

UN ELEMENTO DE SÓLIDO-LÁMINA TRIANGULAR CUADRÁTICO USANDO POLINOMIOS DE BEZIER

A QUADRATIC BEZIER TRIANGULAR SOLID-SHELL FINITE ELEMENT

Fernando G. Flores^a

^a*Universidad Nacional de Córdoba, Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas.
Instituto de Estudios Avanzados en Ingeniería y Tecnología (IDIT) UNC-CONICET. FCEFYN,
Departamento de Estructuras, Av. Velez Sarsfield 1611, 5016 Córdoba, Argentina.
fernando.flores@unc.edu.ar, <http://www.inv.idit.efn.uncor.edu>*

Palabras clave: Elementos Finitos, Triángulo de Bezier, sólido-Lámina

Resumen:

En este trabajo se desarrolla y evalúa un elemento prisma-triangular cuadrático de sólido-lámina utilizando polinomios de Bezier. La formulación incluye: a) una novedosa aproximación de deformaciones impuestas para las componentes membranales, b) una aproximación clásica de deformaciones transversales de corte mixtas impuestas c) una aproximación en deformaciones impuestas mejoradas para la deformación axial transversal. El objetivo principal es tener un elemento de base triangular mas versatil a la hora de mallar y con un buen comportamiento en su plano. Que pueda ser utilizado para la simulación de láminas delgadas, libre de bloqueos debido a membrana, corte transversal, efecto Poisson e incompresibilidad. La utilización de polinomios de Bezier permitiría el uso de una matriz de masa de mayor consistencia con una eventual mejora del comportamiento dinámico Se presentan varios ejemplos en régimen lineal y no lineal geométrico que muestran el comportamiento libre de bloqueo y las buenas características de convergencia del elemento.

Keywords: Keywords: Finite Elements, Bezier Triangle, Solid-Shell

Abstract: In this work, a triangular-prism solid-shell quadratic element using Bezier polynomials is developed and assessed. The formulation includes: a) a novel approximation of assumed natural strain for the membrane components, b) a classical approximation of assumed mixed transverse shear strains c) an enhanced assumed strain approximation for the transverse axial strain. The main target is to have an element with a triangular base, more versatile when meshing and with a good behavior in its plane. An element that can be used for the simulation of thin shells, free of numerical lockings due to membrane, transverse shear, Poisson effect and incompressibility. The use of Bezier polynomials would allow the use of a more consistent mass matrix with an eventual improvement of the dynamic behavior Several examples are presented in geometric linear and non-linear regimes that show the locking-free behavior and the good convergence characteristics of the element.

1. INTRODUCCIÓN

Debido la continua mejora en las facilidades de procesamiento y a la necesidad de mejorar los modelos a los fines de lograr simulaciones más fieles, el uso de elementos de sólidos para simular láminas ha crecido notoriamente. Las principales ventajas que resultan son: a) el uso de relaciones constitutivas tridimensionales y no restringirse a modelos de tensión plana; b) incluir el efecto del contacto correctamente en ambas superficies, en particular cuando hay fricción; c) tratar grandes deformaciones de corte transversal; d) evitar elementos especiales de transición entre mallas que combinan elementos de sólidos y de láminas; e) tratar correctamente contornos no paralelos a la normal a la lámina; f) no utilizar grados de libertad rotacionales que son en general costosos y dificultosos de parametrizar y actualizar.

Los elementos de sólido-lamina desarrollados son principalmente hexaedros de 8 nudos (ver Flores (2016) y las referencias citadas) y unos pocos elementos prismáticos (ver Flores (2013); Wang et al. (2017); Xiong et al. (2018))

La ventaja de los elementos de base triangular es que las mallas presentan elementos con mejor relación de aspecto para geometrías arbitrarias. La ventaja de los elementos hexaédricos es que en general muestran una mayor isotropía y un mejor comportamiento para los elementos más sencillos (8 nudos contra 6 nudos). Por otro lado, el uso de elementos lagrangeanos de mayor orden, que permiten modelar superficies curvas y no facetadas, si bien muestran una mejor convergencia en problemas elásticos, presentan algunas desventajas, i.e.: a) el comportamiento es más sensible a la posición de los nudos intermedios b) no siempre se comportan bien en modelos elastoplásticos con grandes deformaciones c) en problemas dinámicos la matriz de masa diagonalizada, usada en integración explícita y generalmente también en integradores implícitos, conduce a valores nulos en los vértices o negativos al usar la técnica de diagonalización de “suma de la fila”. La razón principal de esto último es que las funciones de forma asociadas con nudos vértices son negativas en parte del elemento. Una de las características de las funciones B-Spline es que además de ser una partición de la unidad son no negativas. Kadapa (2019) utilizó polinomios de Bezier sobre elemento cuadráticos (triángulo y tetraedro cuadráticos) en problemas de elasticidad. Esa idea es aquí aplicada sobre un elemento prismático de base triangular cuadrática. Para evitar el bloqueo típico de los elementos de sólido se utilizan técnicas de deformaciones naturales impuestas (ANS por su acrónimo en inglés) para aliviar el bloqueo por corte transversal y el bloqueo membranal y una aproximación en deformaciones impuestas mejoradas (EAS por su acrónimo en inglés) para evitar el bloqueo por Poisson e incompresibilidad.

