

MANEJO DE DATOS APLICADO AL ANÁLISIS DE SÓLIDOS BIDIMENSIONALES

DATA DRIVEN APLICATED TO THE BIDIMENSIONAL ANALYSIS OF SOLIDS

Carlos F. Estrada^a

^a*Departamento de Estructuras, Universidad Nacional de Córdoba, Casilla de Correo 916, Córdoba, Argentina, carlos.estrada@unc.edu.ar, <http://www.efn.unc.edu.ar/departamentos/estruct/>*

Palabras clave: Manejo de Datos, Elementos finitos, problemas bidimensionales .

Resumen. En este trabajo se presenta el análisis de sólidos bidimensionales a través del manejo de datos (DD de su acrónimo en inglés Data Driven) aplicado al método de elementos finitos (DD-FEM). Recientemente se ha intentado modelar el comportamiento de sólidos, sin la necesidad de utilizar un modelo matemático que describa la relación constitutiva entre tensiones y deformaciones. Así surge el concepto de manejar un conjunto de datos, de origen experimental (incluso numérico), y resolver directamente un sistema de ecuaciones de equilibrio que involucren los datos disponibles. Esto evita calibrar un modelo constitutivo y abre la posibilidad de simular nuevos materiales a partir de la información provista por los datos experimentales.

Keywords: Data Driven, Finite elements, two dimensional solids.

Abstract. This work presents the analysis of two-dimensional solids through Data Driven (DD) applied to the finite element method (DD-FEM). Recently, attempts have been made to model the behavior of solids, without the need to use a mathematical model that describes the constitutive relationship between stresses and strains. Thus arises the concept of managing a set of data, of experimental origin (even numerical), and directly solving a system of equilibrium equations involving the available data. This avoids calibrating a constitutive model and opens the possibility of simulating new materials from the information provided by the experimental data.

1. INTRODUCCIÓN

En este trabajo se implementa una herramienta numérica basada en la manipulación de datos bajo un enfoque de elementos finitos (DD-FEM). La idea principal consiste en formular a partir de las ecuaciones de conservación las ecuaciones de equilibrio necesarias, involucrando en los cálculos los datos experimentales (tensiones y deformaciones) del material que constituye el sólido. Así, el nuevo sistema de ecuaciones no requiere de un modelo constitutivo del material. Las leyes de conservación generalmente se derivan de los principios físicos universales mientras que las leyes constitutivas son formuladas en base a la comprensión física y la observación experimental de los materiales. Este último aspecto, que involucra las leyes constitutivas de un material, muchas veces requiere de un proceso de calibración que será más o menos complejo dependiendo del material en cuestión y del modelo constitutivo que se está utilizando para describir su comportamiento. Así, en el DD-FEM se evita por completo el paso de modelado de material constitutivo. La idea original de este nuevo paradigma, al que nos referimos como DD-FEM, fue propuesta por [Kirchdoerfer y Ortiz \(2016\)](#). Siguiendo un enfoque por elementos finitos se confiere la estructura matemática a través de las leyes de equilibrio y restricciones, a lo cual, se le agrega directamente un conjunto de datos \mathcal{D} sobre el material. Este nuevo concepto permite superar las incertidumbres en el proceso de modelado de materiales mediante el uso directo de los datos. Desde este punto de vista, no se incurre en pérdida de información experimental. Desde el punto de vista de elementos finitos, se busca asignar a cada punto de Gauss el estado de un conjunto de datos preespecificado que satisfacen, lo más aproximadamente posible, las leyes de conservación. Así, el problema basado en datos resultante consiste en la minimización de una función de distancia al conjunto de datos sujeto a restricciones esenciales y de las leyes de conservación.

