

VIBRACIONES TRANSVERSALES Y PANDEO EN PLACAS DELGADAS FUNCIONALMENTE GRADUADAS

TRANSVERSE VIBRATIONS AND BUCKLING ANALYSIS OF FUNCTIONALLY GRADED THIN PLATES

Gonzalo J. Gilardi^a y Daniel H. Felix^a

^a*Departamento de Ingeniería, Instituto de Ingeniería de la UNS (IIUNS), Universidad Nacional del Sur,
Avda. Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina, gonzalo.gilardi@uns.edu.ar, dhfelix@uns.edu.ar,
<http://www.uns.edu.ar>*

Palabras clave: placas, materiales funcionalmente graduados, vibración libre, pandeo.

Resumen. En este trabajo se estudia el problema de inestabilidad de placas delgadas constituidas por materiales funcionalmente graduados (FGM, por sus siglas en inglés). También se obtienen los coeficientes de frecuencia de estas placas bajo distintos estados de cargas aplicados en su plano geométrico medio. Se considera que las propiedades del material FG constituyente varían en forma continua a lo largo de su espesor, siguiendo una ley de variación potencial simétrica o asimétrica. Se analizan diferentes casos particulares del modelo propuesto, para placas rectangulares y para distintas condiciones de borde. Con el objeto de validar los resultados, algunos de ellos se contrastan con los hallados en la literatura técnico-científica disponible. Para la resolución de las ecuaciones gobernantes del sistema en estudio se hace uso del método de Rayleigh-Ritz.

Keywords: plates, functionally graded material, free vibration, buckling.

Abstract. In this work, the problem of instability of thin plates constituted by functionally graded materials (FGM) is studied. The frequency coefficients of these plates are also obtained under different load states applied in their mean geometric plane. It is considered that the properties of the constituent FG material vary continuously throughout its thickness, following a law of symmetric or asymmetric potential variation. Different particular cases of the proposed model are analyzed, for rectangular plates and for different edge conditions. In order to validate the results, some of them are contrasted with those found in the available technical-scientific literature. For the resolution of the governing equations of the system under study, the Rayleigh-Ritz method is used.

1. INTRODUCCIÓN

Los materiales funcionalmente graduados, son frecuentemente identificados en la literatura técnico-científica por su sigla en inglés FGM, [Quintana et al. \(2019\)](#). Los mismos pueden considerarse como una evolución de los materiales compuestos tradicionales, que se diferencian por poseer una composición de dos o más materiales con propiedades mecánicas que varían gradualmente a lo largo de una o más dimensiones de la estructura. Fueron propuestos inicialmente en 1984, por científicos japoneses que buscaban obtener un material que actuara como barrera térmica, sin desmerecer a su vez el resto de las propiedades mecánicas deseables, [Koi-zumi \(1997\)](#).

El uso de estos nuevos materiales requirió a su vez, la necesidad de desarrollar y/o adaptar los algoritmos de cálculo existentes para materiales homogéneos, de manera tal que tuviesen en cuenta estas nuevas características, con el fin de obtener resultados más precisos y confiables.

En el caso de placas delgadas, se destacan principalmente los trabajos sobre materiales compuestos, cuyas propiedades varían en el espesor de la placa. Pueden citarse, a modo de ejemplo, las contribuciones de [Cheng y Batra \(2000\)](#), [Pradhan y Chakraverty \(2015\)](#) que analizaron el comportamiento estático; [Birman \(1995\)](#), [Mohammadi et al. \(2010\)](#), quienes estudiaron el problema de pandeo de placas FG; [Zhao et al. \(2009\)](#), [Chakraverty y Pradhan \(2014\)](#) y [Quintana et al. \(2019\)](#), que analizaron las vibraciones transversales de dicho tipo de placas.

Siguiendo dicha línea de investigación, con los algoritmos desarrollados en el presente trabajo, basados en el método de Rayleigh-Ritz, se determinan para diferentes configuraciones del modelo, los valores de la carga crítica correspondiente al primer modo de pandeo y en algunos casos se analizó cómo es afectado el coeficiente fundamental o del primer modo de vibración, por el incremento progresivo de los esfuerzos en el plano, hasta llegar a la inestabilidad de la placa.

Los modelos propuestos se definieron, considerando diferentes condiciones de contorno de la placa, diferentes leyes de variación de las propiedades mecánicas de los materiales componentes a lo largo del espesor de la misma y distintas configuraciones de esfuerzos en el plano.

Algunos de los resultados obtenidos, fueron contrastados con los presentes en la literatura técnico-científica disponible.

