \\ & - \left(\frac{\ddot{h}(t) \mp d (\dot{\mathbf{a}}(t))^2 \sin \mathbf{a}(t) \mp d \ddot{\mathbf{a}}(t) \cos \mathbf{a}(t)}{l_c} \right) \mathbf{b}(t) - \\ & - 2 \left(\frac{\dot{h}(t) \mp d \dot{\mathbf{a}}(t) \cos \mathbf{a}(t)}{l_c} \right) \dot{\mathbf{b}}(t) - \frac{H + h(t) \mp d \sin \mathbf{a}(t)}{l_c} \ddot{\mathbf{b}}(t) \end{aligned} \quad (8)$$

Teniendo en cuenta que

$$S_{Ay} = S_{By} = \mathbf{r} l_c \quad (9)$$

y siendo

$$S_{Ax} - S_{Bx} = 2m_c \left(\ddot{q}(t) - \frac{1}{l_c} \left[\ddot{h}(t) \mathbf{b}(t) - 2\dot{h}(t) \dot{\mathbf{b}}(t) - (H + h(t)) \ddot{\mathbf{b}}(t) \right] \right) \quad (10)$$

el sistema diferencial (3) queda dado por las siguientes ecuaciones

$$m\ddot{q}(t) + C_{Dx} \dot{q}(t) + 2m_c \left(\ddot{q}(t) - \frac{1}{l_c} \left[\ddot{h}(t) \mathbf{b}(t) - 2\dot{h}(t) \dot{\mathbf{b}}(t) - (H + h(t)) \ddot{\mathbf{b}}(t) \right] \right) = F_x(t) \quad (11)$$

$$m\ddot{h}(t) + C_{Dy} \dot{h}(t) + 2\mathbf{r} l_c = F_y(t) \quad (12)$$

$$I\ddot{\mathbf{a}}(t) + C_{Da}\dot{\mathbf{a}}(t) + m \left[\begin{array}{l} \left(-2d(\dot{\mathbf{a}}(t))^2 \cos \mathbf{a}(t) - 2d\ddot{\mathbf{a}}(t) \sin \mathbf{a}(t) \right) - \\ \left(\frac{-2d(\dot{\mathbf{a}}(t))^2 \sin \mathbf{a}(t) - 2d\ddot{\mathbf{a}}(t) \cos \mathbf{a}(t)}{l_c} \right) \mathbf{b}(t) - \\ -2 \left(\frac{-2d\dot{\mathbf{a}}(t) \cos \mathbf{a}(t)}{l_c} \right) \dot{\mathbf{b}}(t) - \frac{-2d \sin \mathbf{a}(t)}{l_c} \ddot{\mathbf{b}}(t) \end{array} \right] d \sin \mathbf{a}(t) = M(t) \quad (13)$$

3.1 Catenarias de amarre: Expresión no truncada para tensión en las cadenas

Inicialmente la geometría de las cadenas está gobernada por la siguiente relación no lineal:

$$Y = \mathbf{b}_0 \left[\text{Ch} \left(\frac{X}{\mathbf{b}_0} \right) - 1 \right] \quad (14)$$

donde $\mathbf{b}_0 = S_0 / \mathbf{r}$, S_0 es la tensión en el punto O u O' del cable, y \mathbf{r} es su peso específico. Por simplicidad, suponemos que el cable se mantiene con la tangente horizontal en el punto de amarre. En particular, en el punto A,

$$H = \mathbf{b}_0 \left[\text{Ch} \left(\frac{L}{\mathbf{b}_0} \right) - 1 \right] \quad (15)$$

en el tiempo inicial $t = t_0$. Después de algún tiempo t , el punto $A|_{t_0}$ (respectivamente $B|_{t_0}$) se moverá a una nueva posición dada por:

$$H + h(t) \mp d \sin \mathbf{a}(t) = \mathbf{b}^{l,r} \left[\text{Ch} \left(\frac{L \pm q(t) + d(1 - \cos \mathbf{a}(t))}{\mathbf{b}^{l,r}} \right) - 1 \right] \quad (16)$$

