

ESTUDO DOS PRINCIPAIS PARÂMETROS DO MÉTODO DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA *BESO* EM PROBLEMAS DE ELASTICIDADE TRIDIMENSIONAL

STUDY OF THE MAIN PARAMETERS OF THE *BESO* METHOD IN THREE-DIMENSIONAL ELASTICITY PROBLEMS

Paulo U. Silva e Gustavo Bono

Programa de Pós-Graduação Engenharia Civil e Ambiental, Centro Acadêmico do Agreste, Universidade Federal de Pernambuco, Av. Marielle Franco s/n – KM 59 – Nova PE, CEP 50104-900, Caruaru, Pernambuco, Brasil, paulo.usilva@ufpe.br, gustavo.bono@ufpe.br

Palavras-chave: Otimização topológica. *BESO*. Multigrid. MGCG.

Resumo. Com o avanço do poder computacional e das modernas técnicas de manufatura aditiva, atualmente a Otimização Topológica (OT) é um dos principais métodos para concepção e projeto de estruturas ótimas na academia e na indústria. Neste trabalho, realiza-se um estudo a respeito de como os principais parâmetros do método de OT *Bidirectional Evolutionary Structural Optimization* (*BESO* 3D) influenciam os resultados da simulação. Para resolução do sistema matricial associado ao problema de elasticidade tridimensional, adota-se o esquema do método dos gradientes conjugados com o *multigrid* geométrico (MGCG) como pré-condicionador. Para a validação, emprega-se o benchmark clássico da viga MBB. No trabalho, avalia-se como os parâmetros: taxa evolucionária, fração de volume, nível de refinamento da malha de elementos finitos, raio do filtro de sensibilidades e grau de penalização das densidades influenciam a flexibilidade média, topologia da estrutura e tempo de processamento.

Keywords: Topology optimization. *BESO*. Multigrid. MGCG

Abstract. With the advancement of computational power and modern additive manufacturing techniques, Topological Optimization (TO) is currently one of the main methods for designing optimal structures in academia and industry. In this work, a study is carried out about how the main parameters of the OT method *Bidirectional Evolutionary Structural Optimization* (*BESO* 3D) influence the simulation results. To solve the matrix system associated with the three-dimensional elasticity problem, the conjugated gradient method scheme combined with the geometric multigrid (MGCG) is adopted as a preconditioner. For the validation, the classic benchmark of the MBB beam is used. In the work, it is evaluated how the parameters: evolutionary rate, volume fraction, level of finite element mesh refinement, sensitivity filter radius and degree of penalization of densities influence the mean compliance, structure topology and processing time.

1 INTRODUÇÃO

Com o advento de medidas que tornem o mercado da construção civil mais sustentável, é conveniente a utilização de técnicas que otimizem recursos naturais. No caso de estruturas, a otimização matemática ajuda a reduzir o volume de material empregado, sem que haja por exemplo, comprometimento das funções de resistência. Bendsøe e Sigmund (2003) citam três maneiras de realizar a otimização estrutural. Dentre elas, a mais geral é a otimização topológica (OT). Ela consiste em encontrar a melhor distribuição de material dentro de um domínio, com determinadas restrições. Sua principal diferença com relação a outras formas de otimização é que na OT define-se um volume prescrito máximo de material, e para esta quantidade encontra-se a melhor configuração, podendo assim alterar a conectividade dos membros estruturais.

Apresenta-se neste trabalho uma implementação no ambiente MATLAB do método *Bidirectional Evolutionary Structural Optimization* (BESO) para resolução de problemas de elasticidade tridimensional. Devido a sua discretização por elementos finitos, o BESO possui matrizes de rigidez de grandes dimensões, inviabilizando o uso de métodos diretos para solução dos sistemas lineares em problemas tridimensionais. Para contornar este problema, pode-se utilizar o método dos gradientes conjugados. Neste trabalho emprega-se um esquema de gradientes conjugados associados com o método multigrid geométrico, baseado em Amir *et al.* (2014).