2. CARACTERÍSTICAS DEL MODELO

En la Fig. 1, se presenta una placa delgada rectangular de largo a , ancho b y espesor constante h . La placa está constituida por material FG, cuyas propiedades varían únicamente en la dirección de su espesor, como muestran cualitativamente las Figs. 1b y 1c.

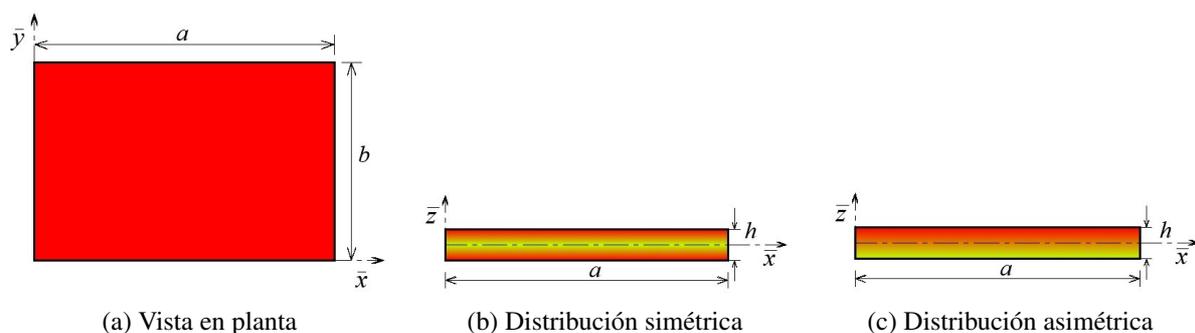


Figura 1: Placa FG con dos leyes diferentes de distribución del material en el espesor.

Para el estudio, se utiliza un sistema de coordenadas cartesianas $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$. Los ejes \bar{x} e \bar{y} coinciden con el plano medio geométrico de la placa, y el eje \bar{z} es normal a dicha superficie. Se considera que la densidad $\rho = \rho(\bar{z})$ del material y el módulo de Young $E = E(\bar{z})$ pueden variar con distintas leyes de distribución y que el coeficiente de Poisson ν permanece constante a lo largo del espesor, por ende, el material FG en la placa se deforma uniformemente en su plano.

Se proponen dos leyes de variación diferentes de las propiedades mecánicas del material en el espesor de la placa, una simétrica y una antisimétrica, (Figs. 1b y 1c). Si se asumen válidas las hipótesis de Kirchhoff, las constantes de rigidez se pueden obtener a partir de las expresiones de la teoría clásica de lámina isótropa, Reddy (2003). Se tiene entonces:

$$Q_{11} = Q_{22} = \frac{E(\bar{z})}{1 - \nu^2}; \quad Q_{12} = Q_{21} = \frac{\nu E(\bar{z})}{1 - \nu^2}; \quad Q_{66} = \frac{E(\bar{z})}{2(1 + \nu)}. \quad (1)$$

$$D_{11}^{FG} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{11} \bar{z}^2 d\bar{z}; \quad D_{12}^{FG} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{12} \bar{z}^2 d\bar{z}; \quad D_{66}^{FG} = \int_{-h/2}^{h/2} Q_{66} \bar{z}^2 d\bar{z}. \quad (2)$$

en donde las componentes Q_{ij} son las rigideces reducidas transformadas para un estado plano de tensiones y las componentes D_{ij}^{FG} las rigideces flexionales y de acoplamiento de la placa FG.

De la Ec. (2) se desprenden las siguientes relaciones de isotropía: $D_{12}^{FG} = \nu D_{11}^{FG}$ y $D_{66}^{FG} = 0,5(1 - \nu)D_{11}^{FG}$. El coeficiente inercial I_o se obtiene integrando en el espesor h , la densidad ρ del material:

$$I_o = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(\bar{z}) d\bar{z} \quad (3)$$

La Fig. 1b, corresponde a una ley de variación potencial simétrica, Thang y Lee (2018):

$$R(\bar{z}) = \begin{cases} R_c + (R_m - R_c)(1 + 2\bar{z}/h)^k & \text{si } -h/2 \leq \bar{z} \leq 0, k \geq 0 \\ R_c + (R_m - R_c)(1 - 2\bar{z}/h)^k & \text{si } 0 \leq \bar{z} \leq h/2, k \geq 0 \end{cases} \quad (4)$$

R_c y R_m son los valores de las propiedades de cada uno de los materiales, cerámico y metal respectivamente, que conforman la placa FG. Mientras que k , es el parámetro de heterogeneidad del material, el cual establece las fracciones de volumen de estos materiales en la placa.