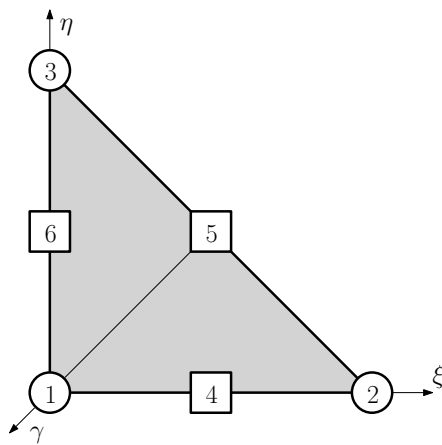
En la siguiente sección se describen los aspectos básicos de la formulación asociados con las funciones de interpolación de desplazamientos, deformaciones y puntos de muestreo de las mismas. En la sección 3 se evalúa el elemento a partir de 4 ejemplos. Finalmente se presentan algunas conclusiones.

2. FORMULACIÓN DEL ELEMENTO

2.1. Configuración

Se trata de un prisma de base triangular con 6 nudos por cara (cuadrático) en interpolación lineal en el espesor. En cada cara externa del elemento, con la numeración indicada en la Figura 1, las funciones de forma N^I locales son como se indica, en tanto que en el espesor se interpola en forma lineal usando las funciones

$$L^1(\zeta) = \frac{1}{2}(1 - \zeta) \quad L^2(\zeta) = \frac{1}{2}(1 + \zeta) \quad (1)$$



$$\begin{aligned}
 N^1(\xi, \eta) &= \gamma^2 = (1 - \xi - \eta)^2 \\
 N^2(\xi, \eta) &= \xi^2 \\
 N^3(\xi, \eta) &= \eta^2 \\
 N^4(\xi, \eta) &= 2\xi\gamma = 2\xi(1 - \xi - \eta) \\
 N^5(\xi, \eta) &= 2\xi\eta \\
 N^6(\xi, \eta) &= 2\eta\gamma = 2\eta(1 - \xi - \eta)
 \end{aligned}$$

Figura 1: Elemento maestro y funciones de interpolación

Donde ξ, η y γ son las coordenadas de área indicadas en la figura.

La configuración queda definida por la posición de cada superficie media

$$\mathbf{X}(\xi, \eta, \zeta) = L^1(\zeta) \sum_{I=1}^6 N^I(\xi, \eta) \mathbf{X}^I + L^2(\zeta) \sum_{I=1}^6 N^I(\xi, \eta) \mathbf{X}^{I+6} \tag{2}$$

En (2) los \mathbf{X}^I son los puntos de control de cada superficie. Los 3 primeros puntos de control de cada cara coinciden con los vértices, en tanto que los otros coinciden con la mitad de los lados sólo en el caso de lados rectos y puntos a las mitad de los mismos. En el caso de lados curvos, con las coordenadas paramétricas correspondientes a la mitad de cada lado, e indicando con $\bar{\mathbf{X}}$ las coordenadas del centro del lado, la posición del punto de control resulta

$$\mathbf{X}^I = 2 \left[\bar{\mathbf{X}}^I - \frac{1}{4} (\mathbf{X}^J + \mathbf{X}^K) \right] \quad I = 4, 6 \tag{3}$$

donde J y K son los nudos extremos del lado, e inversamente

$$\bar{\mathbf{X}}^I = \frac{1}{4} (2\mathbf{X}^I + \mathbf{X}^J + \mathbf{X}^K) \quad I = 4, 6 \tag{4}$$

La expresión 3 permite imponer condiciones de contorno esenciales en los puntos de control de mitad de lado a partir de desplazamientos conocidos en los nudos de la malla

$$\mathbf{u}^I = 2 \left[\bar{\mathbf{u}}^I - \frac{1}{4} (\mathbf{u}^J + \mathbf{u}^K) \right] \tag{5}$$

en tanto que la expresión 4 permite conocer las coordenadas del punto medio del lado a partir de los puntos de control en la geometría deformada. Esto es necesario, por ejemplo, para establecer condiciones de contacto en el contorno.

