

VIBRACIONES LIBRES DE PLACAS RECTANGULARES DE MATERIAL ANISÓTROPO Y BORDES APOYADOS, EMPOTRADOS O LIBRES

P. M. Ciancio* y C. A. Rossit†

* Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional del Centro de la Pcia. de Bs.As.
Avda. Del Valle 5737–(7400)–Olavarría–Argentina
Estudiante de Posgrado–Dpto. de Ingeniería–Universidad Nacional del Sur (UNS)
e-mail: pciancio@fio.unicen.edu.ar

† Dpto. de Ingeniería–Instituto de Mecánica Aplicada–UNS–
Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)
carossit@criba.edu.ar

Palabras clave: Vibraciones placas anisótropas, Rayleigh Ritz, Funciones viga, Formas modales.

Resumen. *En el presente trabajo se obtienen coeficientes de frecuencias de vibración natural de placas anisótropas rectangulares con distintas combinaciones de las condiciones de borde clásicas (empotrado, simplemente apoyado o libre). Asimismo se determinan las correspondientes formas modales, evidenciándose los efectos de la anisotropía sobre el comportamiento estructural de la placa.*

Se utiliza en su resolución un método variacional (Rayleigh-Ritz) aproximando la función desplazamiento con conjuntos coordinados de funciones vigas que satisfacen las condiciones geométricas o esenciales de bordes opuestos de la placa.

Los resultados obtenidos comparan en forma excelente con situaciones particulares disponibles en la literatura (isotropía). Se brinda una síntesis de tablas de frecuencias y gráficos de formas modales para una configuración determinada del material anisótropo.

La cantidad y variabilidad de los parámetros mecánicos involucrados en la descripción del comportamiento anisótropo de materiales que abarca desde metales que han sido sometidos a procesos metalúrgicos diversos a plásticos, polímeros y materiales compuestos, quitan practicidad a la construcción de tablas de magnitudes dinámicas adimensionales, usual para elementos estructurales constituidos por materiales isotropos. Por ende, se considera que uno de los méritos esenciales del presente trabajo, es proveer información al potencial usuario, sobre un procedimiento eficaz y relativamente sencillo para obtener resultados confiables en un campo relativamente poco desarrollado de la Teoría de Vibraciones.

1 INTRODUCCIÓN

La utilización de materiales anisótropos ha evidenciado un notable incremento en los últimos años en diversos campos tecnológicos. En efecto, son de uso creciente los paneles de material anisótropo en ingeniería civil, mecánica, aeronáutica y hasta electrónica (plaquetas de circuitos impresos).

En determinadas circunstancias dichos paneles pueden encontrarse en condiciones operativas severas lo que hace necesario conocer parámetros que caractericen su comportamiento dinámico.

El sistema diferencial gobernante del problema de la placa vibrante de material anisótropo, es de enorme complejidad analítica, aunque se trate de un dominio geoméricamente simple, como una placa rectangular.

Es por ello, que para su tratamiento se recurre a la utilización de métodos aproximados.

En la literatura técnico-científica, no son numerosos los trabajos sobre vibraciones transversales de placas rectangulares anisótropas, siendo la mayoría de ellos referidos a placas simplemente apoyadas¹.

Sin embargo, cabe señalar que aún el “problema de Navier” no posee solución exacta, mientras que sí la posee en el caso de placas isótropas y ortótropas.

Entre los estudios realizados con otras condiciones de borde y geometrías debe destacarse el realizado por Nallim y Grossi², utilizando el método variacional de Rayleigh-Ritz, aproximando la deflexión de la placa mediante polinomios ortogonales.

La utilización del método de Rayleigh-Ritz resulta particularmente justificada en el caso en que la placa tenga un borde libre, donde las condiciones naturales de borde son difíciles de satisfacer.

Como es sabido, el método requiere el cumplimiento únicamente de las condiciones esenciales o geométricas.

En el presente trabajo, se analizarán placas rectangulares anisótropas con distintas combinaciones de las condiciones de borde clásicas: empujado, simplemente apoyado y libre.

Se determinarán sus primeros seis coeficientes de frecuencias naturales y se estudiarán las formas modales asociadas.

2 PLANTEO DEL PROBLEMA

Cuando la placa delgada de espesor uniforme h , efectúa uno de sus modos normales de vibración a una frecuencia natural circular ω :

$$W(x, y, t) = W(x, y)e^{i\omega t} \quad (1)$$

La funcional de energía que gobierna el problema es:

$$J[W] = U_{max} - T_{max} \quad (2)$$

Donde U_{max} es la energía de deformación máxima la placa y T_{max} ; la energía cinética máxima de la placa.

