

CONDENSACIÓN DINÁMICA EN ETAPAS PARA EL CÁLCULO DE FUNCIONES DE RESPUESTA EN FRECUENCIA EN MODELOS DE ELEMENTOS FINITOS

DYNAMIC CONDENSATION IN STAGES FOR THE COMPUTATION OF FREQUENCY RESPONSE FUNCTIONS IN FINITE ELEMENT MODELS

José A. Inaudi^{a,b} y Aaron Soutadet^{a,b}

^aFacultad de Ingeniería, Universidad Católica de Córdoba, Av. Armada Argentina 3555, Córdoba, Argentina, <http://www.ucc.edu.ar>

^bFacultad de Ciencias Exactas Físicas y Naturales, Universidad Nacional de Córdoba, Av. Vélez Sarsfield s/n, Córdoba, Argentina, jose.antonio.inaudi@unc.edu.ar, <http://www.unc.edu.ar>

Palabras clave: Elementos finitos, condensación, vibraciones, respuesta en frecuencia

Resumen. El estudio de funciones de transferencia de movilidad en dominios de suelo con mallados con elementos finitos de dimensiones grandes motivó el desarrollo de una herramienta computacional específica en el entorno de programación Matlab®. Para estimar funciones de transferencia se desarrollaron elementos finitos paralelepípedos de 20 nodos para ser utilizados en modelos con malla estructurada. El cálculo de las funciones de transferencia de la carga aplicada en un punto del dominio al desplazamiento, velocidad o aceleración de distintos puntos del dominio considerado requiere la solución de un sistema lineal de ecuaciones con la matriz de rigidez dinámica del modelo estructural. Para resolver modelos de gran número de grados de libertad, se implementó una técnica de condensación por etapas que resuelve el sistema de ecuaciones lineales con una secuencia de soluciones de sistemas de menor dimensión, haciendo viable la modelación y estimación de funciones de transferencia de movilidad en dominios de suelo y/o estructuras. En este trabajo se describen los algoritmos de solución mediante condensación dinámica por etapas en base subestructuras de macro-paralelepípedos y mediante la condensación por listas de grados de libertad secuenciales. Se describe además una aplicación de la técnica a un problema de optimización de una estructura de la industria minera sometida a carga armónica y sujeta a restricciones de niveles de aceleración inducidos.

Keywords: Finite Elements, condensation, vibrations, frequency response function

Abstract. The study of frequency response functions in soil domains with relatively large finite element meshes motivated the development of a specific computational-mechanic tool in the Matlab® environment described in this paper. To this purpose a 20-node parallelepiped finite element for structured mesh was developed. The computation of frequency response functions from loads applied in points of the domain to displacement, velocity or acceleration of points of interest of the modeled domain requires the solution of a linear system of algebraic equations for each frequency of interest. Given the large size of the dynamic stiffness matrix in soil-structure interaction models, a stage condensation technique was implemented, solving a sequence of linear system of equations of significantly smaller sizes. In this paper we describe the main functions of the programming of the stage condensation technique, the algorithms for solution in stages based on substructures (macro-elements) and algorithms based on the condensation of lists of degrees of freedom. In addition, we include an application of the software to the optimization of a structure of the mining industry subjected to harmonic loading and induced- acceleration-level constraints.

1 DESARROLLO DE ELEMENTO FINITO PARALELEPIEDO DE 20 NODOS

En este trabajo se presenta el desarrollo de un programa de elementos finitos tridimensionales para el análisis de problemas de vibraciones en dominios de suelo, técnicas de condensación por etapas mediante subestructuras y mediante condensación de listas arbitrarias de grados de libertad para la solución de problemas de gran cantidad de grados de libertad en el dominio de la frecuencia (funciones de transferencia o de respuesta en frecuencia). Se describen además parte de los resultados de un estudio de vibraciones inducidas en una estructura de la industria minera para el cual se utilizó la herramienta desarrollada.

Mediante el uso de un procesador simbólico en Matlab® se desarrolla un elemento finito de 20 nodos para mallas estructuradas de paralelepípedos. Este elemento tiene 8 nodos en los vértices del cubo y 12 nodos que se ubican a mitad de cada arista. En coordenadas isoparamétricas (ξ, η, ζ) las 20 funciones de interpolación utilizadas son:

$$\begin{aligned} N_j &= \frac{1}{8}(1 + \xi_j \xi)(1 + \eta_j \eta)(1 + \zeta_j \zeta)(\xi_j \xi + \eta_j \eta + \zeta_j \zeta - 2) \quad j = 1, \dots, 8 \\ N_j &= \frac{1}{4}(1 - \xi^2)(1 + \eta_j \eta)(1 + \zeta_j \zeta) \quad j = 10, 12, 14, 16 \\ N_j &= \frac{1}{4}(1 - \eta^2)(1 + \xi_j \xi)(1 + \zeta_j \zeta) \quad j = 9, 11, 13, 15 \\ N_j &= \frac{1}{4}(1 - \zeta^2)(1 + \xi_j \xi)(1 + \eta_j \eta) \quad j = 17, 18, 19, 20 \end{aligned} \quad (1)$$

Se adopta como un modelo constitutivo lineal de material isótropo:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon} \quad (2)$$

donde $\boldsymbol{\sigma}$ y $\boldsymbol{\epsilon}$ representan vectores columna que contienen las 6 componentes de tensión y de deformación específica, respectivamente, que actúan en un punto cualquiera del sólido. La matriz \mathbf{D} de 6×6 define la relación constitutiva del material elástico lineal función del módulo de elasticidad E y el coeficiente de Poisson ν .