Por otro lado sobre la superficie media se define un sistema local con las siguientes características: Las direcciones \mathbf{t}_1^0 y \mathbf{t}_2^0 son ortogonales entre si y se encuentran sobre la superficie equidistante de las dos externas ($\zeta = 0$), que junto con la normal \mathbf{t}_3^0 a ambos definen el sistema local.

2.2. Medidas de deformación

A partir del gradiente de la deformación $\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}$ expresado en el sistema local \mathbf{t}_α , se descompone el Tensor derecho de Cauchy-Green \mathbf{C} en componentes covariantes (\mathbf{t}^β la base dual del sistema local) membranales, de corte y normal transversal

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \sum_{\alpha\beta=1}^2 C_{\alpha\beta} \mathbf{t}^\alpha \otimes \mathbf{t}^\beta + \sum_{\alpha=1}^2 C_{\alpha 3} \mathbf{t}^\alpha \otimes \mathbf{t}^3 + C_{3\alpha} \mathbf{t}^3 \otimes \mathbf{t}^\alpha + C_{33} \mathbf{t}^3 \otimes \mathbf{t}^3 \quad (6)$$

$$= \mathbf{C}_m + \mathbf{C}_s + \mathbf{C}_t \quad (7)$$

para las cuales se plantean diferentes aproximaciones a los fines de evitar los bloqueos numéricos

2.2.1. Componente membranal

Sobre cada superficie externa f se plantea una estrategia ANS. Cada componentes de \mathbf{C}_m^f en coordenadas naturales se asume de variación lineal en el plano (8). En los 3 puntos de integración G en el plano se se pasa a componentes cartesianas (9) usando las componentes en el plano \mathbf{J}_P del jacobiano de la interpolación (2) y luego se interpolan en el espesor usando (10).

$$\begin{bmatrix} C_{\xi\xi} \\ C_{\eta\eta} \\ C_{\xi\eta} \end{bmatrix}^f = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta \\ & 1 & \xi & \eta \\ & & 1 & \xi & \eta \end{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_m^f \quad (8)$$

$$\mathbf{C}_m^{fG} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{12} & C_{22} \end{bmatrix}^{fG} = \mathbf{J}_p^{-T} \begin{bmatrix} C_{\xi\xi} & C_{\xi\eta} \\ C_{\xi\eta} & C_{\eta\eta} \end{bmatrix}^{fG} \mathbf{J}_p^{-1} \quad (9)$$

$$\mathbf{C}_m^G(\zeta) = \mathbf{C}_m^{1G} L^1(\zeta) + \mathbf{C}_m^{2G} L^2(\zeta) \quad (10)$$

Para atar los parámetros $\boldsymbol{\beta}_m^f$ en (8) con el campo de desplazamientos (2) se evalúan las deformaciones indicadas en los puntos de muestreo mostrados en la Figura 2.a. Los puntos corresponden a los puntos medios de los lados de cada subtriángulo. Las deformaciones evaluadas allí son las deformaciones axiales tangentes a cada lado.

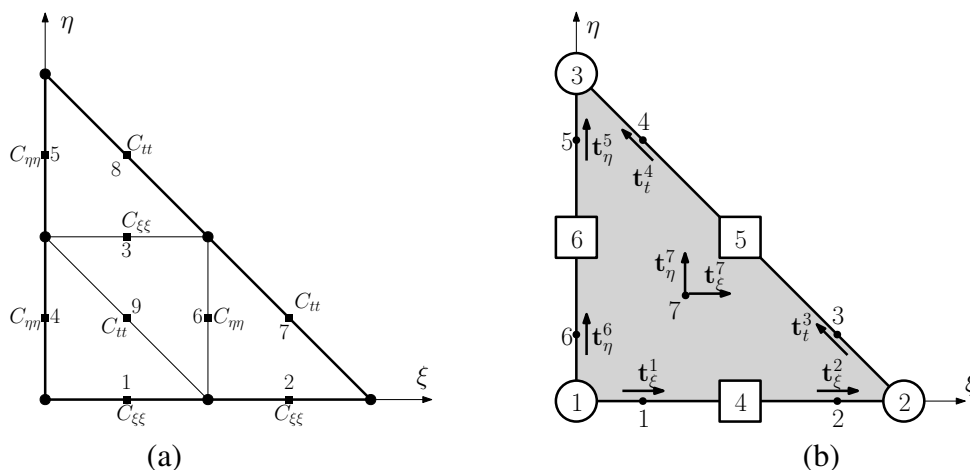


Figura 2: Puntos de muestreo para las componentes de deformación (a) membrana (b) corte transversal