De acuerdo con esta distribución, las superficies inferior $\bar{z} = -h/2$ y superior $\bar{z} = h/2$ de la placa FG son de material cerámico puro, y la superficie central $\bar{z} = 0$ es de metal puro.

Al considerar la ley de variación de la Ec. (4) e integrar en el espesor de la placa las Ecs. (2) y (3), se llega a:

$$D_{11}^{FG} = \frac{h^3}{12(1 - \nu^2)} \left(E_m + \frac{6(E_c - E_m)}{6 + 11k + 6k^2 + k^3} \right) \quad (5)$$

$$I_o = h \left(\rho_m + \frac{\rho_c - \rho_m}{k + 1} \right) \quad (6)$$

Por otra parte, la Fig. 1c corresponde a una ley de variación asimétrica. La distribución de las propiedades FG que se emplea, es la propuesta por Chakraverty y Pradhan (2014):

$$R(\bar{z}) = R_c + (R_m - R_c)(0,5 + \bar{z}/h)^k \quad \text{con } -h/2 \leq \bar{z} \leq h/2 \text{ y } k \geq 0 \quad (7)$$

Las distribuciones asimétricas de las propiedades del material FG generan en la placa un efecto de acoplamiento entre las deformaciones en el plano y las debidas a la flexión Abrate

(2008). Sin embargo, si se utiliza el concepto de superficie física neutra en el planteo del funcional energético, este efecto se puede ignorar. Kumar et al. (2018) proponen seleccionar un plano de referencia \bar{z}_0 distinto al plano medio geométrico de la placa, el cual se obtiene a través de la siguiente expresión:

$$\bar{z}_0 = \frac{hk(E_{rat} - 1)}{2(k + 2)(E_{rat} + k)} \quad \text{con } E_{rat} = E_c/E_m. \quad (8)$$

Luego, la rigidez a flexión D_{11}^{FG} y el coeficiente inercial I_o referidos a este nuevo plano son:

$$D_{11}^{FG} = \frac{12D_c}{E_{rat}} \left(\frac{3(k^2 + k + 2)}{12(k + 1)(k^2 + 5k + 6)} - \left(\frac{\bar{z}_0}{h}\right) \frac{k(E_{rat} - 1)}{(k + 1)(k + 2)} + \left(\frac{\bar{z}_0}{h}\right)^2 \frac{E_{rat} + k}{k + 1} \right). \quad (9)$$

$$I_o = \frac{\rho_c h}{\rho_{rat}} \left(\frac{\rho_{rat} - 1}{k + 1} + 1 \right) \quad \text{con } \rho_{rat} = \rho_c/\rho_m. \quad (10)$$

3. FORMULACIÓN DEL FUNCIONAL GOBERNANTE DE LA PLACA FG

Para obtener los coeficientes de carga crítica de pandeo y/o los coeficientes de frecuencia de vibración transversal, de placas delgadas FG con cargas de compresión aplicadas en el contorno de su superficie física neutra, se requiere obtener en primer lugar, los esfuerzos internos \bar{N}_x , \bar{N}_y , \bar{N}_{xy} o esfuerzos en el interior de la placa indeformada que se generan por la acción de dichas cargas. Un desarrollo detallado de las condiciones requeridas para garantizar la validez de los esfuerzos obtenidos puede hallarse en Felix et al. (2007):

Obtenidos los esfuerzos en el plano, el paso siguiente consiste en plantear, el funcional de energía $J[W]$, que se expresa en la forma:

$$J[W] = U_{m\acute{a}x} + \tau_N - T_{m\acute{a}x}. \quad (11)$$

siendo:

$$U_{m\acute{a}x} = \frac{1}{2} \int_{A_P} (D_{11}^{FG} (W_{\bar{x}\bar{x}})^2 + 2D_{12}^{FG} W_{\bar{x}\bar{x}} W_{\bar{y}\bar{y}} + D_{22}^{FG} W_{\bar{y}\bar{y}} + 4D_{66}^{FG} W_{\bar{x}\bar{y}}) d\bar{x}d\bar{y}. \quad (12)$$

la energía potencial máxima debido a la deformación por flexión de la placa;

$$\tau_N = \frac{1}{2} \int_{A_P} (\bar{N}_x (W_{\bar{x}})^2 + \bar{N}_y (W_{\bar{y}})^2 + 2\bar{N}_{xy} W_{\bar{x}} W_{\bar{y}}) d\bar{x}d\bar{y}. \quad (13)$$

el trabajo que realizan los esfuerzos \bar{N}_x , \bar{N}_y , \bar{N}_{xy} cuando la placa se deforma en su plano;

$$T_{m\acute{a}x} = \frac{1}{2} \omega^2 \int_{A_P} I_o W^2 d\bar{x}d\bar{y}. \quad (14)$$

la energía cinética máxima de la placa cuando realiza vibraciones transversales. En las Ecs. (12)-(14), A_p representa el área de la placa contenida en el plano " \bar{x} , \bar{y} ".