O objeto deste trabalho é realizar um estudo da influência dos principais parâmetros do método BESO nos resultados da otimização. Na Seção 2, apresenta-se a fundamentação teórica para os métodos empregados. Na Seção 3, expõe-se a metodologia de implementação do código. Na Seção 4, apresenta-se a validação do BESO através do exemplo benchmark da viga MBB. E, por fim, nas Seções 5 e 6, são apresentados os resultados do trabalho e as conclusões.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesta seção, é apresentada a fundamentação teórica dos principais pontos do trabalho: o método de otimização estrutural (BESO) e o esquema multigrid empregado para reduzir o tempo de processamento.

2.1 Método *Bidirectional Evolutionary Structural Optimization* (BESO)

A otimização topológica de estruturas possui várias metodologias, que podem ser classificadas em quatro categorias: os métodos baseados em densidade (*density-based*), métodos baseados em elemento (*element-based*), métodos discretos, como o *Evolutionary Structural Optimization* (ESO), *Additive Evolutionary Structural Optimization* (AESO) e o BESO; e os métodos combinados.

A metodologia do ESO (Xie e Steven, 1993) consiste primeiramente em discretizar a estrutura pelo Método dos Elementos Finitos (MEF). Após realizar análise do campo de tensões, elementos com os menores valores são gradualmente eliminados da estrutura. O processo é feito iterativamente até que o parâmetro de controle seja alcançado, sendo este geralmente o volume prescrito ou fração de volume. A validade da metodologia ESO foi questionada por parte da academia como visto em Sigmund e Petersson (1998) e Zhou e Rozvany (2001) devido à escassez de um rigoroso embasamento matemático. O método BESO surgiu do interesse em uma metodologia que pudesse simultaneamente adicionar e remover elementos da malha de forma a contornar os problemas observados nos métodos discretos (Yang *et al.*, 1999; Querin *et al.*, 2000). De acordo com a sensibilidade da função objetivo, os elementos sólidos podem ser removidos ou adicionados na malha. O problema de otimização pode ser definido através da Equação (1).

$$\begin{aligned} \text{minimizar } C &= \frac{1}{2} \sum_{e=1}^{n_{ele}} (x_e)^p \mathbf{u}_e^T \mathbf{k}_e \mathbf{u}_e \\ V(\mathbf{x}) &= f_v - \sum_{e=1}^{n_{elem}} V_e x_e = 0 \\ \text{sujeito a: } & \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F} \\ & x_e = x_{\min} \text{ ou } 1 \end{aligned} \quad (1)$$

onde, C é a flexibilidade média da estrutura, \mathbf{F} e \mathbf{U} são, respectivamente os vetores de carga e deslocamento globais, \mathbf{K} é a matriz de rigidez global, f_v é o volume prescrito (fração de volume), e n_{elem} é a quantidade de elementos na malha. A variável discreta binária x_e representa a densidade do elemento: $x_{\min} = 10^{-3}$ para o espaço vazio e 1 para a região sólida. Emprega-se esse valor pequeno para evitar singularidades nas matrizes.

A remoção e adição dos elementos sólidos são controlados pelo número de sensibilidade elemental (α_e). A mudança na flexibilidade média quando um elemento é adicionado ou removido é igual a energia de deformação elemental (Loyola *et al.*, 2018). O número α_e é definido por esta variação, tal como mostrado na Equação (2).

$$\alpha_e^i = \Delta C_e = \frac{1}{2} \mathbf{u}_e^T \mathbf{k}_e \mathbf{u}_e \quad (2)$$

onde, \mathbf{u}_e é o vetor de deslocamento nodal do elemento e \mathbf{k}_e é a matriz de rigidez elemental. Portanto, para elementos vazios (que não possuem rigidez), α_e é nulo.