2.2.2. Corte transversal:

En forma similar a la componente membranal, sobre cada superficie externa f se plantea una estrategia ANS. Cada componentes de \mathbf{C}_s^f en coordenadas naturales se asume de variación lineal en el plano (11) Oñate et al. (1992) o una variación cuadrática incompleta (12) Kim y Bathe (2009). En los 3 puntos de integración G en el plano se se pasa a componentes cartesianas (13) usando las componentes en el plano \mathbf{J}_P del jacobiano de la interpolación (2) y luego se interpolan en el espesor usando (14).

$$\begin{bmatrix} C_{\xi 3} \\ C_{\eta 3} \end{bmatrix}^f = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & & & \\ & & & 1 & \xi & \eta \end{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_s^f \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} C_{\xi 3} \\ C_{\eta 3} \end{bmatrix}^f = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & \xi\eta & & -\eta^2 \\ & & & -\xi^2 & 1 & \xi & \eta & \xi\eta \end{bmatrix} \boldsymbol{\beta}_s^f \quad (12)$$

$$\mathbf{C}_s^{fG} = \begin{bmatrix} C_{13} \\ C_{23} \end{bmatrix}^{fG} = \mathbf{J}_P^{-T} \begin{bmatrix} C_{\xi 3} \\ C_{\eta 3} \end{bmatrix}^{fG} \quad (13)$$

$$\mathbf{C}_s^G(\zeta) = \mathbf{C}_s^{1G} L^1(\zeta) + \mathbf{C}_s^{2G} L^2(\zeta) \quad (14)$$

Para atar los parámetros $\boldsymbol{\beta}_s^f$ en (11) o (12) con el campo de desplazamientos (2) se evalúan las deformaciones indicadas en los puntos de muestreo mostrados en la Figura 2.b. Las deformaciones evaluadas allí son las deformaciones de corte tangentes a los lados, agregándose las deformaciones en el centro del triángulo para el caso de la aproximación cuadrática incompleta.

2.2.3. Deformación normal transversal:

A diferencia de los elementos de lámina que introducen la hipótesis de tensión plana, en los elementos de sólido-lamina se utilizan ecuaciones constitutivas generales. Una interpolación lineal en el espesor conduce a una deformación normal transversal constante que produce distintos bloqueos numéricos. Para evitar bloqueo debido al efecto de Poisson cuando la flexión es importante, y también para aliviar el bloqueo volumétrico (en problemas cuasi incompresibles) se utiliza una formulación en deformación impuesta mejorada para la componente \mathbf{C}_3 del tensor derecho de Cauchy-Green.

En cada punto de integración sobre el plano medio ($\xi_G, \eta_G, \zeta = 0$) la componente cartesiana del gradiente de la deformación en la dirección y_3 puede evaluarse a partir de la interpolación isoparamétrica

$$\mathbf{f}_3^{G0} = \sum_{I=1}^{12} N_3^{G0} \mathbf{x}^I \quad (15)$$

El gradiente mejorado en la dirección y_3 se define como

$$\bar{\mathbf{f}}_3(\zeta) = \mathbf{f}_3^{G0} e^{\alpha\zeta} \quad (16)$$

con lo cual la componente de interés del tensor derecho de Cauchy-Green resulta en

$$\bar{C}_{33} = \bar{\mathbf{f}}_3^{G0} \cdot \bar{\mathbf{f}}_3^{G0} e^{2\alpha\zeta} = C_{33}^{G0} e^{2\alpha\zeta} \quad (17)$$

Las tres (una por cada punto de integración en el plano) variables α son locales al elemento y pueden condensarse localmente en un esquema de dos pasos Simo et al. (1993)

3. EJEMPLOS

El elemento, denominado BP_r en lo sucesivo ha sido implementado en un código de elementos finitos implícito Alpha (2012). Pasa correctamente la prueba de la parcela, tanto membranal como flexional. En los ejemplos presentados abajo se han considerado las dos opciones para la aproximación a las deformaciones de corte (11) y (12). La primera conduce a un comportamiento más flexible, en particular en presencia de cargas puntuales y en problemas donde se considera no-linealidad geométrica. Para diferenciarlas se utilizará respectivamente BP_{r1} y BP_{r2} . Si esto no se indica es que se ha usado la segunda opción, que se muestra más robusta. Para los ejemplos presentados se han considerado 2 puntos de integración en el espesor dado que se ha trabajado con materiales que satisfacen la ley de Hooke generalizada. Como se mencionó se utilizan 3 puntos de integración en el plano de la lámina. Para el caso de triángulos al usar 3 puntos de integración existen dos configuraciones de puntos óptimos a) a la mitad de cada lado y b) puntos interiores al elemento. Distintas pruebas muestran un ligero mejor comportamiento al usar los puntos internos, por lo cual esos son los utilizados.