Siguiendo la clásica notación de Lekhnitskii³, para dominios anisótropos:

$$U_{max} = \frac{1}{2} \iint_A \left[D_{11} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right)^2 + 2.D_{12} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + D_{22} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right)^2 + 4.D_{66} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right)^2 + 4 \left(D_{16} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + D_{26} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right] dx dy \quad (3)$$

$$T_a = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot h \cdot \omega^2 \cdot \iint_A W^2 dx dy \quad (4)$$

donde A es el área de la placa, D_{ij} son los coeficientes de rigidez de la placa y ρ es la densidad de su material.

Como aproximación de la deflexión se han tomado series de funciones viga:

$$W(x, y) \cong W_a(x, y) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N b_{mn} \cdot X_m(x) Y_n(y) \quad (5)$$

Donde $X_m(x)$ y $Y_n(y)$ son, respectivamente, las formas modales de vibración natural de una viga Bernoulli–Euler que tiene como condiciones de borde las de la placa en estudio en bordes opuestos según cada dirección coordenada^{4,5}.

De esta manera, se garantiza el cumplimiento de las condiciones esenciales de borde de la placa, y en el caso de bordes empotrados o simplemente apoyados, también de las naturales.

Reemplazando la expresión (5) que corresponde según el caso de análisis en las expresiones (3) y (4), componentes de la funcional (2) y utilizando para evaluar las integrales de las funciones características y sus derivadas las fórmulas dadas por Felgar^{4,5}; y requiriendo su minimización:

$$\frac{\partial J[W_a]}{\partial b_{mn}} = 0 \quad , \quad m = 1, 2, \dots, M \quad , \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (6)$$

se obtiene un determinante ecuación cuyas raíces son los coeficientes de frecuencias naturales de la placa anisótropa:

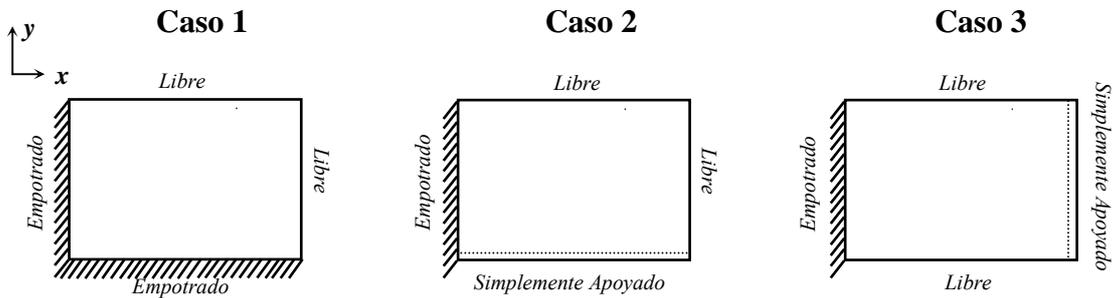
$$\Omega = \sqrt{\frac{\rho h}{D_{11}}} \omega a^2 \quad (7)$$

donde a es el valor del lado de la placa rectangular según la dirección coordenada x .

Obtenidos los coeficientes Ω_i , es posible determinar la relación entre las constantes b_{mn} que permite conocer las formas modales de vibración correspondientes a cada Ω_i .

2.1 Aproximación de la deflexión.

Se analizarán los siguientes casos de vinculación:



Caso 1: E-E-L-L

En ambas direcciones se adoptan las expresiones de las formas modales de una viga empotrada-libre:

$$\begin{aligned} X_m(x) &= \text{Cosh}(k_m x) - \text{Cos}(k_m x) - \alpha_m \text{Senh}(k_m x) + \alpha_m \text{Sen}(k_m x) \\ Y_n(y) &= \text{Cosh}(k_n y) - \text{Cos}(k_n y) - \alpha_n \text{Senh}(k_n y) + \alpha_n \text{Sen}(k_n y) \end{aligned} \quad (8)$$

Donde

$$\alpha_m = \frac{\text{Cosh}(k_m) + \text{Cos}(k_m)}{\text{Senh}(k_m) + \text{Sen}(k_m)} \quad \alpha_n = \frac{\text{Cosh}(k_n) + \text{Cos}(k_n)}{\text{Senh}(k_n) + \text{Sen}(k_n)} \quad (9)$$

Los autovalores k_m y k_n son las raíces de siguiente ecuación característica:

$$\text{Cos}(k) \text{Cosh}(k) = -1 \quad (10)$$

En la Tabla 1 se presentan los primeros diez autovalores correspondientes a una viga empotrada-libre cuya sección es constante en toda su longitud.

Tabla 1. Autovalores de una viga con bordes empotrado-libre

k_1	1.875104	k_6	17.278759
k_2	4.694091	k_7	20.420352
k_3	7.854757	k_8	23.561944
k_4	10.995540	k_9	26.703537
k_5	14.137168	k_{10}	29.845130

Caso 2: E-SA-L-L

En la dirección x , la expresión $X_m(x)$ será similar a la del caso anterior.