El vector de deformaciones puede ser expresado de manera conveniente mediante el producto de una matriz de operadores diferenciales \mathbf{L} por el vector de campos de desplazamientos del punto en cuestión

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{L} \mathbf{U} \quad (4)$$

en donde el operador diferencial \mathbf{L} aplicado sobre el vector de campos de desplazamientos \mathbf{U} compuesto por los campos de desplazamiento del dominio del elemento finito en las tres direcciones. Este vector se expresa mediante interpolación de los desplazamientos nodales \mathbf{u} , combinando las funciones de forma definidas

$$\mathbf{U} = \mathbf{N} \mathbf{u} \quad (5)$$

donde \mathbf{N} es el siguiente arreglo matricial

$$\mathbf{N} = [\mathbf{N}_1 \ \mathbf{N}_2 \ \mathbf{N}_3 \ \dots \ \mathbf{N}_{20}]$$

$$\mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \quad (6)$$

Operando, podemos expresar

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{L} \mathbf{N} \mathbf{u} = \mathbf{B} \mathbf{u} \quad (7)$$

con $\mathbf{B} = \mathbf{L} \mathbf{N}$. Finalmente para construir las matrices de masa y de rigidez del elemento en coordenadas locales, utilizamos las expresiones correspondientes a las energías de deformación V y energía cinética T del elemento finito

$$V = \frac{1}{2} \int_{V_e} \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon} dV \quad T = \frac{1}{2} \int_{V_e} \dot{\mathbf{U}}^T \rho \dot{\mathbf{U}} dV \quad (8)$$

Reemplazando las ecuaciones 5 y 7 en la Ec. 8 obtenemos

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \left(\int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \right) \mathbf{u} \quad T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}^T \left(\int_{V_e} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} dV \right) \dot{\mathbf{u}} \quad (9)$$

De donde se deducen las matrices de rigidez \mathbf{k}_e y masa \mathbf{m}_e del EF

$$\mathbf{k}_e = \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} |det(\mathbf{J})| d\xi d\eta d\zeta \quad (10)$$

$$\mathbf{m}_e = \int_{V_e} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} dV = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} |det(\mathbf{J})| d\xi d\eta d\zeta \quad (11)$$

donde $|det(\mathbf{J})|$ es el determinante del Jacobiano que se incluye en la integración debido el cambio de coordenadas naturales a iso-paramétricas.

El vector de fuerzas nodales del elemento finito se obtiene planteando el trabajo virtual de las fuerzas externas de cuerpo y de frontera, mediante las integrales de volumen y superficie

$$\delta W = \int_{V_e} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{N}^T \mathbf{f}_b dV + \int_{S_e} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{N}^T \mathbf{f}_s dS \quad (12)$$

Definiendo $\mathbf{F}_b = \int_{V_e} \mathbf{N}^T \mathbf{f}_b dV$ y $\mathbf{F}_s = \int_{S_e} \mathbf{N}^T \mathbf{f}_s dS$ resulta

$$\delta W = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{F}_b + \delta \mathbf{u}^T \mathbf{F}_s = \delta \mathbf{u}^T (\mathbf{F}_b + \mathbf{F}_s) = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{F}_e \quad (13)$$

Por lo que las fuerzas generalizadas (equivalentes de nodo) se calculan como

$$\mathbf{F}_e = \int_{V_e} \mathbf{N}^T \mathbf{f}_b dV + \int_{S_e} \mathbf{N}^T \mathbf{f}_s dS \quad (14)$$

Utilizando el procesador simbólico de Matlab® se obtienen las expresiones analíticas de las matrices de rigidez y masa del elemento finito desarrollado, ya que para el elemento finito paralelepípedo regular las integrales involucradas en el cálculo de sus elementos pueden realizarse de manera analítica. Las expresiones matemáticas simbólicas se graban en funciones para evaluar numéricamente las matrices de rigidez y masa del elemento finito desarrollado y un ensamblador global de matriz de rigidez o masa completa el desarrollo de la herramienta computacional. Mediante el ensamble de los arreglos elementales y la elección de condiciones de contorno adecuadas se tiene obtiene el modelo de Elementos Finitos lineal que permite calcular las respuestas del sistema ante sollicitaciones de distinta naturaleza.

2 CONDENSACION DINAMICA POR ETAPAS

En aplicaciones que requieren el cálculo de funciones respuesta en frecuencia (FRF) de cargas a desplazamientos u otras salidas de interés, debe calcularse la matriz de rigidez dinámica. Dado que en problemas de vibraciones de estructuras con interacción con suelo los modelos generalmente tienen un gran número de grados de libertad, el cálculo de FRF de cargas en determinados grados de libertad a un conjunto de desplazamiento puede realizarse en etapas, mediante técnicas de condensación. Esto permite resolver problemas lineales de un gran número de grados de libertad como muchos problemas de pocos grados de libertad.

La descomposición de dominios y la sub-estructuración de mallas de elementos finitos han sido utilizadas en análisis estructural por elementos finitos desde el comienzo del desarrollo de la técnica de EF, fundamentalmente motivado por la disponibilidad de poca memoria en las computadoras (Nikishkov, 2007). El uso actual de procesadores en paralelo en el cálculo de operaciones por elemento es una estrategia más reciente para reducir tiempo de cálculo. Técnicas de sub-estructuración y uso de macro-elementos pueden aportar significativamente en este sentido.