donde $\mathbf{b}^{l,r} = S_{Ax}^{l,r} / \mathbf{r}$ y $S_{Ax}^{l,r}$ es la componente horizontal de la tensión en el cable de amarre en el instante t . El signo más corresponde a la cadena izquierda y el signo menos a la derecha. Introduciendo la función $\mathbf{q}(q, h, \mathbf{a})$ para denominar al argumento de la función hiperbólica de la ecuación (16), esto es:

$$\mathbf{q}^{l,r} = \frac{L \pm q(t) + d(1 - \cos \mathbf{a}(t))}{\mathbf{b}^{l,r}} \quad (17)$$

la ecuación (16) queda

$$H + h(t) \mp d \sin \mathbf{a}(t) = \mathbf{b}^{l,r} \left[\text{Ch}(\mathbf{q}) - 1 \right] \quad (18)$$

De (17) y (18) surge

$$\frac{H + h(t) \mp d \sin \mathbf{a}(t)}{L \pm q(t) + d(1 - \cos \mathbf{a}(t))} = \frac{\text{Ch} \mathbf{q} - 1}{\mathbf{q}^{l,r}} \quad (19)$$

Denominando $f(\mathbf{q})$ al lado derecho de la ecuación anterior y reemplazando la función coseno hiperbólico mediante su serie de Taylor se tiene que

$$f(\mathbf{q}) = \frac{\text{Ch}\mathbf{q} - 1}{\mathbf{q}} = \sum_l \mathbf{g}_l \mathbf{q}^l \quad \text{con} \quad \mathbf{g}_l = \frac{1}{(l+1)!} \quad (l=1,3,5,\dots) \quad (20)$$

Luego, expandiendo a su vez \mathbf{q}^l en función de q, h y \mathbf{a} , se tiene que

$$\mathbf{q}^l = \sum_i \sum_j \sum_k T_{ijk}^{(l)} q^i h^j \mathbf{a}^k \quad (21)$$

con lo cual

$$f[\mathbf{q}(q, h, \mathbf{a})] = \tilde{f}(q, h, \mathbf{a}) = \sum_l \mathbf{g}_l \sum_i \sum_j \sum_k T_{ijk}^{(l)} q^i h^j \mathbf{a}^k = \sum_i \sum_j \sum_k \left(\sum_l \mathbf{g}_l T_{ijk}^{(l)} \right) q^i h^j \mathbf{a}^k \quad (22)$$

O bien

$$\tilde{f}(q, h, \mathbf{a}) = \sum_i \sum_j \sum_k F_{ijk} q^i h^j \mathbf{a}^k \quad \text{con} \quad F_{ijk} = \sum_{l=1,3,5} \mathbf{g}_l T_{ijk}^{(l)} \quad (23)$$

Expandimos el miembro izquierdo de la ecuación (19) como sigue:

$$\frac{H + h(t) \mp d \text{sen } \mathbf{a}(t)}{L \pm q(t) + d(1 - \cos \mathbf{a}(t))} = \sum_i \sum_j \sum_k A_{ijk}^{l,r} q^i h^j \mathbf{a}^k \quad (24)$$

en donde los coeficientes A_{ijk} no son conocidos, entonces para determinarlos hacemos lo expandimos las expresiones:

$$H + h(t) \mp d \text{sen } \mathbf{a}(t) = \sum_i \sum_j \sum_k \tilde{A}_{ijk}^{l,r} q^i h^j \mathbf{a}^k \quad (25)$$

y

$$L \pm q(t) + d(1 - \cos \mathbf{a}(t)) = \sum_i \sum_j \sum_k \tilde{B}_{ijk}^{l,r} q^i h^j \mathbf{a}^k \quad (26)$$

Luego, de (24) se tiene (omitiendo l, r)

$$\sum_i \sum_j \sum_k \tilde{A}_{ijk} q^i h^j \mathbf{a}^k = \left(\sum_i \sum_j \sum_k A_{ijk} q^i h^j \mathbf{a}^k \right) \left(\sum_i \sum_j \sum_k \tilde{B}_{ijk} q^i h^j \mathbf{a}^k \right) \quad (27)$$

de la cual surge

$$\tilde{A}_{ijk} = \sum_m \sum_n \sum_p A_{mnp} \tilde{B}_{(i-m)(j-n)(k-p)} \quad (28)$$