En dirección y corresponde a **simplemente apoyada-libre**:

$$Y_n(y) = \text{Senh}(k_n y) + \text{Sen}(k_n y) - \alpha_n \text{Senh}(k_n y) + \alpha_n \text{Sen}(k_n y) \quad (11)$$

Siendo:

$$\alpha_n = \frac{\text{Senh}(k_n) - \text{Sen}(k_n)}{\text{Senh}(k_n) + \text{Sen}(k_n)} \quad (12)$$

Los autovalores en la función (11) son las raíces de la ecuación característica (13), cuyos primeros diez valores aparecen en Tabla 2:

$$\text{Tanh}(k) = \text{Tan}(k) \quad (13)$$

Tabla 2. Autovalores de una viga con bordes simplemente apoyado-libre

k_1	3.926602	k_6	19.634954
k_2	7.068582	k_7	22.776546
k_3	10.210176	k_8	25.918139
k_4	13.351768	k_9	29.059732
k_5	16.493361	k_{10}	32.201324

En este caso, por tratarse de una viga inestable, a las funciones coordenadas representadas por (11) para cada autovalor k_n de la Tabla 2, deberá adicionarse un desplazamiento de cuerpo rígido (rotación respecto del borde apoyado):

$$Y_0(y) = y$$

Tomando nulo (cero) el autovalor correspondiente.

Caso 3: E-L-SA-L

En la dirección x , se tiene como condición de borde **empotrada-simplemente apoyada** y con extremos **libre-libre** en dirección y :

$$X_m(x) = \text{Cos}(k_m x) - \text{Cosh}(k_m x) - \alpha_m \text{Sen}(k_m x) + \alpha_m \text{Senh}(k_m x) \quad (14a)$$

$$Y_n(y) = \text{Cosh}(k_n y) + \text{Cos}(k_n y) - \alpha_n \text{Senh}(k_n y) - \alpha_n \text{Sen}(k_n y) \quad (14b)$$

$$\alpha_m = \frac{\text{Cos}(k_m) - \text{Cosh}(k_m)}{\text{Sen}(k_m) - \text{Senh}(k_m)} \quad \alpha_n = \frac{\text{Cosh}(k_n) - \text{Cos}(k_n)}{\text{Senh}(k_n) - \text{Sen}(k_n)} \quad (15a,b)$$

Los autovalores de las funciones $X_m(x)$ y de $Y_n(y)$ son las raíces de las siguientes ecuaciones características, respectivamente:

$$\text{Tanh}(k) = \text{Tan}(k) \quad (16a)$$

$$\text{Cosh}(k) = \text{Cos}(k) \quad (16b)$$

Los valores que aparecen en Tabla 2 representan nuevamente los primeros diez autovalores correspondientes a una viga empotrada-simplemente apoyada cuya sección es constante en toda su longitud.

En Tabla 3 se muestran los primeros diez autovalores correspondientes a una viga libre-libre con sección constante.

Tabla 3. Autovalores de una viga con bordes libres

k_1	4.730040	k_6	20.420352
k_2	7.853204	k_7	23.561944
k_3	10.995607	k_8	26.703537
k_4	14.137165	k_9	29.845130
k_5	17.278759	k_{10}	32.986722

En dirección y se tiene nuevamente una viga inestable.

En este caso, se tienen dos desplazamientos de cuerpo rígido: una traslación y una rotación.

$$Y_0(y) = 1$$

$$Y_{00}(y) = 2y - 1$$

Ambas expresiones, cuyo autovalor correspondiente es cero en ambos casos, se suman a los términos que se adoptan de la expresión genérica (14b).

3 RESULTADOS OBTENIDOS

Como se ha expresado, la extensa cantidad de variables involucradas en la descripción del comportamiento de los materiales anisótropos, hace que no resulte de interés práctico la confección de tablas de magnitudes dinámica adimensionales como es usual para materiales isótropos.

En consecuencia, se considera una única configuración del material anisótropo:

$$\frac{D_{22}}{D_{11}} = \frac{D_{12}}{D_{11}} = \frac{D_{66}}{D_{11}} = \frac{1}{2} \quad ; \quad \frac{D_{16}}{D_{11}} = \frac{D_{26}}{D_{11}} = \frac{1}{3}$$

En las Tablas 4, 5 y 6 se muestran los valores de los primeros seis (6) coeficientes de frecuencias naturales de vibración para distintas relaciones de aspecto $\lambda = a/b$ de las placas anisótropas, para las condiciones de vinculación indicadas en 2.1.

En dichas tablas, se incorporan en cursiva, algunos valores de los coeficientes de frecuencia para el caso de material isótropo. Estos valores evidencian la influencia de la anisotropía del material; fueron obtenidos como caso particular de las expresiones (3) y (4) y muestran una concordancia prácticamente exacta con los resultados obtenidos por Leissa⁶.