Para aplicar estas técnicas en el análisis en el dominio de la frecuencia, se conformaron macro-elementos distinguiendo nodos principales y nodos secundarios, para luego, efectuar una partición de la ecuación de movimiento del modelo lineal en frecuencia que permitirá la reducción de los grados de libertad. Por ejemplo, para vibración forzada con cargas generalizadas asociadas a un subconjunto de desplazamientos u_c , se puede expresar la ecuación de movimiento mediante particiones de las matrices de masa y rigidez de la siguiente manera:

$$\left(\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} - \bar{\omega}^2 \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} u_c \\ u_s \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_c \\ u_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_w \\ 0 \end{pmatrix} F(\bar{\omega}) \quad (15)$$

En donde u_c y u_s son los desplazamientos del modelo reducido y desplazamiento condensados, respectivamente y L_w es el vector de influencia de la carga externa aplicada, $F(\bar{\omega})$.

Dado $S_{21}u_c + S_{22}u_s = 0$, se demuestra que mediante una transformación de la forma $\begin{pmatrix} u_c \\ u_s \end{pmatrix} = T u_c$ con

$$T = \begin{bmatrix} I \\ -S_{22}^{-1}S_{21} \end{bmatrix} \quad (16)$$

donde I es la matriz identidad, el sistema de ecuaciones en Eq. 15 puede reducirse a:

$$\tilde{S}(\bar{\omega}) u_c = L_w F(\bar{\omega}) \quad (17)$$

donde $\tilde{S}(\bar{\omega})$ es la matriz de rigidez dinámica condensada:

$$\tilde{S}(\bar{\omega}) = T^T S(L_F) T = S_{11} - S_{12} S_{22}^{-1} S_{21} \quad (18)$$

Obtenida la matriz de rigidez dinámica condensada se puede calcular la función respuesta en frecuencia de las cargas F_c a los desplazamientos u_c , resolviendo el sistema reducido

$$\tilde{S}(\bar{\omega}) H_{u_c F_c}(\bar{\omega}) = L_w \quad (19)$$

Si bien en este ejemplo se desarrolla la condensación en una sola etapa, las condensaciones pueden realizarse en varias etapas, definiendo conjunto de desplazamientos u_s a condensar en cada etapa. De esta manera, se trabaja con un sistema equivalente con un número de grados de libertad reducido permitiendo resolver el cálculo de funciones respuesta en frecuencia de modelo de un gran número de grados de libertad (>10.000) mediante una técnica de división en problemas de menor tamaño (por ejemplo, 1000). Para desarrollar la condensación en etapas se programaron dos estrategias: (a) macro-elementos y (b) elección de grupos de grados de libertad arbitrarios a condensar por etapa.

En la estrategia de macro-elementos cada uno de éstos se conforma como un paralelepípedo de elementos finitos y los u_c del macro-elemento se definen como los desplazamientos de los nodos exteriores. De esta manera, si se conforman por ejemplo macro-elementos de $2 \times 2 \times 2$ elementos finitos, se tendrán 81 nodos en total, 74 nodos exteriores y 7 nodos interiores. Esto implica un ahorro de 21 grados de libertad, solamente. En general, si se define un macro-elemento regular formado por N_x elementos finitos en dirección X , N_y elementos finitos en dirección Y y N_z elementos finitos en dirección Z , (todos elementos finitos de 20 nodos), entonces la cantidad de nodos totales, internos y externos del macroelemento están dadas por las siguientes expresiones válidas para $N_x \geq 2$; $N_y \geq 2$; $N_z \geq 2$:

$$\begin{aligned} n_{\text{Totales}} &= (3N_z + 4)N_x N_y + N_x(2N_z + 3) + N_z(5N_y + 4) - 1 \\ n_{\text{Interiores}} &= N_x N_y(3N_z - 2) + N_x(2N_z - 9) + N_y(5N_z - 4) - 11 \\ n_{\text{Exteriores}} &= 6N_x N_y + 4(N_z + N_y + 3N_x) + 10 \end{aligned} \quad (20)$$

La **Tabla 1** muestra la reducción factible en la cantidad de grados de libertad del macro-elemento mediante condensación dinámica para macro-elementos de distintos tamaños. Evidentemente, en la medida que el macro-elemento contenga más elementos finitos, mayor resultará la eficiencia en reducción de grados de libertad del modelo.

Tabla 1 Nodos y Grados de Libertad en el modelo original y condensado

Tamaño Macro-elemento	Nodos Totales	Nodos Exteriores	Nodos Interiores	GDL Originales	GDL Modelo Condensado	Reducción de grados de libertad
4 × 4 × 4	395	186	209	1185	558	53%
5 × 5 × 5	684	260	424	2052	780	62%
10 × 10 × 10	4169	810	3359	12507	2430	81%
15 × 15 × 15	12704	1660	11044	38112	4980	87%
20 × 20 × 20	28539	2810	25729	85617	8430	90%

Se programó además la técnica de condensación para la solución por etapas del problema lineal requerido para calcular la función respuesta en frecuencia de fuerza a velocidad o aceleración en estudios de propagación de vibraciones en modelos de elementos finitos que incluyen amortiguamiento viscoso o modelos de visco-elasticidad lineal. En este caso la matriz de rigidez dinámica y el vector de carga del modelo de elementos finitos completo se condensa por etapas a cada frecuencia de interés para resolver el problema lineal de la función de transferencia o respuesta en frecuencia en etapas, permitiendo esto resolver mallados de gran número de grados de libertad. Definiendo la matriz de rigidez dinámica

$$S(\omega) = -\omega^2 M + j\omega C + K + S_{ve}(\omega) \quad (21)$$

donde M , C , K y S_{ve} son la matrices de masa, amortiguamiento viscoso, rigidez de elementos elásticos y rigidez dinámica de elementos visco-elásticos, respectivamente. La función respuesta en frecuencia de carga aplicada a los desplazamientos en los grados de libertad del modelo se expresa como un sistema lineal de ecuaciones en el vector $H_{uw}(\omega)$

$$S(\omega)H_{uw}(\omega) = L_w \quad (22)$$

donde L_w es el vector de influencia de la carga de interés.