La idea original de [Kirchdoerfer y Ortiz \(2016\)](#) fue propuesta en el marco de elementos de barras lineales. Los mismos autores presentan un trabajo aplicado al análisis dinámico de estructuras con especial énfasis en estructuras de barras (ver [Kirchdoerfer y Ortiz \(2018\)](#)). Otras contribuciones, dentro de aplicaciones en sólidos elásticos fue presentada por [Conti et al. \(2018\)](#). En la misma línea, con aplicaciones a sólidos bidimensionales, dentro del rango elástico, se encuentra el trabajo de [Korzeniowski y Weinberg \(2019\)](#). También, dentro de la mecánica de sólidos, se han desarrollado aplicaciones que incluyen plasticidad, viscoelasticidad y viscoplasticidad. Así, puede verse los trabajos de [Nguyen y Keip \(2018\)](#) y [Eggersmann et al. \(2019\)](#).

A la luz de las diferentes contribuciones desarrolladas en este nuevo paradigma, en este trabajo, se implementa el DD-FEM con énfasis en el análisis lineal elástico de estructuras bidimensionales. Este trabajo está fuertemente inspirado en el trabajo de [Korzeniowski y Weinberg \(2019\)](#). Así, el contenido de este trabajo es el siguiente. En la Sección 2 se presentan las ecuaciones de gobierno. En la Sección 3 se presentan las ecuaciones asociadas al DD-FEM. En la sección 4 se describe el algoritmo DD-FEM. Los resultados numéricos se presentan en la Sección 5. Finalmente en la Sección 6 se resumen las conclusiones del presente trabajo.

2. ECUACIONES DE GOBIERNO

Consideremos un sólido con dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. El balance del momentum lineal se expresa como

$$\operatorname{div}(\sigma) - \mathbf{b} = \ddot{\mathbf{u}} \quad (1)$$

donde ρ es la densidad del material y $\ddot{\mathbf{u}}$ es la aceleración del cuerpo. Para un caso estático la ley de conservación se expresa como

$$\operatorname{div}(\sigma) - \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (2)$$

En este trabajo asumiremos la hipótesis de pequeños deformaciones, luego la medida de deformación es

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}) \quad (3)$$

Utilizando un material lineal elástico que sigue la ley de Hooke, podemos expresar la densidad de energía de deformación como

$$\Psi^e(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{D} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4)$$

donde \mathbb{D} es la matriz constitutiva y depende de las propiedades del material. Puede notarse que en Ec. (4) se requiere de la definición del módulo elástico del material en cuestión. Este aspecto se verá eludido en la siguiente sección. El potencial total de energía se expresa como

$$\Pi = \int_{\Omega} \Psi^e(\boldsymbol{\varepsilon}) d\Omega - W^{ext} \quad (5)$$

Donde W^{ext} es el potencial generado por las fuerzas externas

$$W^{ext} = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} d\Omega \quad (6)$$

Para encontrar el problema variacional se debe tomar $\delta\Pi = 0$, así

$$\mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{f} \quad (7)$$

con

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbb{D} \mathbf{B} d\Omega \quad (8)$$

y el vector de carga

$$\mathbf{f} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}^T \mathbf{t} d\Omega \quad (9)$$

3. MANEJO DE DATOS DD

La diferencia sustancial respecto a las ecuaciones de gobierno descritas en la Sección 2, está centrada en la definición del tensor constitutivo \mathbb{D} . En el DD-FEM dicha tensor, por definición, es puramente numérico. Esto es, sus componentes no necesitan de los valores reales de las propiedades del material que describen. En este trabajo asumimos un material lineal elástico e isótropo. Así, la aproximación por DD-FEM consiste en utilizar la densidad de energía elástica por deformación y la densidad de energía elástica complementaria, respectivamente

$$\Psi^e(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbb{D} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (10)$$

$$\Psi^*(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \mathbb{C} : \boldsymbol{\sigma} \quad (11)$$

donde definimos la siguiente relación entre el tensor constitutivo y su inversa $\mathbb{D} = \mathbb{C}^{-1}$.