En los cálculos se ha tomado $M=N=10$, por lo que la aproximación (5) consta de 100 términos, a los que deben agregarse, cuando corresponde, los términos representativos de movimientos de cuerpo rígido.

Tabla 4: Coeficientes de frecuencia natural $\Omega = \sqrt{\frac{\rho h}{D_{11}}} \omega a^2$ para una placa anisótropa con condiciones de borde:E-E-L-L. *En cursiva valores para la placa isotrópica*

λ	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Ω_6
2/5	4.14177	6.91428	11.1374	16.6145	22.472	24.1004
	3.98573	7.15512	13.1006	21.844	22.8964	26.5014
1/2	4.46174	8.5044	14.5836	21.7363	24.8074	29.3873
2/3	5.13959	11.5778	21.1346	24.5871	35.1442	37.2093
	4.98479	13.2894	23.3844	30.2622	34.2403	52.3981
1	6.95844	18.6182	27.9385	38.5709	51.6138	65.4807
	6.94209	24.0344	26.6808	47.7848	63.0388	65.8326
3/2	10.5699	27.1528	43.0878	59.075	73.3162	98.3735
	11.2158	29.9012	52.6149	68.090	77.0407	117.896
2	15.1572	34.0854	64.6825	73.0842	100.775	120.326
5/2	20.8379	41.5501	75.7669	103.295	129.865	138.942
	24.9108	44.7195	81.879	136.525	143.102	165.634

Tabla 5: Coeficientes de frecuencia natural $\Omega = \sqrt{\frac{\rho h}{D_{11}}} \omega a^2$ para una placa anisótropa con condiciones de borde:E-SA-L-L. *En cursiva valores para la placa isotrópica*

λ	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Ω_6
2/5	0.716715	5.65937	9.33295	14.0523	20.3664	23.0668
	3.85423	6.41981	11.5757	19.7666	22.521	26.0241
1/2	6.17995	11.7879	18.1951	23.338	27.2935	31.5623
2/3	6.74934	16.6431	22.3984	29.958	32.8173	46.6994
	4.42469	10.9116	22.9585	25.6982	32.4248	48.467
1	7.19819	25.3947	32.9778	36.9281	58.427	64.2866
	5.36394	19.1711	24.7679	43.1914	53.0007	64.0497
3/2	7.66188	33.7261	44.0013	64.3369	82.5221	86.956
	6.93091	27.2888	38.5863	64.2545	67.4674	108.026
2	8.16911	37.2274	58.7253	85.6972	96.9774	127.68
5/2	8.67199	38.9948	74.8273	98.6746	118.271	159.563
	10.1002	35.1574	74.9897	99.9281	127.687	135.45

Tabla 6: Coeficientes de frecuencia natural $\Omega = \sqrt{\frac{\rho h}{D_{11}}} \omega a^2$ para una placa anisótropa con condiciones de borde:E-L-SA-L. *En cursiva valores para la placa isótropa*

λ	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Ω_6
2/5	15.2952	16.5956	20.6372	26.6322	34.4869	44.668
	<i>15.3831</i>	<i>16.3721</i>	<i>19.6446</i>	<i>25.5583</i>	<i>34.4991</i>	<i>46.4409</i>
1/2	15.2445	17.205	23.1291	31.652	42.6073	49.6807
2/3	15.1544	18.401	27.892	41.2201	49.571	52.7429
	<i>15.3521</i>	<i>17.9493</i>	<i>26.7098</i>	<i>43.2029</i>	<i>49.8435</i>	<i>53.0131</i>
1	14.9686	21.1457	39.0471	49.203	57.2868	64.5176
	<i>15.3228</i>	<i>20.6734</i>	<i>39.7444</i>	<i>49.7531</i>	<i>56.6192</i>	<i>77.3787</i>
3/2	14.7004	25.3565	48.2322	58.2692	67.0085	100.894
	<i>15.2943</i>	<i>25.7108</i>	<i>49.6398</i>	<i>64.0136</i>	<i>68.0971</i>	<i>103.755</i>
2	14.4517	29.1941	47.8413	68.8822	91.2027	101.582
5/2	14.2176	32.4506	47.5528	75.8811	101.433	125.829
	<i>15.2644</i>	<i>37.2955</i>	<i>49.5022</i>	<i>83.3279</i>	<i>103.432</i>	<i>143.684</i>

Se observa que en el caso 3 – Tabla 6, para la placa isótropa el coeficiente de frecuencia fundamental se mantiene prácticamente constante, aunque varía la relación de aspecto $\lambda = a/b$ desde 2/5 hasta 5/2, corresponde al comportamiento de viga de la placa.

En cambio, en el caso anisótropo dicho coeficiente varía en forma más significativa.