La resolución de este sistema de ecuaciones se desarrolla en etapas mediante condensación dinámica, y se completa el cálculo del vector H_{uw} mediante solución de un sistema reducido de grados de libertad. En el caso de sistemas de un gran número de GL (>10000) formulamos la solución del mismo por etapas, condensando en cada etapa un conjunto de N de grados de libertad (por ejemplo con N entre 500 a 1000) y resolviendo el sistema de ecuaciones completo mediante la resolución de múltiples sistemas de ecuaciones de orden N .

En la sección 3 se describen la programación desarrollada y en la sección 4 se muestran los resultados de la aplicación de esta metodología y del software desarrollado en el ámbito de un problema de optimización estructural de un pórtico de hormigón sometido a cargas armónicas.

3 BREVE DESCRIPCION DE PROGRAMACION

En esta sección se describe el algoritmo programado en Matlab para la resolución de problemas lineales generales mediante solución por condensación por etapas y sus potenciales aplicaciones. A continuación se muestra el código de la función `sesolve_in_stages.m` comentado para una mejor interpretación. Esta función utiliza la función `sekcuc.m` para el cálculo de matrices condensadas en cada etapa, también descripta a continuación.

```
% SESOLVE_IN_STAGES:
% [u,Kc,Fc,stages]=sesolve_in_stages(K,F,stages)
```

```

% Resolución mediante condensación por etapas un problema lineal general del tipo
%                                     K u = F
% Input variables:
%   K, F           Matrices para la solución del problema lineal: K u = F
%   stages(i).dofs Estructura de datos de grados de libertad (dofs) a condensar
%                   por etapa i
%
% Output variables:
%   u              Solución obtenida por condensación por etapas (vector completo
%                   conordenamiento inicial de grados de libertad.
%   stages(i).Lusuc Stage i matrix   u(i) = Lusuc u_rest(i) + dusFs
%   stages(i).dusFs Stage i matrix
%
%   Kc condensed stiffness matrix for stages(end).dofs
%   Fc condensed load vector for stages(end).dofs

function [u,Kc,Fc,stages]=sesolvestages(K,F,stages)

%% Generamos de listado completo de dofs en nomenclatura original de K
N_stages=length(stages);
alldofs=[];
for i=1:N_stages
    alldofs=[alldofs;stages(i).dofs(:)];
end

%% Cambio de ordenamiento de K y F
K=K(alldofs,alldofs); % Sin crear matriz nueva para ahorrar memoria
Fc=F(alldofs,:);     % Sin crear matriz nueva para ahorrar memoria

%% Calculo por etapas 1, ..., N_stages-1
for i=1:N_stages-1
    N=length(K);
    first_local_rest_dof=length(stages(i).dofs)+1;
    rest_local_dofs=[first_local_rest_dof:N];
    [K,Fc,Lusuc,dusFs]=sekuc(K,rest_local_dofs,Fc);% Condensación
    stages(i).Lusuc=Lusuc;
    stages(i).dusFs=dusFs;
end

%% Resolvemos sistema para último vector y asignamos
u_last=K\Fc;
u(stages(N_stages).dofs,:)=u_last;

%% Regeneramos solución de desplazamientos para etapas N_stages-1, ..., 1
for i=N_stages-1:-1:1
    u_lastml=stages(i).Lusuc*u_last+stages(i).dusFs;% Ahorro de memoria
    u(stages(i).dofs,:)=u_lastml;
    u_last=[u_lastml;u_last];
end
Kc=K; % Last stage condensed matrix as output

% SEKUC:
% [Kc,Fc,Lusuc,dusFs]=sekuc(K,kcdofs,F)
%
% Propósito: Matriz de rigidez condensada de una matriz K a un conjunto de
%            grados de libertad definidos por el usuario.
%            La función produce además las cargas condensadas a los grados
%            de libertad kcdofs. Del problema K y = F se obtiene
%
%                                     Kc yc = Fc
% Input variables:
%   K           = Matriz de rigidez [Ny,Ny]
%   kcdofs     = Lista de grados de libertad de la matriz [1,Nyc]
%                de rigidez condensada (enteros positivos)
%                [dof1 dof2 dofi dofNyc]
% Output variables:
%   Kc         = Matriz de rigidez condensada [Nyc,Nyc]
%   Fc         = F - Kcv*inv(Kvv)*Fv

```

```

function [KC, Fc, Lusuc, dusFs]=sekcuc(K, kcdofs, F)
n=length(kcdofs);
nodyn=setdiff([1:N], kcdofs);
if isempty(nodyn)
    KC=K; Fc=F;
else
    KC=K(kcdofs, kcdofs)-K(kcdofs, nodyn)*(K(nodyn, nodyn)\K(nodyn, kcdofs));
    dusFs=K(nodyn, nodyn)\F(nodyn, :);
    Fc=F(kcdofs, :)-K(kcdofs, nodyn)*dusFs;
    Lusuc=-K(nodyn, nodyn)\K(nodyn, kcdofs); % us = Lusuc uc
end