De esta última ecuación se obtienen los coeficientes

$$A_{ijk} = \frac{1}{\tilde{B}_{000}} \left[\tilde{A}_{ijk} - \sum_{m=0}^{i-1} \sum_{n=0}^{j-1} \sum_{p=0}^{k-1} A_{mnp} \tilde{B}_{(m-i)(n-j)(k-p)} - \sum_{n=0}^{j-1} \sum_{p=0}^{k-1} A_{inp} \tilde{B}_{0(j-n)(k-p)} \right. \\ \left. - \sum_m \sum_p A_{mjp} \tilde{B}_{(i-m)0(k-p)} - \sum_m \sum_n A_{mnk} \tilde{B}_{(i-m)(j-n)0} - \sum_{m=0}^{i-1} A_{mjk} \tilde{B}_{(i-m)00} \right. \\ \left. - \sum_{n=0}^{j-1} A_{ink} \tilde{B}_{0(j-n)0} - \sum_{p=0}^{k-1} A_{ijp} \tilde{B}_{00(k-p)} \right] \quad (29)$$

De (23) y (24) surge que

$$F_{ijk} = A_{ijk} \quad (30)$$

Por otra parte,

$$\mathbf{q}^{l+1} = \mathbf{q}^l \mathbf{q} \quad (31)$$

$$T_{ijk}^{(l+1)} = \sum_{m=0}^i \sum_{n=0}^j \sum_{p=0}^k T_{mnp}^{(l)} T_{(i-m)(j-n)(k-p)}^{(1)} \quad (32)$$

$$l = 1, 2, 3 \dots \quad T_{ijk}^{(0)} = \mathbf{d}_{0i} \mathbf{d}_{0j} \mathbf{d}_{0k}$$

$$\mathbf{g}_1 T_{ijk}^{(1)} + \sum_{l=3,5,\dots} \mathbf{g}_l T_{ijk}^{(l)} = F_{ijk} = A_{ijk} \quad (33)$$

de donde

$$T_{ijk}^{(1)} = \frac{A_{ijk} - \sum_{l=3,5,\dots} \mathbf{g}_l T_{ijk}^{(l)}}{\mathbf{g}_1} ; \quad (34)$$

siendo, de (20), $\mathbf{g}_1 = 1/2$.

De (17) se tiene

$$\mathbf{b}^{l,r} \mathbf{q}^{l,r} = L \pm q(t) + d(1 - \cos \mathbf{a}(t)) \quad (35)$$

Expandiendo \mathbf{b} en funciones de las variables q, h y \mathbf{a}

$$\mathbf{b} = \sum_i \sum_j \sum_k B_{ijk} q^i h^j \mathbf{a}^k \quad (36)$$

Y reemplazando (36), (21) y (26) en (35) se tiene

$$\left(\sum_i \sum_j \sum_k T_{ijk}^{(1)} q^i h^j \mathbf{a}^k \right) \left(\sum_i \sum_j \sum_k B_{ijk} q^i h^j \mathbf{a}^k \right) = \sum_i \sum_j \sum_k \tilde{B}_{ijk} q^i h^j \mathbf{a}^k \quad (37)$$

De la cual se pueden obtener los coeficientes

$$B_{ijk} = \frac{1}{T_{000}^{(1)}} \left[\tilde{B}_{ijk} - \sum_{m=0}^{i-1} \sum_{n=0}^{j-1} \sum_{p=0}^{k-1} B_{mnp} T_{(m-i)(n-j)(k-p)}^{(1)} - \sum_{n=0}^{j-1} \sum_{p=0}^{k-1} B_{inp} T_{0(j-n)(k-p)}^{(1)} \right. \\ \left. - \sum_m \sum_p B_{mjp} T_{(i-m)0(k-p)}^{(1)} - \sum_m \sum_n B_{mnk} T_{(i-m)(j-n)0}^{(1)} - \sum_{m=0}^{i-1} B_{mjk} T_{(i-m)00}^{(1)} \right. \\ \left. - \sum_{n=0}^{j-1} B_{ink} T_{0(j-n)0}^{(1)} - \sum_{p=0}^{k-1} B_{ijp} T_{00(k-p)}^{(1)} \right] \quad (38)$$

Finalmente, obtenidos los coeficientes B_{ijk} la función $\mathbf{b}(q, h, \mathbf{a})$ queda perfectamente determinada y con ella, la tensión de la cadenas que es directamente proporcional a esta función.