Una vez formulado el funcional, se procede a la adimensionalización del mismo. Se establecen para ello, las siguientes relaciones adimensionales para la geometría de la placa y para los esfuerzos en el plano:

$$x = \frac{\bar{x}}{a}; y = \frac{\bar{y}}{b}; \lambda = \frac{a}{b}; A_n = \frac{A_p}{a.b}; N_x^* = \frac{\bar{N}_x a^2}{D_{11}^{FG}}; N_y^* = \frac{\bar{N}_y a^2}{D_{11}^{FG}}; N_{xy}^* = \frac{\bar{N}_{xy} a^2}{D_{11}^{FG}}. \quad (15)$$

siendo x e y , las coordenadas espaciales adimensionales, λ la relación de aspecto, A_n el área normalizada de integración de la placa y N_x^* , N_y^* y N_{xy}^* , las expresiones de los esfuerzos adimensionales en el plano.

Con la adimensionalización del funcional, los desplazamientos transversales quedan expresados en función de las coordenadas espaciales adimensionales, resultando $W = W(x, y)$.

Al reemplazar las expresiones adimensionales dadas en las Ecs. (15) en las Ecs. (12-14) y recordando las relaciones de las Ecs. (2) y (3), el funcional de energía $J[W]$, dado en la Ec.(11) resulta:

$$\begin{aligned} J[W] = & \frac{D_{11}^{FG}}{2} \left[\frac{b}{a^3} \int_{A_n} (W_{xx})^2 dx dy + \frac{2\nu}{ab} \int_{A_n} W_{xx} W_{yy} dx dy + \frac{a}{b^3} \int_{A_n} (W_{yy})^2 dx dy \right] + \\ & + \frac{D_{11}^{FG}}{2} \left[\frac{2(1-\nu)}{ab} \right] + \\ & \frac{D_{11}^{FG}}{2} \left[\frac{b}{a^3} \int_{A_n} N_x^* (W_x)^2 dx dy + \frac{1}{ab} \int_{A_n} N_y^* (W_y)^2 dx dy + \frac{2}{a^2} \int_{A_n} N_{xy}^* W_x W_y dx dy \right] \\ & - \frac{1}{2} \omega^2 I_0 ab \int_{A_n} W^2 dx dy. \end{aligned} \quad (16)$$

Con el propósito de obtener una expresión que permita determinar los autovalores de carga crítica, debemos proceder además a normalizar los esfuerzos en el plano de la placa respecto a uno de ellos. Definimos así el factor de intensidad de los esfuerzos S del siguiente modo:

$$N_x^* = S N_x; N_y^* = S N_y; N_{xy}^* = S N_{xy}. \quad (17)$$

A continuación procedemos a normalizar respecto a uno de los esfuerzos presentes en el plano. Por ejemplo, si $N_x^* \neq 0$, podemos adoptar $S = N_x^*$.

$$N_x = \frac{N_x^*}{N_x^*} = 1; N_y = \frac{N_y^*}{N_x^*}; N_{xy} = \frac{N_{xy}^*}{N_x^*} \quad (18)$$

Al reemplazar las definiciones dadas en las Ecs. (17), la Ec.(16) puede reescribirse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} C J[W] = & \int_{A_n} (W_{xx})^2 dx dy + 2\nu\lambda^2 \int_{A_n} W_{xx} W_{yy} dx dy + \lambda^4 \int_{A_n} (W_{yy})^2 dx dy \\ & + 2(1-\nu)\lambda^2 \int_{A_n} (W_{xy})^2 dx dy + S \int_{A_n} N_x (W_x)^2 dx dy \\ & + S\lambda^2 \int_{A_n} N_y (W_y)^2 dx dy + S 2\lambda \int_{A_n} N_{xy} W_x W_y dx dy \\ & - (\Omega^{FG})^2 F_k \int_{A_n} W^2 dx dy. \end{aligned} \quad (19)$$

resultando, $C = 2ab\lambda^2/D_{11}^{FG}$ y $F_k = (D_c/D_{11}^{FG})(I_0/\rho_ch)$, mientras que:

$$\Omega^{FG} = \omega a^2 \sqrt{\frac{\rho_c h}{D_c}} \quad \text{con} \quad D_c = \frac{E_c h^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (20)$$

es el coeficiente de frecuencia natural de vibración transversal de la placa FG. En la definición dada por la Ec.(20), ρ_c , D_c y E_c son la densidad, el coeficiente de rigidez y el módulo de elasticidad, correspondientes al material cerámico, pues se toma como referencia el material que constituye la tapa de la placa FG. En el caso particular de la placa homogénea el coeficiente de frecuencia resulta:

$$\Omega^H = \omega a^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \quad \text{con} \quad D = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (21)$$