```

La función `sesolve_in_stages.m` permite resolver varios casos simultáneos de carga; permite ordenamiento arbitrario de grados de libertad por lo que es aplicable en modelación por subestructuras; permite extraer modelos de orden reducido. Se puede utilizar también para la resolución de problemas dinámicos del tipo $S(\varpi) H_{uw}(\varpi) = L_w$, por ejemplo en casos de cálculo de FRF (función respuesta en frecuencia) o en algoritmos de aceleración de convergencia de cálculo de modos y frecuencias naturales, $(K - \omega^2 K)\phi = S(\omega) \phi = 0$, de modelos de gran número de grados de libertad, convirtiendo primero el problema en formato de ecuación lineal estándar eligiendo un grado de libertad (por ejemplo el i -ésimo) con valor no nulo del vector propio buscado igualado a 1 y planteando el problema lineal como

$$S(\text{rest_dofs}, \text{rest_dofs}) \phi(\text{rest_dofs}) = -S(\text{rest_dofs}, i) \quad (23)$$

Donde `rest_dofs` es la lista de todos los grados de libertad con excepción del i -ésimo. En este caso las entradas K y F a la función `sesolve_in_stages` son la matriz $S(\text{rest_dofs}, \text{rest_dofs})$ y $S(\text{rest_dofs}, i)$ para obtener la solución mediante condensación por etapas.

Se programó además con una técnica similar a la utilizada en la función `sesolve_in_stages.m` la técnica de condensación dinámica por macro-elementos. En este caso se condensan los desplazamientos de nodos interiores de cada macro-elemento de paralelepípedos para obtener las matrices de rigidez estática o dinámica según interese, asociada a los desplazamientos de nodos del contorno de cada macro-elemento, que se ensamblan en la matriz de rigidez estructural en los desplazamientos de nodos de contornos de macro-elementos. Esto permite una reducción de orden del modelo, manteniendo precisión en el cálculo de funciones respuesta en frecuencia o en la resolución de problemas lineales estáticos. Como se comentó en la Sección 1, la reducción de orden del modelo al aplicar esta técnica depende fundamentalmente de la cantidad de nodos interiores de cada macro-elemento en relación a la cantidad de nodos totales del modelo estructural (ver Tabla 1).

4 APLICACION A UNA OPTIMIZACION ESTRUCTURAL

En esta sección se describe una aplicación de la condensación dinámica a un proyecto de consultoría. La estructura que se muestra en la [Figura 1](#) fue diseñada para ser construida en un proyecto minero en Australia Occidental. El objetivo del estudio fue optimizar la estructura de hormigón (reducir el volumen de hormigón) de apoyo de 3 Trituradoras de Cono (*Cone Crushers*), considerando los niveles de vibraciones inducidas en las plataformas de la estructura de hormigón por estos equipos y el eventual impacto en la salud de los trabajadores que se encuentran en las plataformas durante la operación de las Trituradoras de Cono. Las restricciones de aceleración máxima total admisible para operarios sobre las plataformas definidas en normas específicas. Este estudio considera los siguientes parámetros de optimización: Espesor de la losa de hormigón (TCS), Volumen de hormigón de la cimentación (CFV) y módulo de corte del relleno a utilizar en la fundación de la estructura

(GIF), con la restricción en niveles de aceleración sobre la losa de estructura máxima total de todo el cuerpo (*whole-body total maximum acceleration*) como se define en los estándares australianos con operación simultánea de 2 o 3 Trituradoras de Cono con una exposición del trabajador de 8 hs/día.

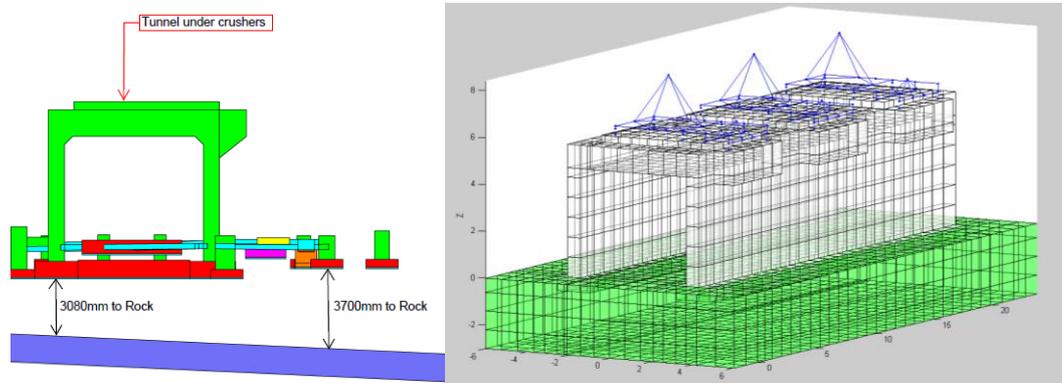


Figura 1. Modelo suelo-estructura incluyendo triturados de cono (*cone crushers*).

Las cargas dinámicas aplicadas por los aisladores en la estructura de soporte (punto de sujeción y apoyo de los aisladores) se definen en magnitud y frecuencia en la Tabla 2. No resulta necesario modelar la interacción equipos-estructura. Esta hipótesis es precisa si el sistema estructura-fundación tiene una frecuencia fundamental significativamente más alta (del orden del doble o más) que los 3,83 Hz (frecuencia operativa principal de la trituradora de cono) y la masa/rigidez de la estructura de hormigón es significativamente grande. Las cargas se aplican en los nodos del modelo de EF definidos para los 18 soportes de aisladores.