3.1. Semi-esfera incompleta con cargas puntuales entrantes y salientes

Este es un ejemplo muy utilizado para evaluar el bloqueo membranal. En la Figura 3.a se muestra la geometría discretizada deformada (un cuarto del total debido a las simetrías) $R = 10$, $h = 0,04$, ángulo superior 18° , $E = 6,825 \times 10^5$ y $\nu = 0,3$. La Figura 3.b muestra el promedio de los desplazamientos de los puntos cargados en función del número de divisiones por lado (el doble del número de elementos). El valor de referencia (línea delgada horizontal) es 0.094. Allí se observan las buenas propiedades de convergencia y la comparación de la aproximación en deformaciones impuestas (ANS) para la membrana con una aproximación estándar en desplazamientos (Pr), lo que permite ver la cura del bloqueo membranal. Las dos curvas muestran la mayor flexibilidad del modelo ANS lineal para el corte transversal. La Figura 3.c muestra los desplazamientos de los puntos cargados en el rango no lineal para dos mallas distintas y se compara con los resultados provistos por Sze et al. (2004) y por Simo et al. (1990). La malla 16×16 muestra una excelente concordancia con los resultados provistos por Simo y es ligeramente más rígida que los provistos por Sze para ambas versiones de la formulación del corte transversal. La malla más gruesa (8×8) si bien es ligeramente rígida muestra las características principales del modelo

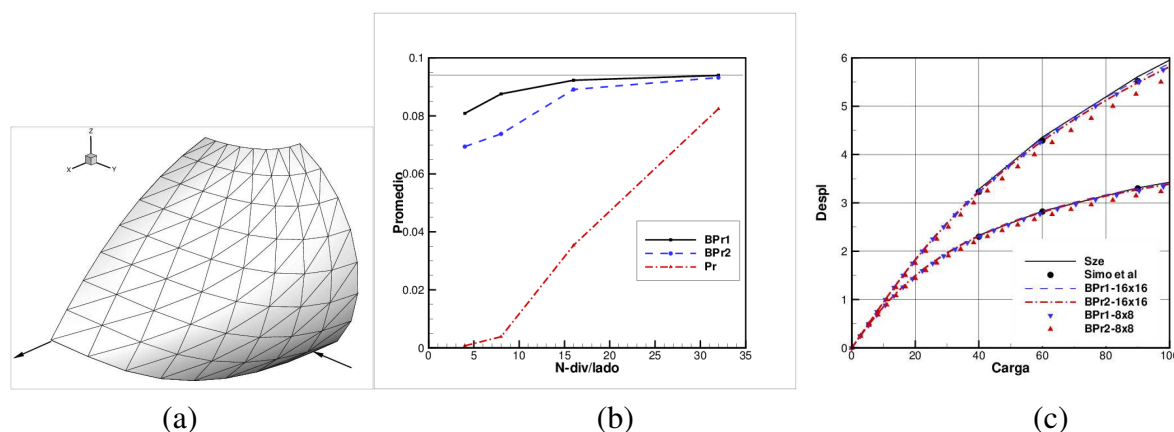


Figura 3: Semi-esfera incompleta con cargas puntuales. (a) geometría deformada y carga; (b) convergencia en el caso lineal; (c) desplazamientos no-lineales

3.2. Viga torsionada

En la Figura 4 se ve la geometría de una cinta torsionada 90° con ancho $b = 1,1$, Longitud $L = 12$, módulo de Young $E = 2,9 \times 10^7$ y relación de Poisson $\nu = 0,3$. Este ejemplo permite observar el comportamiento del elemento cuando su geometría es alabeada. En la Tabla 1 se indican los valores normalizados del desplazamiento del centro del borde cargado, con dos espesores h distintos y su comparación con elementos de sólido-lámina hexaédricos (Mostafa et al. (2013); Schwarze y Reese (2009); Cardoso et al. (2008); Alves de Sousa et al. (2005) y un elemento de lámina cuadrilátero Simo et al. (1989). Notar que 2 divisiones por lado implican un elemento TSh. Los resultados en régimen lineal son excelentes tanto para el caso delgado como para el caso grueso. En la Figura 4.b se ve la geometría deformada final para el caso delgado en comportamiento no lineal, en tanto que la Figura 4.c compara las 3 componentes de desplazamiento del centro del borde libre con resultados de referencia obtenidos usando ABAQUS (2006) con una malla fina de 96×8 elementos SC8R. Puede verse que para la malla más fina ($60 \times 6 \times 2$ elementos) los resultados muestran una excelente concordancia en tanto que la malla más gruesa ($12 \times 2 \times 2$ elementos) es un poco rígida.