3.1 Formas Modales

La amplitud del desplazamiento es representada por la ecuación (5), en la que $X_m(x)$ indica la forma modal propia de una viga con iguales condiciones de borde que los de la placa en dirección x y $Y_n(y)$ es la forma modal propia de una viga de iguales condiciones en sus extremos que los de la placa en dirección y . El factor b_{mn} de la expresión (5) representa las constantes de ponderación de cada término $X_m(x)$. $Y_n(y)$, en la amplitud del desplazamiento $W_a(x,y)$.

Para obtener las formas modales del sistema vibrante se determinan los coeficientes b_{mn} para todos los desplazamientos en términos de uno de ellos que se supone de valor unitario. El coeficiente b_{mn} que tenga el valor predominante sobre los restantes será el que defina el modo mn de vibración para cada autovalor previamente hallado.

Cada valor de coeficiente de frecuencia Ω_i , hallado, se reemplaza en la ecuación :

$$E = U - T \Omega^2 \quad (17)$$

en la cual U y T son las matrices de coeficientes relacionados con la energía de deformación y cinética de la placa utilizados para determinar los coeficientes de frecuencias

naturales del sistema.

Se puede expresar a la ecuación del movimiento como:

$$E.B = 0 \tag{18}$$

donde lógicamente E será una matriz diferente para cada modo. La ecuación (17), se satisface dado que los coeficientes de frecuencia fueron determinados a partir de esta condición.

La matriz E se particiona, suponiendo que el primer elemento del vector desplazamiento tiene una amplitud unitaria

$$\begin{Bmatrix} b_{1n} \\ b_{2n} \\ b_{3n} \\ \dots \\ b_{Nn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ b_{2n} \\ b_{3n} \\ \dots \\ b_{Nn} \end{Bmatrix} \tag{19}$$

En forma expandida la ecuación (18) puede escribirse:

$$\begin{bmatrix} e_{11} & | & e_{12} & e_{13} & \dots & e_{1N} \\ \hline e_{21} & | & e_{22} & e_{23} & \dots & e_{2N} \\ e_{31} & | & e_{32} & e_{33} & \dots & e_{3N} \\ \dots & & \dots & \dots & \dots & \dots \\ e_{N1} & | & e_{N2} & e_{N3} & \dots & e_{NN} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ - \\ b_{2n} \\ b_{3n} \\ \dots \\ b_{Nn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ - \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{20}$$

esta expresión también puede escribirse en forma simbólica de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} e_{11} & E_{10} \\ E_{01} & E_{00} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ b_{0n} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{21}$$

de la cual

$$E_{01} + E_{00} b_{0n} = 0 \tag{22}$$

Por lo que:

$$b_{0n} = -(E_{00})^{-1} E_{01} \tag{23}$$

Las amplitudes del desplazamiento obtenidas de la ecuación (23) junto con la amplitud unitaria de la primer componente, constituye el vector desplazamiento asociado con el enésimo modo de vibración.

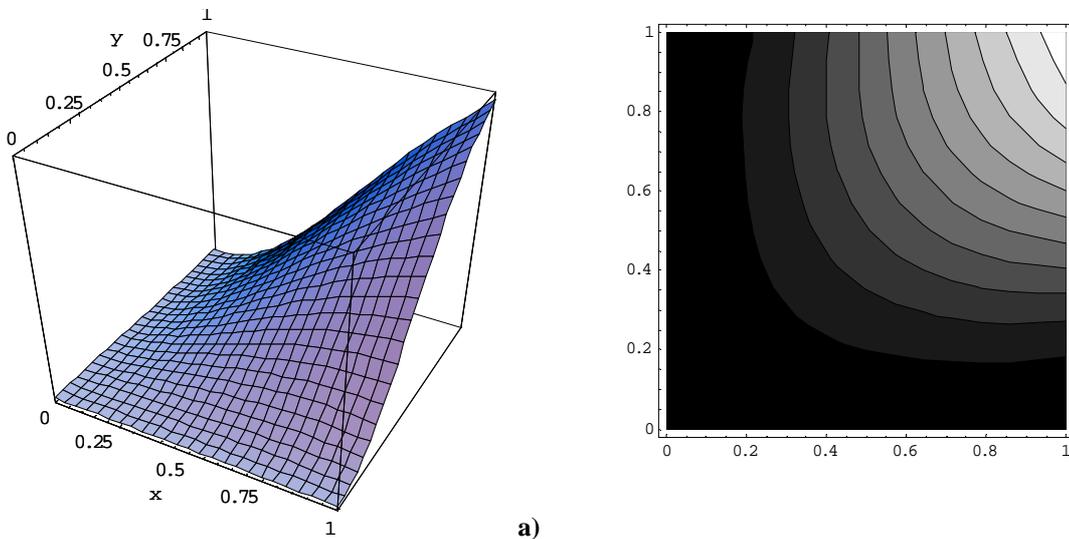
Habrá un elemento del vector b_{0n} cuya magnitud en valor absoluto sea la mayor de todas: $b_{(mn)máxima}$ en cada modo normal de vibración natural de la placa correspondiente a cada coeficiente de frecuencia. Dicho elemento es el que determinará la forma modal correspondiente a esa frecuencia, dado que será el término de la sumatoria que prevalecerá sobre las restantes.