Tabla 2. Cargas armónicas de diseño en apoyos definidas por el proveedor de trituradoras de cono

Foundation loads (kN)	Static load machine	Static load material	Dynamic load during normal operation $f = 3,83$ Hz		Dynamic load during start/stop	
	Vz	Vz	H	Vz	H	Vz
A2	220	37	15	± 20	55	± 80
A3	220	37	15	± 20	55	± 80
B1	235	37	15	± 20	55	± 80
B2	235	37	15	± 20	55	± 80
C1	35	0	4	± 6	15	± 25
C4	35	0	4	± 6	15	± 25

Vz = vertical load, positive downwards
H = horizontal loads (all horizontal directions)
Rock volume = $8,0 \text{ m}^3$, density = 1900 kg/m^3

Los niveles de aceleración RMS en la plataforma del marco de hormigón para carga armónica se estiman con un modelo de EF del marco y suelo de fundación con cargas aplicadas por los aisladores en las plataformas de hormigón sobre el marco. Este estudio se centró en las restricciones definidas por la aceleración máxima total de todo el cuerpo, tal como se define en las normas australianas AS26701.1 y AS26701.2. Estas normas indican en su sección de evaluación de la exposición humana a WBV (*whole body vibration*) que el nivel de vibración se define en términos de la raíz cuadrada media filtrada (RMS) de la aceleración en metros por segundo cuadrado (m/s^2). La medición de la vibración en cada frecuencia recibe una ponderación, ya que algunas frecuencias son más peligrosas que otras para la salud de las personas. La aceleración RMS filtrada puede calcularse en cada componente de frecuencia multiplicando la aceleración RMS en una dirección particular (rms_Acc_x , rms_Acc_y o rms_Acc_z) por el valor absoluto de un filtro definido en el dominio de frecuencia para cada

dirección: horizontal (X,Y) y vertical (Z). Para el caso de estudio en el que se analiza una sola componente armónica a 3,83 Hz, los valores del filtro son $w_k=0,631$ para la dirección Z y $w_d=0,776$ para las direcciones X e Y. Las aceleraciones ponderadas en las direcciones X, Y y Z se definen como $WA_x=rms_Acc_x*w_d$, $WA_y=rms_Acc_y*w_d$ y $WA_z=rms_Acc_z*w_k$. En este estudio utilizamos la regla de combinación para TWA (aceleración total ponderada) propuesta en la Sección 7.2.3 de la Norma australiana para una persona sentada o de pie:

$$TWA = \sqrt{(k_x * WA_x)^2 + (k_y * WA_y)^2 + (k_z * WA_z)^2}$$

$$k_x = 1.4; \quad k_y = 1.4; \quad k_z = 1;$$

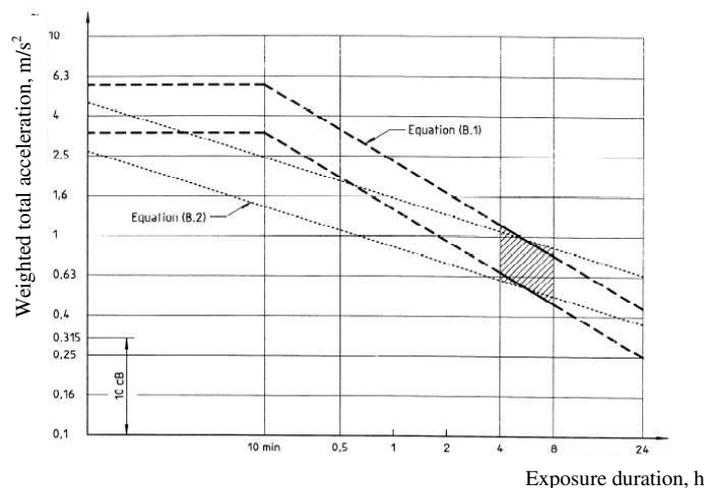


Figure 2. Aceleración total admisible (Admissible total weighted acceleration from Figure B.1 Health guidance caution zones from Australian Standard AS267.1, 2001)

La Figura B.1 de la Norma Australiana en Figura 2 define los valores admisibles de la aceleración total ponderada para evitar impactos en la salud en función del tiempo de exposición a la vibración de todo el cuerpo. Idealmente, los valores de aceleración RMS ponderados totales deberían ser inferiores a $0,4 \text{ m/s}^2$ como zona de advertencia o precaución e inferiores a $0,85 \text{ m/s}^2$ como valor límite de exposición.

3.1 Influencia del módulo de corte del suelo de fundación en frecuencias naturales

Se evalúa el efecto del módulo de corte dinámico del suelo de cimentación (G_d) sobre las frecuencias naturales del marco de hormigón, para comprender la sensibilidad sobre el desempeño de la vibración inducida de los valores de G_d en el rango de 50 MPa hasta 500 MPa. La Figura 3 muestra las frecuencias naturales estimadas del pórtico sobre suelo/relleno con diferentes valores de módulo de corte dinámico. Para valores de G_d de suelo/relleno por debajo de 50 MPa, la frecuencia estimada cae por debajo de 6 Hz, lo que no resulta recomendable.

GMPa:	50	100	150	200	250
f1 [Hz]	5.9	7.0	7.6	8.0	8.3
f2 [Hz]	8.2	10.2	11.5	12.4	13.1
f3 [Hz]	10.0	13.7	16.4	18.4	20.0
f4 [Hz]	15.0	20.7	24.8	28.0	30.7
f5 [Hz]	16.2	22.2	26.4	29.7	32.2

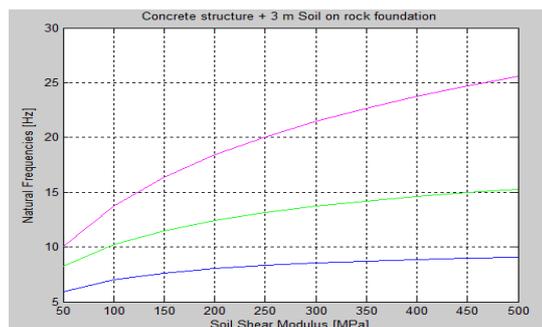


Figura 3. Frecuencias naturales f_1 , f_2 and f_3 en Hertz del modelo de pórtico original como funciones de G_d .