A partir de las densidades de energía, se define un funcional de energía local que tiene por objeto encontrar los datos del conjunto \mathcal{D} que mejor se aproximen a los valores reales $(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma})$ minimizando el valor de dicho funcional

$$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}) = \min_{(\boldsymbol{\sigma}^i, \boldsymbol{\varepsilon}^i) \in \mathcal{D}} (\Psi^e(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^i) + \Psi^*(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^i)) \quad (12)$$

Así, el funcional, se calcula en cada punto de Gauss del elemento. Luego, integrando en el dominio elemental, obtenemos la siguiente función de penalización

$$W^{py} = \int_{\Omega} \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}) d\Omega \quad (13)$$

Por si solo la función Ec. (13) no es suficiente, es necesario agregarle una ecuación de equilibrio global $\mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}$ a través de multiplicadores de Lagrange. Esto permite escribir un funcional de la forma

$$W^* = \int_{\Omega} \Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}) - \boldsymbol{\lambda}^T \left(\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \mathbf{f} \right) \quad (14)$$

Tomando el problema estacionario $\delta W^* = 0$ se obtiene un sistema de ecuaciones acopladas en \mathbf{u} , $\boldsymbol{\lambda}$ y $\boldsymbol{\sigma}$ cuyas incógnitas son los tensores de deformación y tensión $(\boldsymbol{\varepsilon}^*, \boldsymbol{\sigma}^*)$ obtenidos del conjunto de datos \mathcal{D} . Luego, del problema variacional se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbb{D} \boldsymbol{\varepsilon}^{*(0)} d\Omega \quad (15)$$

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{f} - \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^{*(0)} d\Omega \quad (16)$$

donde la matriz de rigidez se define como $\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbb{D} \mathbf{B} d\Omega$

4. ALGORITMO DE DD

Para poder hacer uso del algoritmo de DD-FEM un aspecto importante es disponer de un conjunto de datos experimentales definidos en el rango de valores a los cuales va a estar sometido los diferentes puntos de la estructura. Por ejemplo, en la Fig. 1 se muestran valores experimentales de un material lineal elástico isótropo. dichos puntos se corresponden con un ensayo uniaxial y un ensayo de corte puro.

Así, las operaciones de búsqueda en el conjunto de datos \mathcal{D} se realiza según los siguientes pasos:

Paso 1) Asignar en forma aleatoria desde el conjunto de datos \mathcal{D} , para los puntos de Gauss de cada elemento finito, los valores de las componentes del tensor de tensiones y deformaciones, esto es, $\boldsymbol{\varepsilon}_e^{*(0)}$ y $\boldsymbol{\sigma}_e^{*(0)}$.

Paso 2) Resolver el sistema de ecuaciones de equilibrio y penalización (con $\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbb{D} \mathbf{B} d\Omega$ calculada previamente)

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbb{D} \boldsymbol{\varepsilon}^{*(0)} d\Omega \quad (17)$$

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{f} - \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}^{*(0)} d\Omega \quad (18)$$

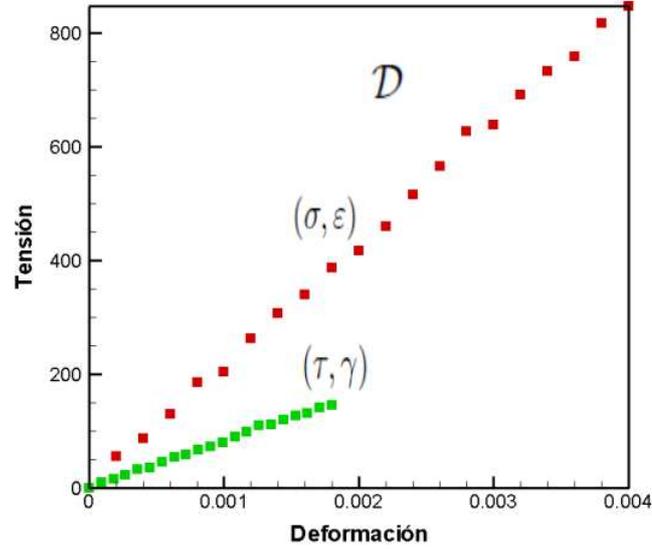


Figura 1: Datos experimentales: curvas tensión vs. deformación.