Se considera importante destacar en este punto que, si el coeficiente de Poisson ν es constante, los coeficientes de frecuencias de la placa FG, (Ω^{FG}) pueden obtenerse a partir de los coeficientes de frecuencias de la misma placa, construida con material homogéneo, (Ω^H) como es propuesto por [Quintana et al. \(2019\)](#), para el caso de vibraciones libres, lo que reduce en alto grado el esfuerzo computacional. Finalmente, el funcional dado en la Ec. (11) debe satisfacer, si W es la solución exacta, la condición variacional de minimización del funcional:

$$\delta J[W] = 0 \quad (22)$$

Al aplicar el método de Rayleigh-Ritz, la expresión de la deflexión de la placa es aproximada por medio de una serie truncada:

$$W \simeq W_a(x, y) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N C_{mn} X_m(x) Y_n(y) \quad (23)$$

En donde $X_m(x)$ e $Y_n(y)$, para la solución propuesta, son las funciones características para los modos normales de vibración de vigas, con condiciones de borde que permiten satisfacer las condiciones de contorno esenciales o geométricas de la placa, como lo requiere el método, [Felix et al. \(2007\)](#).

A continuación, el funcional es minimizado respecto de las constantes arbitrarias C_{mn} de la Ec. (23). Pero, como la deflexión de la placa es aproximada, la Ec. (22) es reemplazada por un sistema de ecuaciones lineal y homogéneo, que se expresa del siguiente modo:

$$\frac{\partial J[W_a]}{\partial C_{ql}} = 0 \quad \text{con} \quad q = \{1, 2, \dots, M\}; l = \{1, 2, \dots, N\} \quad (24)$$

De acuerdo a lo visto, la forma adimensional del sistema de Ecs. (24) resulta:

$$C \frac{\partial J[W_a]}{\partial C_{ql}} = 0 \quad (25)$$

Las Ecs. (25) representan un sistema de autovalores lineal y homogéneo, cuya solución no trivial requiere que la matriz de los coeficientes sea singular, esto es, que el determinante de dicho sistema sea igual a cero. La condición de no trivialidad entonces, expresada en forma matricial y en función de las componentes respectivas queda del siguiente modo:

$$\left| [u_{qlmn}] + S[\tau_{Nqlmn}] - (\Omega^{FG})^2 F_k [t_{qlmn}] \right| = 0 \quad (26)$$

o bien, expresada en forma matricial simbólica resulta:

$$\left| \mathbf{K} + S \mathbf{K}^G - (\Omega^{FG})^2 F_k \mathbf{M} \right| = 0 \quad (27)$$

siendo \mathbf{K} la matriz de rigidez, \mathbf{K}^G la matriz de rigidez geométrica y \mathbf{M} la matriz de masa.

Las componentes de las matrices de la Ec.(27) resultan como sigue:

$$\begin{aligned} u_{qlmn} = & \int_{A_n} \left(\frac{d^2 X_q}{dx^2} \frac{d^2 X_m}{dx^2} \right) (Y_l Y_n) dx dy + \\ & \nu \lambda^2 \int_{A_n} \left[\left(X_q \frac{d^2 X_m}{dx^2} \right) \left(\frac{d^2 Y_l}{dy^2} Y_n \right) + \left(\frac{d^2 X_q}{dx^2} X_m \right) \left(Y_l \frac{d^2 Y_n}{dy^2} \right) \right] dx dy + \\ & \lambda^4 \int_{A_n} (X_q X_m) \left(\frac{d^2 Y_l}{dy^2} \frac{d^2 Y_n}{dy^2} \right) dx dy + \\ & 2(1 - \nu) \lambda^2 \int_{A_n} \left(\frac{d^2 X_q}{dx^2} \frac{d^2 X_m}{dx^2} \right) \left(\frac{d^2 Y_l}{dy^2} \frac{d^2 Y_n}{dy^2} \right) dx dy; \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \tau_{N_{qlmn}} = & \int_{A_n} N_x \left(\frac{d^2 X_q}{dx^2} \frac{d^2 X_m}{dx^2} \right) (Y_l Y_n) dx dy + \lambda^2 \int_{A_n} N_y (X_q X_m) \left(\frac{d^2 Y_l}{dy^2} \frac{d^2 Y_n}{dy^2} \right) dx dy + \\ & \lambda \int_{A_n} N_{xy} \left[\left(X_q \frac{d X_m}{dx} \right) \left(\frac{d Y_l}{dy} Y_n \right) + \left(\frac{d X_q}{dx} X_m \right) \left(Y_l \frac{d Y_n}{dy} \right) \right] dx dy; \end{aligned} \quad (29)$$