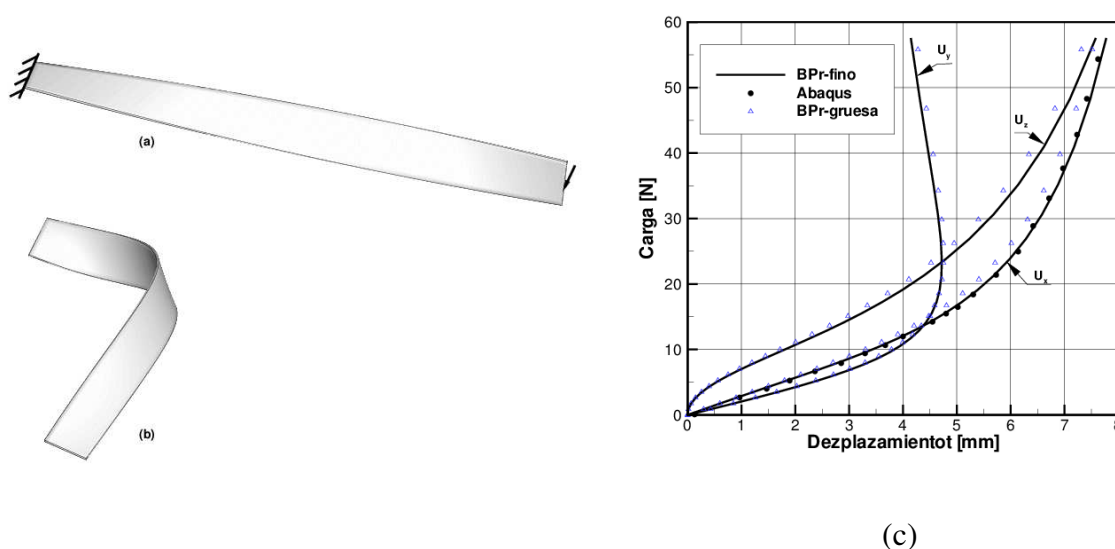


Figura 4: Viga torsionada con carga normal. (a) geometría y carga; (b) deformada final no-lineal (c) componentes cartesianas de desplazamiento del centro del borde cargado

Div. por lado	$h = 0,05$ (ref.: 0,343)					$h = 0,32$ (ref.: $1,754 \times 10^{-3}$)				
	MSF13	Sch09	Simo89	BPr1	BPr2	MSF13	Car08	Alv05	BPr1	BPr2
6×1	0,953	0,942	0,951	—	—	0,946	—	—	—	—
12×2	0,988	0,983	0,986	0,9665	0,9551	0,987	1,022	0,935	0,9875	0,9889
24×4	0,995	0,955	0,997	0,9949	0,9936	0,995	1,006	0,979	0,9948	0,9958
48×8	1,000	0,999	1,000	0,9991	0,9989	0,999	1,002	0,992	0,9965	0,9970

Tabla 1: Cinta torsionada. Valores normalizados del desplazamiento u_x del centro del borde cargado. Los valores de referencia indicados son ampliamente aceptados y se obtienen refinando la malla.

3.3. Panel cilíndrico con carga puntual

En la Figura 5.b se muestra la geometría de un panel cilíndrico ($R = 2540$, $L = 508$, $\theta = 0.1\text{rad}$) donde se consideran dos espesores posibles, grueso $t = 12,7$ y delgado $t = 6,35$. Las propiedades del material son: $E = 3,10275 \times 10^9$ y $\nu = 0,3$. La malla utilizada incluye 4 elementos (8 divisiones) por lado y se compara con un elemento triangular de lámina clásica (Flores y Oñate (2007)), con un elemento de sólido-lámina (Flores (2016)) y con los provistos por Sze et al. (2004). Los resultados son excelentes para ambos espesores y la convergencia es muy buena. En el caso delgado, el punto A es el central y el punto B está sobre el borde libre en la línea de simetría.