Para estimar la aceleración inducida del marco diseñado para diferentes condiciones de suelo, se desarrolla un análisis paramétrico variando el módulo dinámico de corte del suelo. El desempeño en TMA resulta aceptable para módulos de corte mayores que 75 MPa.

3.2 Modelación de fase entre cargas de trituradoras de cono

Para la estimación de las vibraciones inducidas de las trituradoras de cono sobre la edificación y la cimentación, se estudiaron los siguientes escenarios de fase de carga en cargas armónicas: i) Sin diferencias de fase de múltiples fuerzas de apoyo aplicadas sobre la losa del marco de hormigón, ii) Fase de 90 grados entre X y Y cargas armónicas en cada aislador, y iii) Diferencias aleatorias de fase entre aisladores de diferentes trituradoras de cono.

3.3 Modelo de elementos finitos de la estructura y su fundación

El pórtico de hormigón y el suelo de fundación se modelaron utilizando FE de 20 nodos. La malla, descrita en la Figura 1, consta de 25000 grados de libertad. Al ensamblar las matrices de rigidez y masa del modelo, las primeras 5 frecuencias naturales del modelo para el módulo de corte del suelo de $G_d = 150$ MPa en el suelo se estiman en 7.62, 11.46, 16.36, 24.82, 26.44 Hz. La aceleración rms ponderada en las direcciones X, Y y Z en los 18 puntos de aplicación de la carga (asumiendo todas las cargas en fase) se estimó utilizando la técnica de condensación multi-etapa para calcular las FRF de las cargas aplicadas a la aceleración de los puntos de aplicación de las cargas. Los resultados confirman valores de TWA del orden de $0,1 \text{ m/s}^2$, lo que significa que existe un margen significativo al valor límite de $0,4 \text{ m/s}^2$.

Para analizar el efecto sobre el desempeño de una fase aleatoria entre fuerzas aplicadas en los apoyos de cada trituradora de cono, se realiza una simulación de Monte Carlo asumiendo fase aleatoria uniforme entre cargas de diferentes trituradoras y asumiendo cargas en Y aplicadas con 90 grados de fase con respecto a cargas en dirección X en cada apoyo. En la Figura 4 se describe un histograma de los valores TWA simulados.

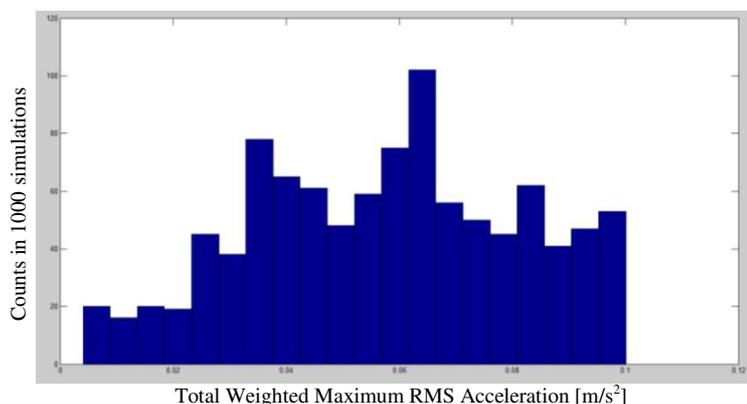


Figura 4. Histograma de la aceleración total ponderada (*total weighted RMS acceleration*) para fases aleatorias entre las fuerzas de las 3 trituradoras de cono (1000 simulaciones).

Como era de esperar, los valores tienen como límite superior los valores calculados sin diferencias de fase (del orden de $0,1 \text{ m/s}^2$). Los resultados obtenidos para el marco en un suelo/relleno de 3 m de profundidad con $G_d = 150$ MPa y para la carga armónica a 3,83 Hz confirman que existe un margen relativamente alto entre el rendimiento estimado para 3 trituradoras en operación y el límite recomendado de $0,4 \text{ m/s}^2$ definido para 8 horas/día de exposición por normativa. Si solo operan dos trituradoras simultáneamente, el TWA no supera los $0,08 \text{ m/s}^2$ para el marco diseñado en suelo con $G_d = 150$ MPa. Naturalmente, el margen con respecto a $0,4 \text{ m/s}^2$ es mayor en este caso, en comparación con el caso de 3 trituradoras en funcionamiento.

4.3 Modificaciones de la geometría del pórtico de hormigón

Dado que la aceleración RMS total de las plataformas de pórtico es significativamente menor que el valor límite de precaución de impacto en la salud ($0,4 \text{ m/s}^2$), se exploran los cambios en los niveles inducidos por vibración y las frecuencias naturales que produciría una reducción del volumen de hormigón del diseño original. Manteniendo invariantes las superficies externas de la estructura, se explora una reducción del espesor de la losa y una reducción del espesor de los muros. No se reduce la sección transversal de la fundación porque esto produciría una reducción significativa en las frecuencias naturales (lo que determinaría la posibilidad de respuesta cercana a la resonancia con la excitación de los equipos). Se presentan las frecuencias naturales y la aceleración total ponderada y el centro de masa de la losa para 4 modelos de la estructura de hormigón para suelo con $G_d = 150 \text{ MPa}$.