Una vez planteada la función $\mathbf{b}(q, h, \mathbf{a})$, es posible reconstruir las ecuaciones diferenciales (3). La solución será hallada utilizando la rutina Runge-Kutta para encontrar las funciones $q(t)$, $h(t)$ y $\mathbf{a}(t)$.

4 EJEMPLOS NUMÉRICOS

La performance del algoritmo desarrollado se mostrará a través de un ejemplo numérico. Una plataforma rígida se modela en el plano con vínculos elásticos constituidos por dos amarres catenarios (ver Figura 1). Se asumen los siguientes valores: la dimensión horizontal $L = 40$ m, la dimensión vertical $H = 20$ m, el coeficiente de amortiguamiento $C_d = 100$ N/m, la masa de la plataforma $m = 1000$ kg, la densidad de los amarres $r = 50$ N/m.

En el trabajo de Rosales y Filipich⁵ se resuelve dicho sistema con el algoritmo para los coeficientes de la serie que representa a la tensión de los amarres. Dado que en ese trabajo se excluyó el grado de libertad de rotación, dicha función dependía de las variables q y h solamente con coeficientes B_{ij} . O sea que ese algoritmo es similar al presente para el caso particular que la plataforma sea muy poco ancha. Además se supuso al movimiento vertical acoplado con una función armónica cosenoidal.

Se presenta primero un caso particular simplificado. Si el ancho de la plataforma es pequeño, puede desprejarse el grado de libertad de rotación. Además, como suele hacerse en un primer análisis, puede suponerse que el grado de libertad vertical (h , "heave") se acopla con un movimiento armónico de olas a través de una función $h(t) = h_0 \cos \omega t$, adoptándose $h_0 = 1.5$ m y $\omega = 0.25$ rad/s. La fuerza de excitación horizontal de las olas está dada por $F(t) = F_0 \sin \omega_f t$, $F_0 = 0.0005 H m_{eq} \omega^2$, $m_{eq} = m + 2m_c$, donde m_c es la masa del amarre.

En la Figura 2 se reportan los diagramas de fase y trayectorias de una plataforma con dos frecuencias de excitación horizontal. La solución de la ecuación diferencial fuertemente no lineal fue resuelta utilizando la herramienta de series de potencias en el tiempo⁵. Tal solución de la ecuación diferencial se presentó como una alternativa a los esquemas de integración estándar como Runge-Kutta. En el presente trabajo se utilizaron las series de potencias para el planteo de la ecuación diferencial no lineal y una vez hallados los B_{ijk} que contribuyen al término no lineal, se resuelve la ecuación con una rutina Runge-Kutta. En este ejemplo se tomaron 20 términos en las series para hallar los coeficientes. En la Figura 3 se reporta la solución hallada por las dos alternativas, la solución de la ED no lineal con series de potencias^{5,8} y la propuesta en este trabajo con una rutina Runge-Kutta. Se observa la total concordancia de los resultados.

En los soluciones halladas con las series de potencias se utilizó un intervalo de tiempo de $T = 5$ seg. El tiempo total de experimento fue tomado $T = 5000$ seg.