Paso 3) Se calculan las componentes locales del tensor de tensiones y deformaciones

$$\varepsilon_e = \mathbf{B}_e \mathbf{u}_e, \quad \sigma_e = \sigma_e^* + \mathbb{D} \mathbf{B}_e \lambda_e \quad (19)$$

Paso4) Con los resultados obtenidos en Ec. (19) se procede a buscar el par de datos más cercano en el conjunto de datos \mathcal{D} , con respecto a la norma dada por la densidad de energía local Ec. (10) y Ec. (11)

$$W_e(\varepsilon_e^{(0)} - \varepsilon_e^{*(k+1)}) + W_e(\sigma_e^{(0)} - \sigma_e^{*(k+1)}) \leq W_e(\varepsilon_e^{(0)} - \varepsilon_e^*) + W_e(\sigma_e^{(0)} - \sigma_e^*) \quad (20)$$

Esta operación termina cuando el decremento de Ec. (13) es menor a un valor prefijado.

5. RESULTADOS NUMÉRICOS

En los siguientes ejemplos se muestran resultados numéricos basados en DD-FEM. Todos los ejemplos (estado plano de tensión) utilizan datos de tensiones y deformaciones correspondientes a un material lineal elástico. Para discretizar la geometría se utilizan elementos finitos cuadriláteros de cuatro nodos con interpolación bilineal. Resulta importante resaltar que del conjunto de datos, se extrae en cada paso del algoritmo de la Sección 4, tres pares de datos (σ, ε) . Así, cada par está asociado a las componentes del tensor de tensiones de un estado plano de tensiones, esto es, $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$ y las correspondientes medidas de deformación $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy})$.

5.1. Viga cantilever bajo carga uniformemente distribuida

Este ejemplo consiste en una viga en voladizo de sección rectangular ($h = 1, t = 0, 1$) y una longitud $l = 10$ (ver Fig. 2). En la parte superior se tiene una carga uniformemente distribuida $q = 240$. La geometría se discretiza con 40×4 elementos cuadriláteros. A los fines de comparar los resultados numéricos, se utiliza la solución por elementos finitos como referencia. En este caso se toma el desplazamiento del punto A (extremo libre) con $\delta = 0, 176$

En la Tabla 1 se muestran los valores de los desplazamientos obtenidos para los diferentes conjuntos de datos y se compara con el valor de referencia. También se muestra el error

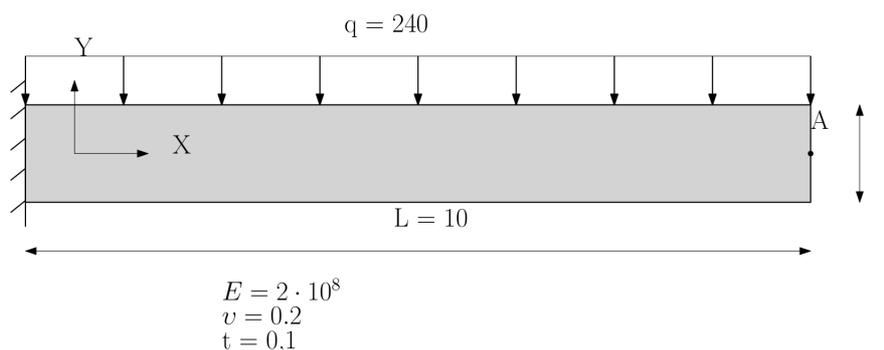


Figura 2: Impacto de dos anillos elásticos. Geometría

cuadrático medio de la densidad de energía de deformación ε_{ECM} . Dicho error se calcula de la siguiente manera

$$\varepsilon_{ECM} = \sqrt{\frac{\int_{\Omega} \Psi^e(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_{ref}) d\Omega}{\int_{\Omega} \Psi^e(\boldsymbol{\varepsilon}_{ref}) d\Omega}} \quad (21)$$

donde $\boldsymbol{\varepsilon}_{ref}$ es la densidad de energía obtenida por elementos finitos.