Para contornar possíveis instabilidades numéricas no método, pode-se adotar um esquema de filtro. Na literatura existem diversos filtros para problemas de OT. Neste trabalho, adota-se o filtro de sensibilidades usado por Huang e Xie (2007) e Zuo e Xie (2015).

2.2 Método dos gradientes conjugados com multigrid geométrico (MGCG)

O esquema de multigrid implementado neste trabalho baseia-se no estudo de Amir *et al.* (2014). Os autores implementaram o método dos gradientes conjugados com pré-condicionador do multigrid geométrico para resolver problemas de OT pelo método SIMP 3D. Neste subtópico, são apresentados conceitos gerais sobre a classe de métodos multigrid.

Um método multigrid consiste em resolver o sistema de equações diferenciais através de múltiplas discretizações hierárquicas. Ao resolver problemas por métodos iterativos, o vetor erro \mathbf{e} possui dois tipos de componentes: de alta frequência e de baixa frequência. Métodos de relaxação convencionais como Gauss-Seidel e Jacobi tem como função convergir todos os elementos do vetor erro para zero, sendo eficazes para eliminar os modos de erro de alta frequência, mas possuindo convergência lenta para modos de baixa frequência.

Para conseguir eliminar também os modos de baixa frequência, pode-se optar pela resolução do problema refinado em malhas mais grosseiras. O multigrid consiste em resolver o mesmo problema em múltiplos níveis de refinamento de malha, a fim de eliminar os modos de baixa frequência em malhas grosseiras e projetar a solução nas malhas mais refinadas (Saad, 2003).

Problemas de OT tridimensionais empregam malhas refinadas, que são associadas a matrizes de rigidez de grandes dimensões. Resolver um sistema matricial nesta escala ocasiona uma grande demanda computacional, dificultando o seu emprego em casos práticos. Amir *et al.* (2010) abordaram este tópico, sugerindo a análise por métodos iterativos baseados em subespaços de Krylov. Amir *et al.* (2012) verificaram que o emprego do método dos gradientes conjugados pré-condicionados (*preconditioned conjugate gradient method* ou PCG) mostrou-se eficiente na redução do esforço computacional.

Continuando o estudo baseado em subespaços de Krylov, Amir *et al.* (2014) empregam no método SIMP 3D um esquema de multigrid geométrico como pré-condicionador do PCG. A justificativa da aplicação deste método é que o método dos gradientes conjugados com multigrid (*multigrid conjugate gradient method* ou MGCG) mostram uma boa convergência e

facilidade de escalar os problemas em computação paralela. Neste trabalho, é implementado um esquema MGCG com ciclo V na etapa de solução do sistema de equações de equilíbrio.

3 METODOLOGIA

Esta seção divide-se em detalhes da implementação do BESO e a resolução do sistema linear de equações associado ao mesmo através do método dos gradientes conjugados em que o multigrid geométrico é o pré-condicionador.

3.1 Análise de sensibilidade do método BESO

Com a inclusão do material de densidade mínima x_{min} , é conveniente realizar uma nova análise para o número de sensibilidade. A análise de sensibilidade (procedimento para calcular os números de sensibilidade) pode ser feita, portanto, com a variação da flexibilidade com relação às variáveis de projeto conforme a equação:

$$\frac{dC}{dx_e} = \frac{1}{2} \frac{df^T}{dx_e} \mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{f}^T \frac{d\mathbf{u}}{dx_e} \quad (3)$$

Após o desenvolvimento e aplicação do esquema de interpolação material apresenta-se na forma da Equação (4). Os números de sensibilidade elementar α_e podem ser então calculados com o posicionamento relativo da análise de sensibilidade para um elemento individual (Huang e Xie, 2010), tal como é apresentado na Equação (5).