Modelo 0. Sin modificaciones de geometría respecto al diseño original.

Frecuencias naturales [Hz]: 7.4, 11.3, 15.9, 22.6, 23.7
Desempeño TWA@CM: **0.1457** m/s^2

Con un módulo de corte suelo/relleno del orden de 150 MPa obtendríamos una frecuencia fundamental cercana a los 7 Hz. El modelo de carga en este caso es de 3 trituradoras operando a 3,83 Hz con todas las cargas aplicadas en un solo punto de la losa (centro geométrico de la superficie superior de la losa) da una aceleración ponderada total RMS significativamente menor que el valor admisible de $0,4 \text{ m/s}^2$ durante 8 horas de exposición.

Modelo 1. Reducción del espesor de la losa de 0,3 m y sin cambios en el espesor de la pared

Frecuencias naturales [Hz]: **8.1432**, 14.0820, 17.1904, 22.9586, 24.9434

Observamos un aumento significativo en la primera frecuencia natural, en comparación con el Modelo 0. En términos de desempeño en aceleración TWA@CM = **0.1399** m/s^2

El desempeño en aceleración ponderada total no cambia significativamente respecto de 0.1457 m/s^2 del Modelo 0.

Modelo 2. Reducciones de espesor de losa de 0,3 m y espesor de muros de 0,15 m para reducir aún más el volumen de hormigón.

Frecuencias naturales [Hz]: 6.80, 13.88, 17.67, 23.36, 24.68

Se observa una reducción de la primera frecuencia natural, en comparación con el Modelo 0, muy probablemente debido al cambio en el segundo momento de área de las paredes que afecta la primera frecuencia natural, porque este modo de vibración exhibe flexión de la pared con rotaciones seccionales a lo largo de la Y eje. En términos de desempeño en aceleración TWA@CM: 0.2438 m/s^2 . La aceleración ponderada total estimada no supera para este modelo el valor recomendado de $0,4 \text{ m/s}^2$. Este resultado confirma que la combinación de reducción de espesor tanto en la losa como en los muros podría ser una estrategia válida a explorar para el diseño final.

Modelo 3. Reducción del espesor de losa de 0,5 m y sin cambios en el espesor de pared. Se espera que esta modificación geométrica no tenga un efecto significativo sobre la rigidez lateral para el movimiento en la dirección X como se observa en el Modelo 2.

Frecuencias naturales [Hz]: 8.72, 16.74, 18.06, 23.12, 25.83

Observamos un aumento significativo de la primera frecuencia natural, en comparación con el Modelo 0, muy probablemente debido a la reducción significativa de la masa de la losa sin un cambio significativo en la rigidez lateral del modelo original porque en este caso no se

propuso ningún cambio en el espesor de la pared. En términos de desempeño de aceleración $TWA@CM: 0.1425 \text{ m/s}^2$. El rendimiento de aceleración RMS total ponderado de este modelo es del mismo orden que el Modelo 0 original. El Modelo 3 implicaría una reducción significativa del volumen de hormigón del pórtico sin pérdida de desempeño con respecto al Modelo 0.

4.4 Principales conclusiones del estudio de optimización estructural

El diseño original de la estructura de hormigón y su fundación con suelo/relleno de 3 a 4 m de espesor con un módulo de corte dinámico de 150 MPa o mayor, sujeto a las cargas armónicas definidas por el proveedor de la trituradora de cono (Tabla 2) como las cargas aplicadas por las trituradoras, satisface los límites RMS de aceleración máxima ponderada definidos por las normas australianas para evitar impactos en la salud con 8 h de exposición con márgenes de seguridad significativos. Los resultados calculados indican que el diseño actual del marco exhibe márgenes significativos de desempeño en términos de aceleración RMS ponderada total en las plataformas de la estructura para la operación simultánea de 3 trituradoras de cono. Se esperan valores del orden de $0,1 \text{ m/s}^2$ a 0.14 m/s^2 frente al límite de $0,4 \text{ m/s}^2$ prescrito como límite por las normas de impacto en la salud AS2670.1 y AS2670.2 para 8 h/día de exposición (sentado o de pie). Desde el punto de vista de los niveles de vibración aceptables considerando los estándares de salud de las normas australianas, el volumen del marco de hormigón podría reducirse en aproximadamente 50 cm en el espesor de la losa del marco sin una pérdida significativa de rendimiento dinámico en comparación con el diseño original si se define $G_d = 150 \text{ MPa}$. La reducción del espesor de la pared además de la reducción del espesor de la losa podría considerarse desde el punto de vista de la vibración inducida. No se recomienda la reducción del tamaño de la fundación. Este cambio reduciría la rigidez rotacional del pórtico, lo que tendría un efecto significativo reduciendo la primera frecuencia natural del pórtico.

5 CONCLUSIONES

La aplicación de condensación dinámica por etapas permite la solución de funciones de respuesta de frecuencia de grandes modelos FE en Matlab® requeridas para aplicaciones profesionales. Se ha incluido una breve descripción del software FE producido con condensación dinámica en etapas. Se ha presentado además un ejemplo de aplicación del software desarrollado para al estudio de vibraciones inducidas en una estructura sometida a cargas armónicas producidas por equipos mineros y la optimización de la geometría de la estructura.

REFERENCIAS

Nikishkov, G.P. Basics of the Domain Decomposition Method for Finite Element Analysis, *Mesh Partitioning Techniques and Domain Decomposition Methods* (Ed. F. Magoules), Saxe-Coburg, Stirling, Scotland, pp. 119-142, 2007.