Datos NºPuntos	Desplaz. [mm]	ε_{ECM} %
$\mathcal{D}(21^3)$	0,160	0,239
$\mathcal{D}(41^3)$	0,168	0,174
$\mathcal{D}(81^3)$	0,172	0,038
FEM	0,176	—

Tabla 1: Desplazamiento y error cuadrático medio para diferentes conjuntos de datos.

En dicha tabla, puede notarse como el desplazamiento converge a la solución de referencia y a su vez, el error cuadrático medio disminuye a medida que las ecuaciones se enriquecen con más datos.

En la Fig. 3 se muestra el campo de tensiones normales σ_x para dos conjuntos de datos $\mathcal{D}(21)$ y $\mathcal{D}(81)$, respectivamente y para una solución por elementos finitos. En la misma figura se muestra la geometría final deformada de la viga. Puede observarse como el campo de tensiones normales obtenido por DD-FEM se aproxima a la solución provista por FEM a medida que se trabaja con mayores cantidad de puntos experimentales. Cabe notar que el número de datos es igual a tres veces el valor indicado en la figura, debido a las componentes de los tensores del estado plano.

5.2. Placa con orificio

Este ejemplo analiza una placa con un orificio en el medio sujeta a una carga p aplicada en sus extremos. En la Fig. 4(a) se muestra la geometría utilizada. Debido a la simetría del problema se modela un cuarto de la geometría (ver Fig. 4(b)). Se utilizaron 1559 elementos finitos. Se compara el valor de la tensión normal σ_y para un punto A ubicado en el borde del orificio. Así, se ha tomado como valor de referencia la tensión normal $\sigma_y = 646$ MPa. El valor de referencia se compara con la solución obtenida por DD-FEM para diferentes conjuntos de datos.