$$t_{qlmn} = \int_{A_n} (X_q X_m) (Y_l Y_n) dx dy. \quad (30)$$

La condición de $\Omega^{FG} = 0$, en la Ec. (27), permite obtener el coeficiente de intensidad de carga crítica adimensional S^{cr} . Los esfuerzos adimensionales que inestabilizan la placa para la configuración elegida serán entonces:

$$N_x^{*cr} = S^{cr} N_x; N_y^{*cr} = S^{cr} N_y; N_{xy}^{*cr} = S^{cr} N_{xy}. \quad (31)$$

Con la adimensionalización realizada, los primeros dos términos del determinante dado en la Ec.(27) no dependen de las propiedades del material FG, ya que las mismas se encuentran en el factor F_k que se encuentra multiplicando a la matriz de masa. Por esta razón el coeficiente S^{cr} para la placa FG coincidirá con el de la placa homogénea, lo cual es una ventaja desde el punto de vista computacional.

Combinando las definiciones de esfuerzos adimensionales dadas en las Ecs.(15) con las expresiones de esfuerzos adimensionales críticos dadas en las Ecs.(31) podemos definir el coeficiente de intensidad de carga crítica dimensional \bar{S}^{cr} , que si tendrá en cuenta las propiedades de la placa FG. Se tiene entonces:

$$\bar{S}^{cr} = \frac{S^{cr} D_{11}^{FG}}{a^2} \quad (32)$$

La Ec.(27) permite obtener además los coeficientes de frecuencia de la placa FG, cuando en la misma se producen esfuerzos en el plano menores a los que inestabilizan la placa. Para ello expresamos dichos esfuerzos como una fracción de los esfuerzos críticos, esto es:

$$N_x^* = \xi N_x^{*cr} = \xi S^{cr} N_x; N_y^* = \xi N_y^{*cr} = \xi S^{cr} N_y; N_{xy}^* = \xi N_{xy}^{*cr} = \xi S^{cr} N_{xy}. \quad (33)$$

En la Ec.(33) el factor ξ varía entre 0, que corresponde a vibración libre o sin esfuerzos en el plano, y 1 que corresponde a la placa inestabilizada por tener esfuerzos en el plano que alcanzan los valores críticos.

4. RESULTADOS NUMÉRICOS

Se obtuvieron en primer lugar los valores de intensidad de carga crítica dimensional \bar{S}^{cr} , los cuales son dependientes de las propiedades mecánicas del material FG. En el presente estudio se consideró la distribución asimétrica de las propiedades mecánicas de los materiales en el espesor. Los modelos elegidos son una placa con condiciones de borde "SSSS" o simplemente apoyada en ambas direcciones y otra con condiciones de borde "SESE" o simplemente apoyada en la dirección x , y restringida a flexión en la dirección y . En ambos casos se consideraron dos relaciones de aspecto: $\lambda = a/b = 0,5$ o placa rectangular y $\lambda = a/b = 1$ o placa cuadrada. Resulta importante destacar que en ambos casos las condiciones de borde no restringen los desplazamientos en el plano de la placa.

k	λ	SSSS			SESE		
		Ref.(1)	Ref.(2)	R-Ritz	Ref.(1)	Ref.(2)	R-Ritz
0	0,5	2,1466	2,1466	2,14655	2,6417	2,6416	2,64156
0	1	1,3738	1,3738	1,37379	2,6417	2,6416	2,64156
1	0,5	1,0698	1,0699	1,06993	1,3166	1,3167	1,31666
1	1	0,6847	0,6848	0,68475	1,3166	1,3167	1,31666
2	0,5	0,8349	0,8349	0,83488	1,0275	1,0274	1,02742
2	1	0,5343	0,5343	0,53433	1,0275	1,0274	1,02742

Tabla 1: Intensidad de carga crítica dimensional, \bar{S}^{cr} , de una placa FG, para distintas condiciones de borde, y distintos valores del índice k y de $\lambda = a/b$. Con $h/b = 0,01$ y $b = 1$. Estado de carga: $N_x = -1$; $N_y = N_{xy} = 0$. Ref.(1): Li et al. (2015), Ref.(2): Mohammadi et al. (2010).