Cuando la placa presenta en alguna de las direcciones una condición de sustentación que se corresponde con las condiciones de viga inestable, esto es simplemente apoyada-libre o libre-libre, estas funciones se incluirán en los factores $X_m(x)$, o $Y_n(y)$ según corresponda.

$$W_{mn}(x, y) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N b_{mn} X_m(x) \cdot Y_n(y) \quad (24)$$

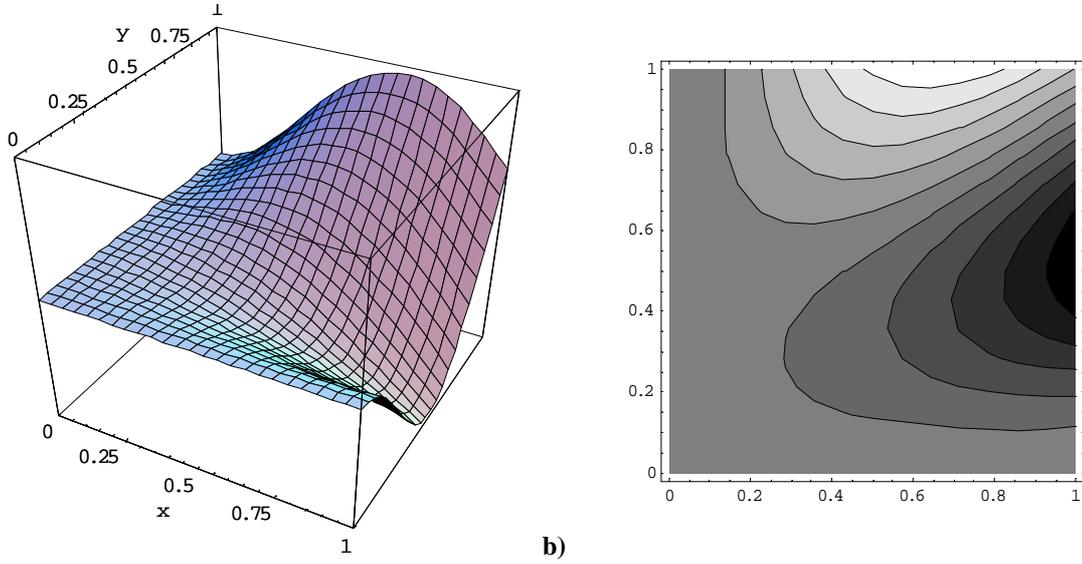
Para los casos tratados en este trabajo $X_m(x)$ se reemplazará por las ecuaciones (8), o (14a), según corresponda y de igual forma se hará para $Y_n(y)$, cuidando de efectuar la inclusión de los modos rígidos rotacional, o traslacional y rotacional según sea el caso de borde simplemente apoyado-libre o libre-libre respectivamente, de acuerdo a las funciones que se mencionaron oportunamente.

A modo de ejemplo, en las Figuras 1-a) hasta f) se grafican las formas modales en una vista tridimensional y sus correspondientes curvas de igual desplazamiento representadas en planta, para las primeras seis frecuencias naturales en el caso de una placa anisótropa cuadrada ($\lambda = 1$) con condiciones de borde E-E-L-L