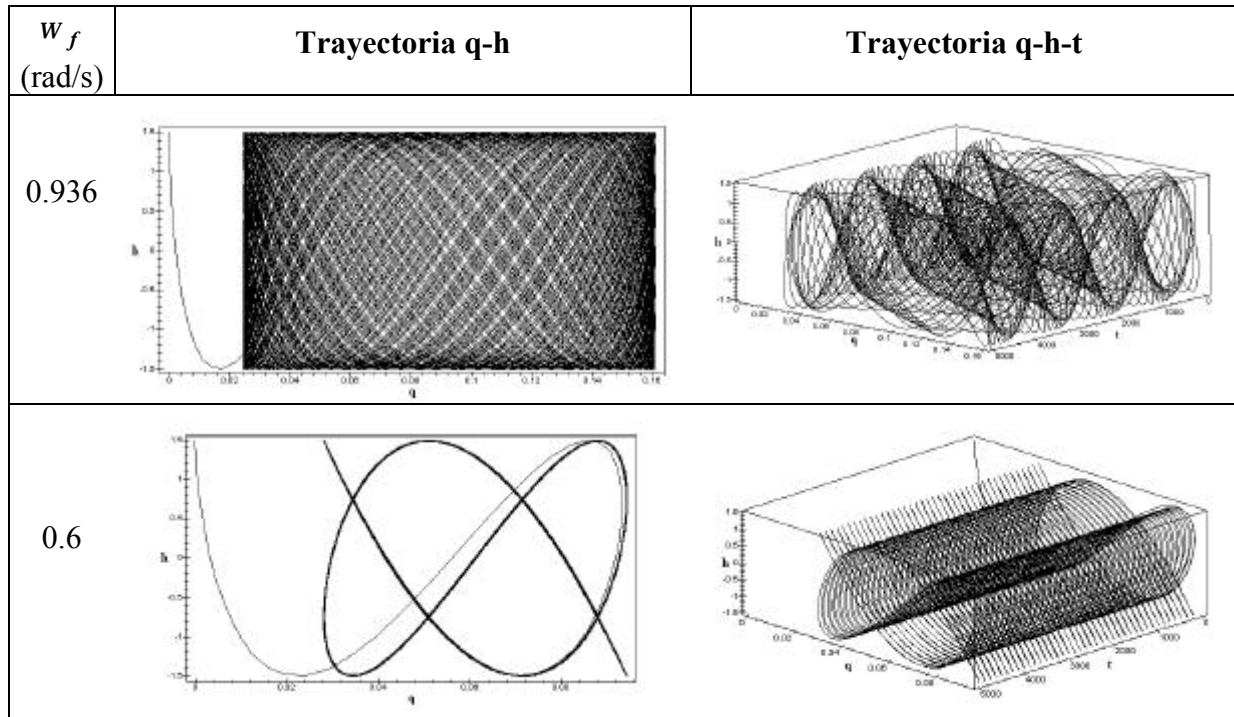


Figura 2. Trayectorias q-h y q-h-t para una plataforma de poco ancho y desplazamiento vertical acoplado con un movimiento armónico de las olas. w_f es la frecuencia de la carga armónica horizontal.