$$\frac{\partial C}{\partial x_e} = \frac{1}{2} p x_e^{p-1} \mathbf{u}_e^T \mathbf{k}_e^0 \mathbf{u}_e \quad (4)$$

$$\alpha_e = -\frac{1}{p} \frac{\partial C}{\partial x_e} = \begin{cases} \frac{1}{2} \mathbf{u}_e^T \mathbf{k}_e^0 \mathbf{u}_e & \text{em } x_e = 1 \\ \frac{x_{min}^{p-1}}{2} \mathbf{u}_e^T \mathbf{k}_e^0 \mathbf{u}_e & \text{em } x_e = x_{min} \end{cases} \quad (5)$$

Elementos da malha com as menores sensibilidade α_e são transformados em região vazia. Simultaneamente, em regiões com elementos que apresentem grande sensibilidade, é adicionado material sólido. O índice de remoção de elementos por iteração é chamado de taxa evolucionária, ER , adotando-se comumente são valores entre 1 % e 5 %. Já a adição de elementos é coordenada pelo parâmetro $AR_{máx}$, cujo valor é de no máximo 1 % (Huang e Xie, 2010).

3.2 Resolução do sistema linear de equações com o multigrid geométrico

O processo para resolução do sistema de equações consiste em três etapas: restrição, resolução do sistema grosseiro e prolongamento. Baseado na quantidade de elementos em cada dimensão (x , y e z) da malha, deve-se definir a quantidade de *grids* do problema. Por exemplo, em um problema de $120 \times 60 \times 60$ elementos, a quantidade de *grids* é 3, pois o máximo de malhas trabalhadas consideram as seguintes discretizações: $120 \times 60 \times 60$, $60 \times 30 \times 30$ e $30 \times 15 \times 15$ elementos.

O primeiro operador a ser calculado é o de prolongamento \mathbf{P} , que é obtido através de interpolação padrão. O segundo operador calculado é o de restrição, \mathbf{K}_c , que mapeia o domínio original em domínios menos refinados e computacionalmente mais rápidos de se resolver por métodos diretos. \mathbf{K}_c é calculado como a matriz transposta do operador \mathbf{P} .

Depois de mapeada para uma resolução mais baixa, o sistema de equações é solucionado por decomposição de Cholesky. Após a resolução no *grid* mais grosseiro, a solução é transportada através de três equações. Na primeira, chamada de “pré-suavização”, a solução \mathbf{u} na malha

grosseira é amortecida pelo suavizador \mathbf{S} , através do seguinte processo,

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &= \mathbf{u} + \mathbf{S}^{-1}(\mathbf{F} - \mathbf{K}\mathbf{u}) \\ \mathbf{S}^{-1} &= \lambda \mathbf{D}^{-1}\end{aligned}\quad (6)$$

onde, $\lambda = 0,6$ é um fator de amortecimento e \mathbf{D} é a diagonal da matriz de rigidez \mathbf{K} . Em seguida, a solução é transportada para a malha mais refinada imediatamente acima (por exemplo, se a malha mais grosseira é $30 \times 15 \times 15$, nesta fase a solução é transportada para a malha de $60 \times 30 \times 30$). Para isto, é resolvido o problema apresentado na Equação (7) e em seguida interpolado pela Equação (8), onde \mathbf{u}_c é a solução do sistema linear no grid grosseiro. Após esta etapa, ocorre a “pós-suavização”, em que novamente \mathbf{u} é submetido à Equação (7). Assim, é obtido o vetor solução para uma malha imediatamente superior, reiniciando o processo até alcançar a malha mais refinada. Em todos os exemplos do artigo empregou-se quatro níveis de malha do multigrid. Para mais detalhes, ver Silva (2022).

$$\mathbf{K}_c \mathbf{u}_c = \mathbf{P}^T(\mathbf{f} - \mathbf{K}\mathbf{u}) \quad (7)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{P}\mathbf{u}_c \quad (8)$$