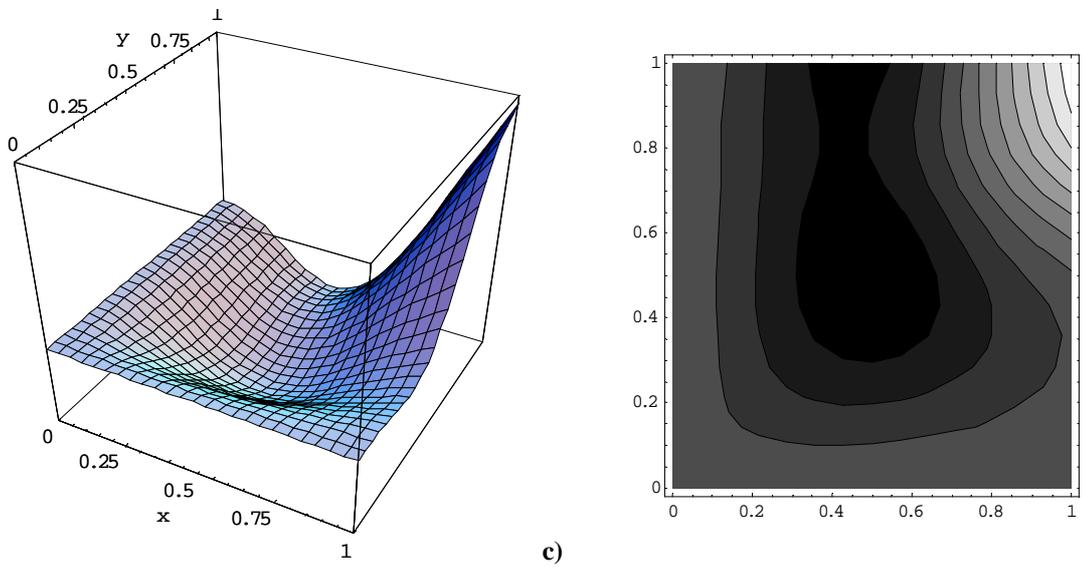


Primer modo : $\Omega_1 = 6.958844$

Figura 1: Modos normales de vibración de una placa anisótropa cuadrada

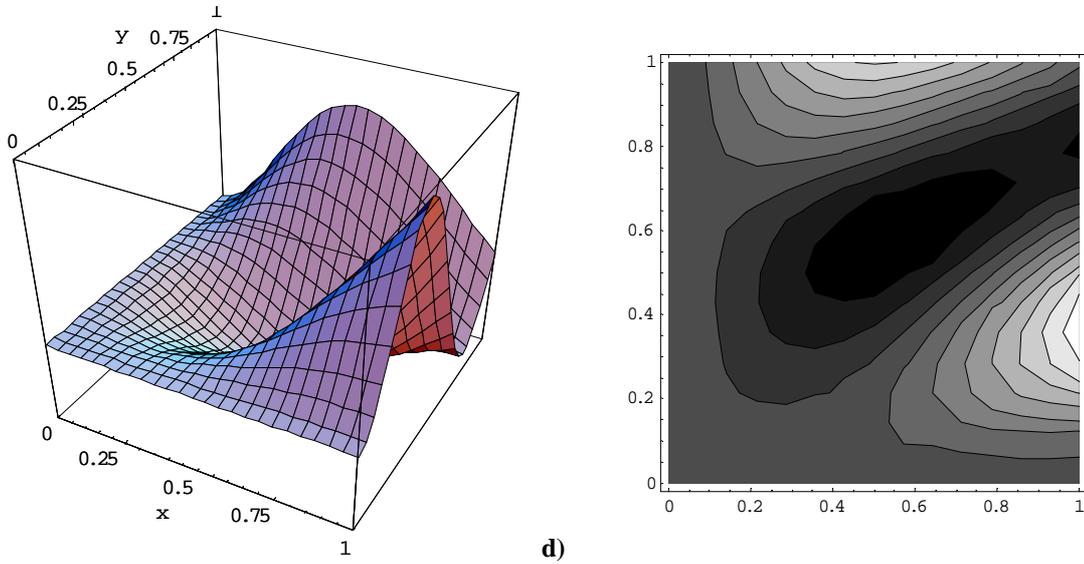


b) Segundo modo $\Omega_2=18.6182$



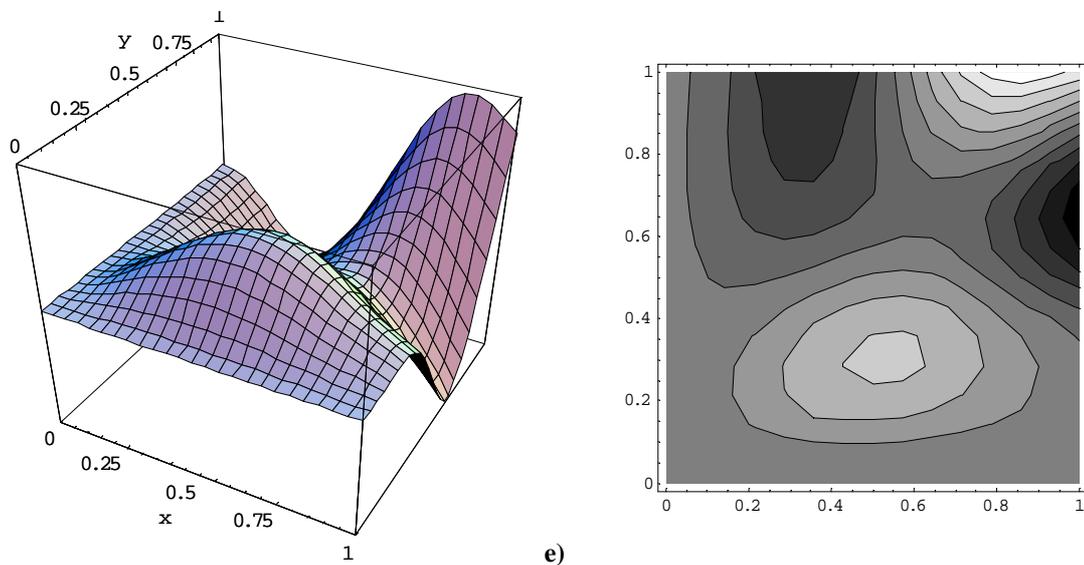
c) Tercer modo: $\Omega_3=27.9385$

Figura 1(Continuación): Modos normales de vibración de una placa anisótropa cuadrada



d)