k	λ	SSSS			SESE		
		Ref.(1)	Ref.(2)	R-Ritz	Ref.(1)	Ref.(2)	R-Ritz
0	0,5	1,7173	1,7172	1,71724	2,0348	2,0347	2,03466
0	1	0,6869	0,6869	0,68690	1,3154	1,3154	1,31537
1	0,5	0,8559	0,8559	0,85594	1,0141	1,0142	1,01416
1	1	0,3423	0,3424	0,34238	0,6556	0,6556	0,65563
2	0,5	0,6679	0,6679	0,66791	0,7914	0,7914	0,79137
2	1	0,2672	0,2672	0,26716	0,5116	0,5116	0,51160

Tabla 2: Intensidad de carga crítica dimensional, \bar{S}^{cr} , de una placa FG, para distintas condiciones de borde, y distintos valores del índice k y de $\lambda = a/b$. Con $h/b = 0,01$ y $b = 1$. Estado de carga: $N_x = N_y = -1$; $N_{xy} = 0$. Ref.(1): Li et al. (2015), Ref.(2): Mohammadi et al. (2010).

En la Tabla 1, se muestran valores de intensidad de esfuerzos críticos dimensional \bar{S}^{cr} , oca-

sionados por un estado de esfuerzos unidireccional en su plano, ($N_x = -1, N_y = N_{xy} = 0$), y en la Tabla 2 para un estado de esfuerzos bidireccional en su plano, ($N_x = N_y = -1, N_{xy} = 0$).

Se consideraron en cada caso, 3 valores diferentes del índice k . A continuación se determinaron los valores del coeficiente de frecuencia fundamental en función de la fracción ξ existente, de los esfuerzos que inestabilizan la placa. Los resultados se muestran en las Figs. (2) y (3).

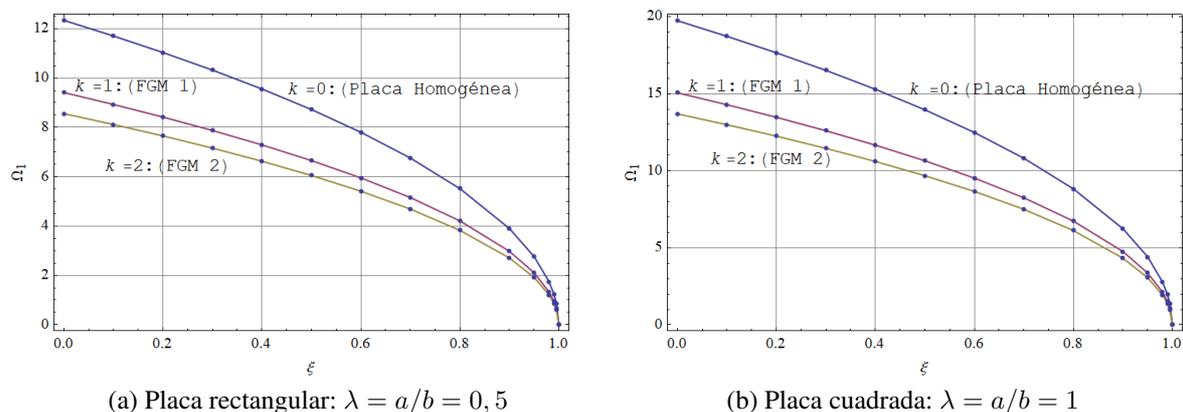


Figura 2: Coeficiente de frecuencia fundamental Ω_1^{FG} en función de la fracción ξ de carga crítica aplicada, en una placa FG asimétrica, $SSSS$, con esfuerzos en el plano, en la dirección x : $N_x = -1, N_y = N_{xy} = 0$.