3.3 Critério de parada

Adota-se a formulação matemática empregada por Xia *et al.* (2019) como critério de parada da fração de volume, sendo a mesma dado por,

$$V_{er} = \frac{|V_k - f_v|}{f_v} \leq 0,5\% \quad (9)$$

onde V_k é o volume na iteração corrente. Tal critério garante que ao alcançar o volume prescrito, ele permaneça constante. Adota-se, também, um segundo critério de parada, ver Equação (10), referente à função objetivo. Assim, quando a diferença relativa da flexibilidade média entre uma quantidade N de iterações for menor que uma tolerância τ , o processo é encerrado.

$$\epsilon = \frac{|\sum_{i=1}^N C_{k-i+1} - \sum_{i=1}^N C_{k-N-i+1}|}{\sum_{i=1}^N C_{k-i+1}} \leq \tau \quad (10)$$

onde, ϵ é o erro relativo, τ é uma tolerância admissível, adotada como 10^{-3} , k é a iteração corrente, e N é um número inteiro, que representa a quantidade de iterações comparadas. Tipicamente, adota-se $N = 5$ (Huang e Xie, 2010).

4 VALIDAÇÃO

Para a validação do programa implementado emprega-se o problema da viga Messerschmitt-Bölkow-Blohm (MBB) 3D. O problema consiste em uma viga prismática de seção transversal quadrada com aresta L e comprimento total $6L$. Ela é simplesmente apoiada nos quatro vértices inferiores e possui uma carga unitária F aplicada no centro da viga. Na Figura 2, ilustra-se a viga MBB.

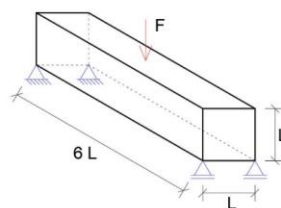


Figura 2: Viga MBB tridimensional.

Os resultados obtidos com o programa comparam-se com dois códigos de OT baseados no método SIMP: Amir *et al.* (2014) que resolve o problema adotando um esquema MGCG; e Liu e Tovar (2014) que implementam o SIMP 3D com pré-condicionador de Jacobi. Para ambos os programas se considera material sólido aos elementos com densidade $x_e \geq 0,50$.

Para o estudo de independência de malha, consideram-se três níveis de refinamento das malhas com elementos hexaédricos: 60×10×10 (M1), 120×20×20 (M2) e 180×30×30 (M3). As soluções obtidas podem ser conferidas na Tabela 1. Além da geometria final, também se mostra o valor da função objetivo (flexibilidade média, C em N·m) e o tempo de processamento adimensionalizado com relação ao caso M2/BESO (8 minutos e 39 segundos).



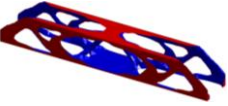


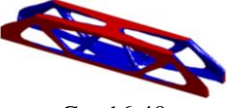



Resolução da malha	BESO	Liu e Tovar (2014) SIMP (PCG)	Amir et al. (2014) SIMP (MGCG)
60×10×10 (M1)	 $C = 20,57$ Tempo: 0,11	 $C = 28,75$ Tempo: 1,04	 $C = 24,02$ Tempo: 0,22
120×20×20 (M2)	 $C = 11,61$ Tempo: 1,00	 $C = 17,05$ Tempo: 11,79	 $C = 16,49$ Tempo: 1,52
180×30×30 (M3)	 $C = 9,79$ Tempo: 4,13	 $C = 13,49$ Tempo: 62,67	 $C = 11,54$ Tempo: 4,30

Tabela 1: Comparação dos resultados para diferentes resoluções de malha.

Percebe-se que nas três malhas a solução final permaneceu semelhante, independentemente do nível de refinamento. A estrutura final é similar aos resultados obtidos com o programa SIMP (MGCG), enquanto os resultados obtidos com o programa SIMP (PCG) diferem com relação a espessura e quantidade de barras. O tempo de processamento é notavelmente menor nos programas que usam o esquema multigrid geométrico para resolução do sistema matricial. Em média, o BESO convergiu para a solução final 14,4 vezes mais rápido que o SIMP (PCG) e 1,15 vez mais rápido que o SIMP (MGCG).