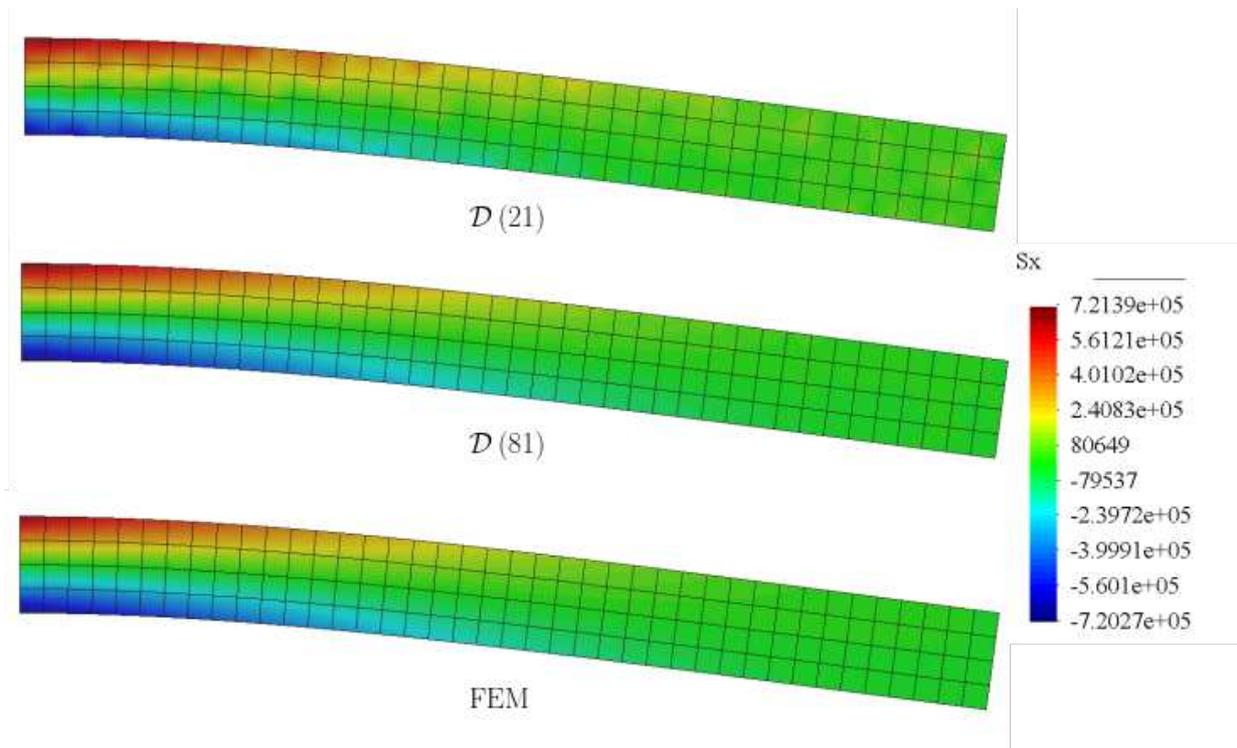


Figura 3: campo de tensiones normales σ_x y geometría deformada.

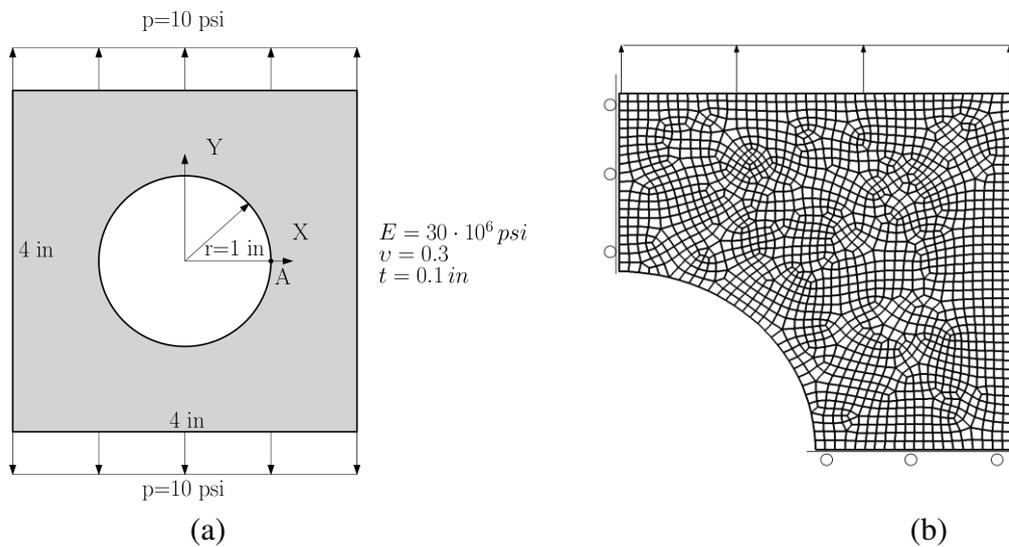


Figura 4: Placa con orificio a) Geometría b) Malla de elementos finitos.

En la Tabla 2 se muestra el valor de la tensión σ_y para cada conjunto de datos. En la misma tabla se calcula el error cuadrático medio de la densidad de energía complementaria, a través de la siguiente expresión

$$\sigma_{ECM} = \sqrt{\frac{\int_{\Omega} \Psi^e(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_{ref}) d\Omega}{\int_{\Omega} \Psi^e(\boldsymbol{\sigma}_{ref}) d\Omega}} \tag{22}$$

donde $\boldsymbol{\sigma}_{ref}$ es la densidad de energía complementaria obtenida por elementos finitos.

Los resultados mostrados sobre la tensión normal dejan prever una convergencia de la solu-

Datos NºPuntos	Tensión [MPa]	σ_{ECM} %
\mathcal{D} (21)	675,8	0,142
\mathcal{D} (41)	667,4	0,070
\mathcal{D} (81)	668,4	0,058
\mathcal{D} (101)	659,6	0,030
FEM	646,1	—

Tabla 2: Tensión normal y error mínimo cuadrático para diferentes conjunto de datos.

ción obtenida por DD-FEM a medida que se va enriqueciendo el conjunto de datos con mayor cantidad de puntos. Puede verse en la Fig. 5 el campo de tensiones normales σ_y para la solución obtenida por DD-FEM (correspondiente al conjunto de datos \mathcal{D} (101)) y la solución por elementos finitos. Los resultados obtenidos por DD-FEM muestran una distribución similar al FEM, sin embargo, puede apreciarse que el campo de tensiones obtenido por DD-FEM en algunas zonas de la placa es difuso. Dicho comportamiento se mejora con mayor cantidad de datos experimentales.