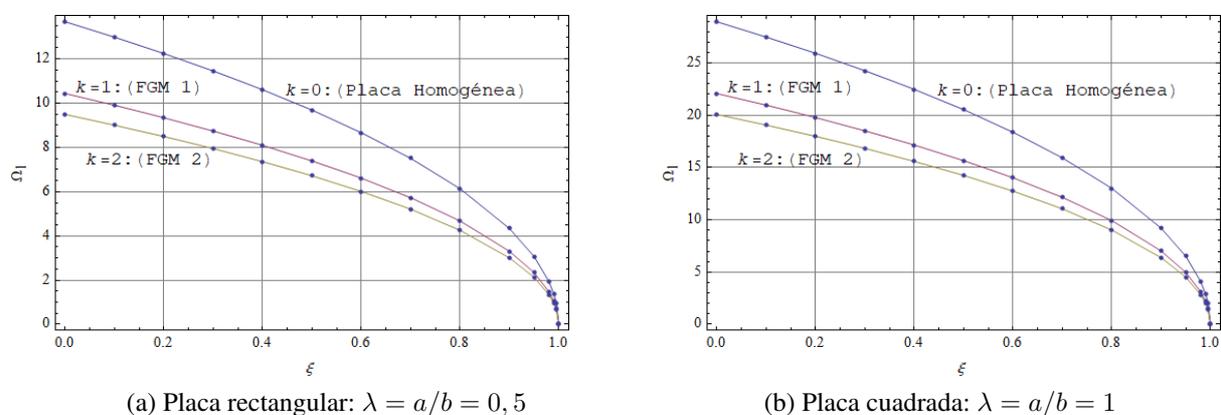


Figura 3: Coeficiente de frecuencia fundamental Ω_1^{FG} en función de la fracción ξ de carga crítica aplicada, en una placa FG asimétrica, $SESE$, con esfuerzos en el plano, en ambas direcciones: $N_x = N_y = -1, N_{xy} = 0$.

Puede apreciarse en dichas figuras, que la distribución de las propiedades del material en el espesor, dada por el índice k , incide significativamente en los valores de los coeficientes de frecuencia.

5. CONCLUSIONES

Se concluye del presente estudio numérico, lo siguiente:

- La ley de variación de la composición de los materiales, identificada por el índice k , incidirá significativamente en el valor de intensidad de carga crítica dimensional \bar{S}^{cr} .

- En las gráficas de las Figs. 2 y 3, se observa que las pendientes de las curvas aumenta conforme aumenta ξ , con lo cual los coeficientes de frecuencia se reducen más rápidamente, conforme la intensidad de los esfuerzos en el plano se acerca al los valores críticos.
- Al comparar los valores obtenidos con aquellos disponibles en la literatura técnico-científica se observa una gran precisión en los resultados, y además por las razones expuestas pueden obtenerse con bajo esfuerzo computacional.

Agradecimientos

El trabajo se desarrolló en el Departamento de Ingeniería de la Universidad Nacional del Sur (UNS) y bajo el auspicio de la Secretaría General de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional del Sur (UNS), del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) y de la Comisión de Investigaciones Científicas-CIC de la Prov. de Buenos Aires.

REFERENCIAS

- Abrate S. Functionally graded plates behave like homogenous plates. *Compos. Part B: Eng.*, 39(1):151–158, 2008.
- Birman V. Stability of functionally graded hybrid composite plates. *Compos. Struct.*, 5:913–921, 1995.
- Chakraverty S. y Pradhan K.K. Free vibration of exponential functionally graded rectangular plates in thermal environment with general boundary conditions. *Aerosp. Sci. Technol.*, 36:132–156, 2014.
- Cheng Z.Q. y Batra R.C. Deflection relationship between the Kirchhoff plate theory and different functionally graded plate theory. *Arch. Mech.*, 52(1):143–158, 2000.
- Felix D.H., Rossit C.A., y Bambill D.V. Estabilidad del equilibrio de placas rectangulares ortótropas cargadas en el plano, aplicando el método de rayleigh-ritz. *Mecánica Computacional*, XXVI:1399–1412, 2007.
- Koizumi M. FGM activities in Japan. *Compos. Part B: Eng.*, 28(1–2):1–4, 1997.
- Kumar S., Ranjan V., y Jana P. Free vibration analysis of thin functionally graded rectangular plates using the dynamic stiffness method. *Compos. Struct.*, 197:39–53, 2018.
- Li S., Wang X., y Batra R.C. Correspondence relations between deflection, buckling load and frequencies of thin functionally graded material plates and those of corresponding homogeneous plates. *J. Appl. Mech.*, 82:1–8, 2015.
- Mohammadi M., Saidi A.R., y Jomehzadeh E. Levy solution for buckling analysis of functionally graded rectangular plates. *Appl. Compos. Mater.*, 17(2):81–93, 2010.
- Pradhan K.K. y Chakraverty S. Static analysis of functionally graded thin rectangular plates with various boundary supports. *A.C.M.E.*, 15:721–734, 2015.
- Quintana M.V., Gilardi G.J., Grossi R.O., Bambill D.V., y Rossit C.A. Vibraciones libres de placas delgadas funcionalmente graduadas. *Mecánica Computacional*, 37:329–338, 2019.
- Reddy J.N. *Mechanics of Composite Laminated Plates and Shell: Theory and Analysis*. C.R.C. Press, 2003.
- Thang P.T. y Lee J. Free vibration characteristics of sigmoid-functionally graded plates reinforced by longitudinal and transversal stiffeners. *Ocean Eng.*, 148:53–61, 2018.
- Zhao X., Lee Y.Y., y Liew K.M. Free vibration analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method. *J. Sound Vib.*, 319(3-5):918–939, 2009.