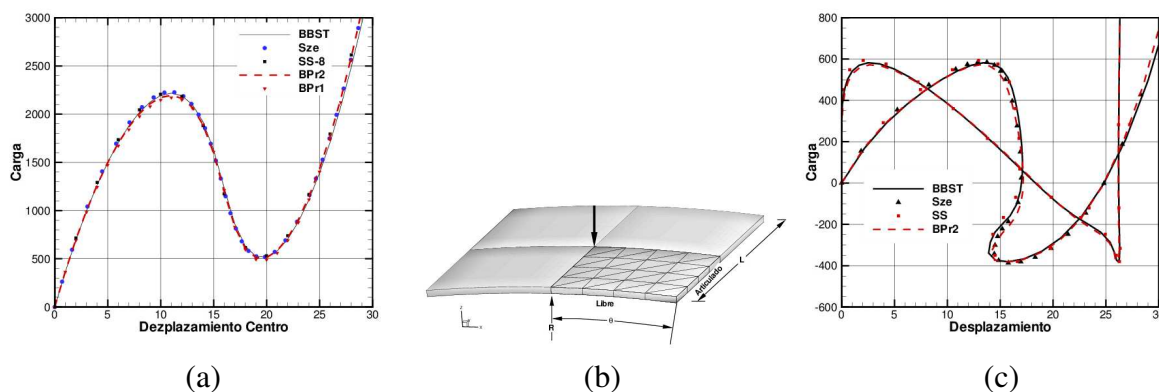


Figura 5: Panel articulado-libre bajo carga puntual. (a) caso grueso; (b) geometría y malla; (c) caso delgado

3.4. Frecuencias naturales de una placa cuadrada empotrada

Se han evaluado las frecuencias y modos naturales de vibración de una placa cuadrada y empotrada en sus cuatro bordes. Las propiedades geométricas y mecánicas de la placa son: $L = 1$, $t = 0,01$, $E = 1000$, $\nu = 0,3$, $\delta = 0,01$. En la Figura 6 se muestran los primeros 8 modos naturales obtenidos con una malla de $16 \times 16 \times 2$ elementos, en el primero de ellos se muestra la malla y su orientación. En la Tabla 2 se indican los valores de las frecuencias asociadas. Observar que las frecuencias 2 y 3 debieran ser iguales (al igual que la 7 y la 8), lo cual no ocurre debido a la orientación de la malla. Los resultados son muy similares a los que se obtienen con otros elementos de lámina y sólido-lámina.

	Frecuencias			
1-4	34,0676	68,6284	68,8976	100,420
5-8	121,363	122,026	150,095	151,695

Tabla 2: Primeras 8 frecuencias naturales de vibración

Un aspecto importante a considerar y a resolver en esta formulación es que en análisis dinámico el elemento se comporta en forma inestable. Esto no es debido a los polinomios de Bezier, ya que si se utilizan los polinomios estándar el comportamiento no mejora. Un análisis dinámico usando amortiguamiento de Rayleigh muestra que el comportamiento se estabiliza con el amortiguamiento, pero sólo si se incluye la matriz de rigidez como parte del amortiguamiento. Si sólo se incluye un factor de la matriz de masa esto no ocurre. Esto impide implementar el

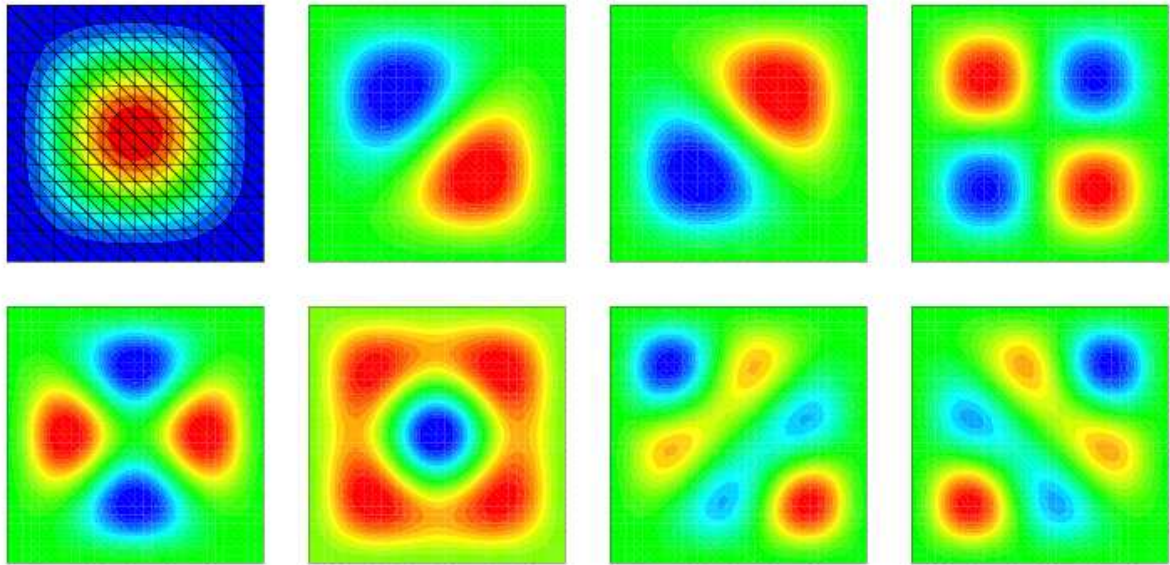


Figura 6: Primeros ocho modos naturales de vibración

elemento en un código con integración explícita de las ecuaciones de movimiento ya que allí lo habitual es usar amortiguamiento proporcional a la matriz de masa.

4. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha desarrollado un elemento de sólido-lámina de base triangular. En el plano se han utilizado polinomios cuadráticos de Bezier en lugar de los habituales polinomios de Lagrange, se han considerado nuevos puntos de muestreo para la aproximación en deformaciones impuestas de las componentes membranales, se ha incluido una versión cuadrática incompleta para las deformaciones impuestas de corte transversal y una aproximación en deformaciones impuestas mejoradas para la deformación normal transversal. El elemento obtenido pasa la prueba de la parcela y no presenta bloqueos numéricos debido a membrana ni corte transversal y presenta las siguientes características:

- Es un elemento robusto
- Tiene buenas propiedades de convergencia

Debe estudiarse la razón por la cual el elemento es inestable en procesos dinámicos.

AGRADECIMIENTOS

El autor agradece el apoyo financiero de CONICET y de la SeCyT-UNC.

REFERENCIAS

- ABAQUS. *User's Manual, version 6.6.2*. Dassault Systemes Simulia Corp, 2006.
- Alpha. *Análisis Estático/Dinámico Implícito de Sólidos con énfasis en Estructuras Laminares, version 5.5*. Departamento de Estructuras, Universidad Nacional de Córdoba, 2012.
- Alves de Sousa R., Cardoso R., Fontes Valente R., Yoon Y., Gracio J., y Natal Jorge R. A new one-point quadrature enhanced assumed strain (eas) solid-shell element with multiple integration points along thickness: part 1 geometrically linear applications. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 62:952–977, 2005.

- Cardoso R., Yoon J., Mahardika M., Choudhry S., Alves de Sousa R., y Fontes Valente R. Enhanced assumed strain (EAS) and assumed natural strain (ANS) methods for one-point quadrature solid-shell elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 75:156–187, 2008.
- Flores F. Development of a non-linear triangular prism solid-shell element using ANS and EAS techniques. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 266:81–97, 2013.
- Flores F. A simple reduced integration hexahedral solid-shell element for large strains. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 303:260–287, 2016.
- Flores F. y Oñate E. A rotation-free shell triangle for the analysis of kinked and branching shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 69:1521–1551, 2007.
- Kadapa C. Novel quadratic bezier triangular and tetrahedral elements using existing mesh generators: Applications to linear nearly incompressible elastostatics and implicit and explicit elastodynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 117:543–572, 2019.
- Kim D. y Bathe K. A triangular six-node shell element. *Computers and Structures*, 87:1451–1460, 2009.
- Mostafa M., Sivaselvan M., y Felippa C. A solid-shell corotational element based on ANDES, ANS and EAS for geometrically nonlinear structural analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 95:145–180, 2013.
- Oñate E., Zienkiewicz O., Suárez B., y Taylor R. A methodology for deriving shear constrained Reissner-Mindlin plate elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 32:345–367, 1992.
- Schwarze M. y Reese S. A reduced integration solid-shell finite element based on the EAS and the ANS concept. geometrically linear problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 80:1322–1355, 2009.
- Simo J., Armero F., y Taylor R. Improved versions of assumed enhanced strain tri-linear elements for 3D finite deformation problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 110:359–386, 1993.
- Simo J., Fox D., y Rifai M. On a stress resultant geometrically exact shell model. part II: The linear theory, computational aspects. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 73:53–92, 1989.
- Simo J., Fox D., y Rifai M. On a stress resultant geometrically exact shell model. part III: Computational aspects of the non-linear theory. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 79:21–70, 1990.
- Sze K., Liu X., y Lo S. Popular benchmark problems for geometric nonlinear analysis of shells. *Finite Elements in Analysis and Design*, 40:1551–1569, 2004.
- Wang P., Chalar H., y Abed-Meraim F. Quadratic solidshell elements for nonlinear structural analysis and sheet metal forming simulation. *Computational Mechanics*, 59(1):161–186, 2017.
- Xiong H., Guzman Maldonado E., Hamila N., y Boisse F. A prismatic solid-shell finite element based on a dkt approach with efficient calculation of through the thickness deformation. *Finite Elements in Analysis and Design*, 151:18–33, 2018.