Nota-se que os valores da função objetivo assumem caráter assintótico à medida que se refina a malha. Comparado com as soluções do SIMP (PCG), as topologias obtidas com o método BESO tem valores de flexibilidade média 29,2 % menores. Já em comparação com os resultados do SIMP (MGCG), as soluções do BESO mostram-se 19,4 % menos flexíveis. Tal diferença ocorre devido à presença de elementos com densidades intermediárias nas soluções dos métodos SIMP, que possuem propriedades mecânicas penalizadas e, em consequência, aumentam o valor da função objetivo.

5 RESULTADOS

Neste tópico, são apresentados os resultados da influência dos principais parâmetros do método BESO e multigrid na otimização topológica. Os principais parâmetros do código analisados são: taxa evolucionária (ER), fração de volume (f_v), número de elementos da malha

(n_{elem}), raio do filtro de sensibilidades (r_{min}) e o fator de penalização (p). Os exemplos neste subtópico foram analisados considerando uma viga engastada com carga distribuída $w_0 = 1$ kN/m na aresta inferior da extremidade livre, com proporções $2 \times 1 \times 1$ (Figura 3). Esta mesma viga também foi empregada por Wallin *et al.* (2020) e Yago *et al.* (2021) para análise de parâmetros da otimização topológica.

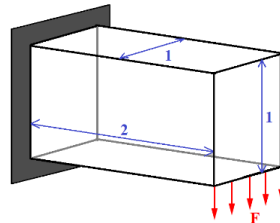


Figura 3: Estrutura para o estudo paramétrico do BESO.

5.1 Influência da taxa evolucionária (ER) e da fração de volume (f_v)

Os valores adotados para analisar ER são 1%, 2% e 5% (Huang e Xie, 2010). Já para a análise de f_v , empregam-se 0,30, 0,20 e 0,12. Na Tabela 2, apresentam-se os resultados da estrutura, o valor da flexibilidade e o tempo de processamento adimensionalizado (caso $f_v = 0,12$ e $ER = 2\%$) em função da variação destes parâmetros.

ER	$f_v = 0,30$	$f_v = 0,20$	$f_v = 0,12$
1 %	 C = 1270,9 Tempo: 0,85	 C = 1947,3 Tempo: 1,29	 C = 3420,8 Tempo: 1,69
2 %	 C = 1264,7 Tempo: 0,48	 C = 1943,4 Tempo: 0,76	 C = 3420,3 Tempo: 1,
5 %	 C = 1289,5 Tempo: 0,27	 C = 1953,7 Tempo: 0,32	 C = 3441,1 Tempo: 0,63

Tabela 2: Variação da fração de volume e taxa evolucionária.

Nota-se uma variação expressiva no valor da função objetivo entre as diferentes frações de volume. Tomando como base o maior valor de fração de volume ($f_v = 0,30$), o valor de C

aumenta em média 52,8 % para $f_v = 0,20$ e 169 % para $f_v = 0,12$. Isto ocorre pois à medida que se diminui o valor da f_v , mais material é removido do domínio sólido. Como a deflexão da estrutura é inversamente proporcional à quantidade de material, os deslocamentos nos nós da malha são maiores, aumentando o valor da função objetivo.

Percebe-se que os três valores adotados para as taxas evolucionárias, não influenciam significativamente a função objetivo. Em média, $ER = 2\%$ apresentam os menores valores, com uma diferença de 0,16 % com relação à $ER = 1\%$ e 0,85 % com relação à $ER = 5\%$. Entretanto, nota-se que o tempo de processamento e a quantidade de iterações aumentam expressivamente para os menores valores de ER. A taxa evolucionária diz respeito à quantidade de material removida por iteração. Portanto, para valores pequenos de ER, mais iterações são necessárias para satisfazer a condição de volume prescrita.