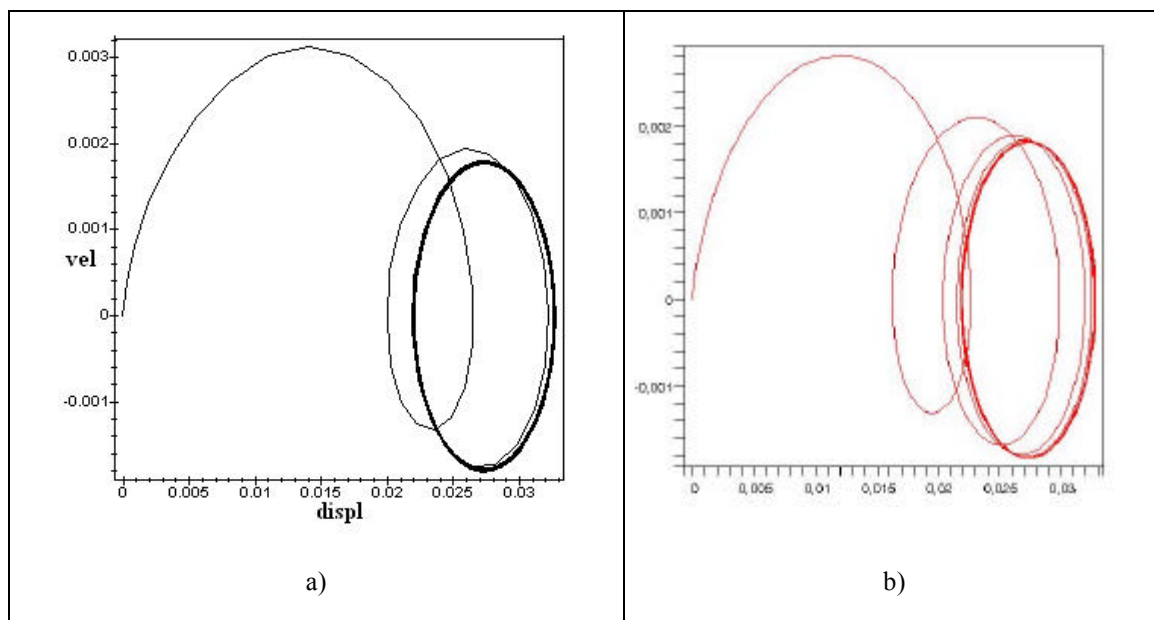


Figura 3. Diagramas de fase del desplazamiento vertical. a) Solución de la ED no lineal con series de potencias⁵. b) Solución de la ED no lineal con Runge-Kutta. $w_f = 1.344$ rad/s.

5 CONCLUSIONES

El planteo de una ecuación de movimiento fuertemente no lineal fue abordado a través de un uso sistemático de series de potencias. Se estudió el caso de una plataforma flotante de dos dimensiones con amarres catenarios y tres grados de libertad en el plano. El planteo de la fuerte no linealidad de los amarres dada por la geometría catenaria es resuelta a través de la inversión de series algebraicas. El algoritmo concluye con la obtención de los coeficientes B_{ijk} que por medio de la expresión (36) permiten calcular la tensión en los amarres y así el término no lineal de la ecuación gobernante. Esta metodología permite la consideración de la no linealidad sin truncados previos. Es frecuente que para obtener la ecuación diferencial o sistema gobernante se realicen truncados de los términos de mayor orden para obtener así una ecuación aproximada. Sin embargo este procedimiento puede modificar aún cualitativamente los resultados.

Se presentaron resultados de casos particulares para comparar con algoritmos más simplificados hallados previamente por los autores. El caso general está siendo resuelto a la fecha de la elaboración de este documento y serán presentados durante el Congreso MECOM 2005.

6 REFERENCES

- [1] E. Esmailzadeh and A. Goodarzi, A., "Stability analysis of a CALM floating offshore structure," *Int. J. of Nonlinear Mech*, **36**, 917-926 (2001).
- [2] S. A. Sannasiraj, V. Sundar and R. Sundaravadivelu. "Mooring forces and motion response of pontoon-type floating breakwaters". *Ocean Engng* **26**, 27-48, (1998).
- [3] A. Sarkar and R. Eatock Taylor. "Effects of mooring line drag damping on response statistics of vessels excited by first- and second-order wave forces". *Ocean Engng* **27**, 667-686, (2000).
- [4] R. J. Smith and C.J. MacFarlane. "Statics of a three component mooring line". *Ocean Engng* **28**, 899-914, (2001).
- [5] M.B. Rosales and C.P. Filipich, "Full modelling of the mooring nonlinearity in a two-dimensional floating structure", *Int. J. Nonlinear Mech.* (en prensa) (2005).
- [6] C.P. Filipich and M.B. Rosales, "A recurrence solution of strongly non-linear systems," In *Developments in Theoretical and Applied Mechanics*, XXI, 141-149. Eds. A.J. Kassab, D.W. Nicholson and I. Ionescu. Rivercross Publishing, Inc. Orlando. Proceedings, 21st. Southeastern Conference on Theoretical and Applied Mechanics (SECTAM XXI), Orlando, U.S.A (2002)
- [7] C.P. Filipich, M.B Rosales and F. Buezas, "Some nonlinear mechanical problems solved with analytical solutions," *International Journal of Latin American Applied Research* **34**(2),105-123,(2004).
- [8] M. Rosales, C. Filipich, and M. Escalante. "Dinámica de una estructura flotante amarrada:

modelado de la no linealidad mediante recurrencias algebraicas”. In M.B. Rosales, V.H. Cortínez, and D.V. Bambill, editors, *Mecánica Computacional*, volume XXII, Bahía Blanca, Argentina, (November 2003). XIII Congreso Sobre Métodos Numéricos y sus Aplicaciones (ENIEF 2003), Asociación Argentina de Mecánica Computacional (AMCA).