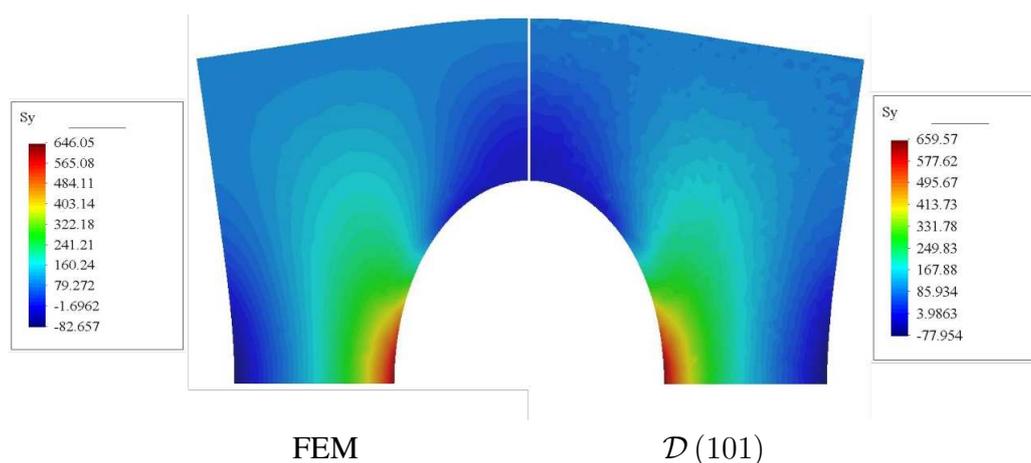


Figura 5: Campo de tensiones normales σ_y y geometría deformada.

6. CONCLUSIONES

Se ha llevado a cabo un análisis bidimensional sobre sólidos utilizando una formulación basada en DD-FEM. En este trabajo, todos los problemas se simularon en el régimen lineal elástico. El método no requiere de la deficiencia de las propiedades reales del material. Se utiliza toda la información proveniente de los datos experimentales. Al resolver el sistema de ecuaciones (dos ecuaciones lineales acopladas) la solución depende de la búsqueda de datos óptimos dentro del conjunto de datos \mathcal{D} . La calidad de la solución depende de la cantidad de datos disponible. A los fines de obtener una solución aceptable se debe disponer de datos que cubran el rango de tensiones y deformaciones a los que puede estar sometida la pieza o elemento estructural. A mayor cantidad de datos, el tiempo de cálculo es mayor en comparación con la solución obtenida por elementos finitos. DD-FEM es una herramienta numérica que puede ser interesante en la etapa de prediseño estructural y cuando se dispone de algunos datos experimentales provenientes de ensayos.

AGRADECIMIENTOS

El autor agradece el apoyo financiero de la Universidad Nacional de Córdoba (a través de SeCyT).

REFERENCIAS

- Conti S., Muller M., y Ortiz M. Data-driven problems in elasticity. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 2018.
- Eggersmann R., Kirchdoerfer T., Reese S., Stainier L., y Ortiz M. Model-free data-driven inelasticity. *Comput. Struct.*, 350:81–99, 2019.
- Kirchdoerfer T. y Ortiz M. Data-driven computational mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 304:81–101, 2016.
- Kirchdoerfer T. y Ortiz M. Data-driven computing in dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 113:1697–1710, 2018.
- Korzeniowski T. y Weinberg K. A comparison of stochastic and data-driven fem approaches to problems with insufficient material data. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 350:554–570, 2019.
- Nguyen L. y Keip M.A. A data-driven approach to nonlinear elasticity. *Comput. Struct.*, 194:97–115, 2018.