5.2 Influência do refinamento da malha (n_{elem}) e do raio do filtro de sensibilidades (r_{min})

Baseado nos valores da literatura, realizou-se o estudo paramétrico levando em conta a variação de r_{min} e n_{elem} . As malhas adotadas identificam-se como M1 = 40×20×20, M2 = 48×24×24 e M3 = 64×32×32. Para r_{min} , emprega-se os valores 2,0, 3,0 e 4,0. Na Tabela 3, mostram-se as estruturas otimizadas, o valor da flexibilidade e o tempo de processamento adimensionalizado com relação a M2 e $r_{min} = 2,0$.










Malha	$r_{min} = 2,0$	$r_{min} = 3,0$	$r_{min} = 4,0$
M1	 C = 3034,0 Tempo: 0,49	 C = 3182,2 Tempo: 0,44	 Não convergiu Tempo: 2,45
M2	 C = 3420,3 Tempo: 1,00	 C = 3659,2 Tempo: 0,89	 C = 4048,3 Tempo: 0,93
M3	 C = 4263,3 Tempo: 2,87	 C = 4451,3 Tempo: 2,17	 C = 4735,3 Tempo: 2,33

Tabela 3: Variação da resolução da malha e raio do filtro de sensibilidades.

Analisando a influência que o parâmetro r_{min} possui na topologia final, pode-se observar que à medida que se aumenta o raio do filtro, diminui-se a quantidade de barras da estrutura. Do ponto de vista da manufatura aditiva, uma estrutura menos detalhada é mais fácil de ser interpretada e fabricada. Entretanto, a função objetivo cresce, deixando-a mais flexível. Todavia, a estrutura de resolução M1 e $r_{min} = 4,0$ não atendeu os critérios de convergência,

gerando uma solução não factível.

Com o aumento do refinamento da malha, caso r_{min} seja mantido constante, a solução final difere de um caso para o outro. Para que se obtenha sempre uma estrutura independente da malha, deve-se alterar o raio do filtro. Sigmund (1997) menciona que para garantir independência de malha, o filtro deve ser mantido fixo com relação à geometria do problema. Ou seja, ao mudar as dimensões da estrutura, o valor do filtro deve ser alterado.

5.3 Influência do fator de penalização

Finalmente, neste subtópico são avaliados seis valores diferentes para o fator de penalização. Empregam-se $p = 1,5; 2,0; 2,5; 3,0; 4,0$ e $5,0$, de forma a verificar a partir de que valor o fator de penalização deixa de exercer influência na solução final. Os resultados podem ser conferidos na Tabela 4, em que o tempo de processamento foi adimensionalizado com relação a $p = 4,0$.













$p = 1,5$	$p = 2,0$	$p = 2,5$	$p = 3,0$	$p = 4,0$	$p = 5,0$
					
					
C = 3405,6 Tempo: 1,36	C = 3393,2 Tempo: 1,05	C = 3408,3 Tempo: 1,30	C = 3392,3 Tempo: 1,04	C = 3420,3 Tempo: 1,00	C = 3420,3 Tempo: 1,17

Tabela 4: Variação do fator de penalização.

Observa-se que há pouca influência nos valores de função objetivo ao variar o fator de penalização, apresentando uma média de $3406,7 \text{ N}\cdot\text{m}$ e desvio padrão de $11,26 \text{ N}\cdot\text{m}$ (0,33 %). No entanto, em $p = 3,0$, este número diminui. A partir de $p = 4,0$ o número torna-se constante, mostrando que deste valor em diante, não há mudanças significativas no processo iterativo.

6 CONCLUSÕES

Este trabalho apresentou a implementação do método de otimização topológica BESO para problemas de elasticidade tridimensional, aplicando o método multigrid geométrico como pré-condicionador dos gradientes conjugados para resolução do sistema de equações lineares. Foi feito um estudo paramétrico para avaliar como os principais parâmetros do método BESO influenciam na topologia, função objetivo e tempo de processamento.

Verificou-se que a taxa evolucionária (ER) possui maior influência na quantidade de iterações e no tempo de processamento, pois ao diminuir o valor deste parâmetro, mais iterações são necessárias para atingir a restrição de volume. Já a fração de volume (f_v) possui influência nos três itens avaliados, pois ao diminuir a quantidade de material, mais iterações são necessárias e maior é a flexibilidade média.

O filtro de sensibilidades empregado garante que as soluções otimizadas possuam independência de malha, desde que o valor de r_{min} seja uma função da resolução dela. Entretanto, grandes valores de r_{min} podem causar instabilidade. Com respeito ao grau de penalização, foi verificado também que a partir de $p = 4$, tal parâmetro deixa de exercer influência significativa na função objetivo e na topologia da solução.

REFERÊNCIAS

Amir, O., Aeger, N., and Lazarov, B.S. On multigrid-CG for efficient topology optimization.

- Structural and Multidisciplinary Optimization*, 49:815-829, 2014.
- Amir, O., Sigmund, O., Lazarov, B.S., and Schevenels, M. Efficient reanalysis techniques for robust topology optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 245:217-231, 2012.
- Amir, O., Stolpe, M., and Sigmund, O. Efficient use of iterative solvers in nested topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 42:55-72, 2010.
- Bendsøe, M.P., and Sigmund O. *Topology optimization: theory, methods and applications*. Springer, Berlin, 2003.
- Huang, X., and Xie, Y.M. Convergent and mesh-dependent solutions for the bi-directional evolutionary structural optimization method. *Finite Element in Analysis and Design*, 43:1039-1049, 2007.
- Huang, X., and Xie, Y.M. *Evolutionary topology optimization of continuum structures*, 1^a ed. Wiley, New Delhi, 2010.
- Liu, K., and Tovar, A. An efficient 3D topology optimization code written in Matlab. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 50:1175-1196, 2014.
- Loyola, R.A., Querin, O.M., Jiménez, A.G., and Gordo, C.A. A sequential element rejection and admission (SERA) topology optimization code written in Matlab. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 59:1297-1310, 2018.
- Querin, O.M., Steven, G.P., and Xie, Y.M. Computational Efficiency and Validation of Bi-Directional Evolutionary Structural Optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 189:559-573, 2000.
- Saad, Y. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*, 2^a ed., Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003.
- Sigmund, O. On the design of compliant mechanisms using topology optimization. *Mechanics of Structures and Machines*, 25:493-524, 1997.
- Sigmund, O. and Petersson, J. Numerical instability in topology optimization: a survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 16:68-75, 1998.
- Silva, P.U. *Emprego de otimização topológica e CFD no projeto de sistema de contraventamento em ambientes urbanos*. Dissertação – Universidade Federal de Pernambuco, Caruaru, 2022.
- Wallin, M., Ivarsson, N., Amir, O., Tortorelli, D. Consistent boundary conditions for PDE filter regularization in topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 62:1299-1311, 2020.
- Xia, Q., Shi, T., and Xia, L. Stable hole nucleation in level set based topology optimization by using the material removal scheme of BESO. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 343:438-452, 2019.
- Xie, Y.M., and Steven, G.P. A simple evolutionary procedure for structural optimisation. *Computers & Structures*, 49:885-896, 1993.
- Yago, D., Cante, J., Lloberas-Valls, O., and Oliver, J. Topology optimization methods for 3D structural problems: a comparative study. *Archives of Computational Methods in Engineering*, Open Access, 2021.
- Yang, X.Y., Xie, Y.M., Steven, G.P., and Querin, O.M. Bidirectional Evolutionary Method for Stiffness Optimization. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 37:1483-1488, 1999.
- Zhou, M., and Rozvany, G.I.N. On the validity of ESO type methods in topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 21:80-83, 2001.
- Zuo, H.Z., and Xie, Y.M. A simple and compact Python code for complex 3D topology optimization. *Advances in Engineering Software*, 85:1-11, 2015.