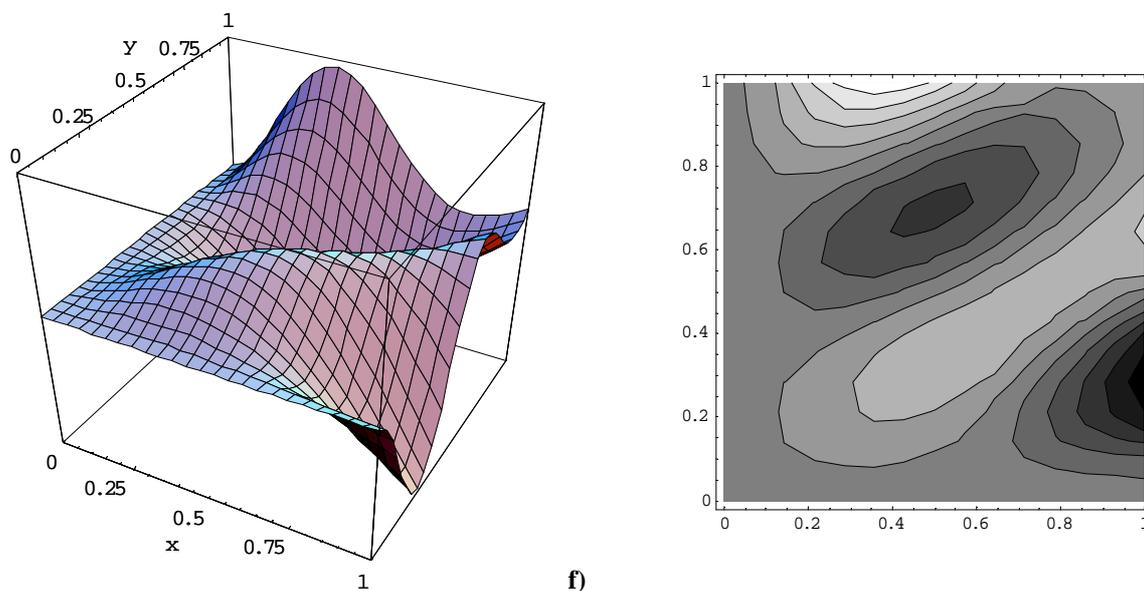
Cuarto modo: $\Omega_4 = 38.5709$



e)

Quinto modo: $\Omega_5 = 51.6138$

Figura 1 (Continuación). Modos normales de vibración de una placa anisótropa cuadrada



Sexto modo: $\Omega_6 = 65.4807$

Figura 1 (Continuación). Modos normales de vibración de una placa anisótropa cuadrada

4 CONCLUSIONES

El presente trabajo permite comprobar que el método de Rayleigh- Ritz, aproximando la deflexión mediante funciones viga, constituye una herramienta rápida y eficaz para atacar un problema complejo como el de la vibración transversal de placas de material anisótropo con distintas condiciones de borde.

La posibilidad creciente de evaluar considerables cantidades de términos en la aproximación (5), contribuye a confiar en que su utilización proveerá resultados precisos en situaciones escasamente tratadas en la literatura como la determinación de esfuerzos y corrimientos tanto para carga estática como para vibración forzada de placas anisótropas. Esto constituirá la próxima etapa de este proyecto de investigación.

5 AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al Dr. Patricio A. A. Laura por sus valiosas sugerencias.

El trabajo ha sido financiado por la Secretaría General de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional del Sur, de la Universidad Nacional del Centro y por el CONICET.

6 REFERENCIAS

- [1] P.M. Ciancio, C.A. Rossit y D.V. Bambill, “Vibraciones transversales de placas rectangulares, con inclusiones anisótropas como refuerzos de masas concentradas”. *Mecánica Computacional XXII (CD)*, 733-742, (2003)
- [2] L.G. Nallim y R.O. Grossi, “On the use of orthogonal polynomials in the study of anisotropic plates”. *Journal of Sound and Vibration* 264, 1201-1207,(2003).

- [3] S.G. Lekhnitskii, *Anisotropic plates*, Gordon and Breach Sciences Publishers, N.Y. (1968)
- [4] D. Young y R.P. Felgar Jr., *Tables of characteristic functions representing normal modes of vibration of a beam*. The University of Texas Publications, N° 4913.(1949).
- [5] R.P. Felgar Jr., *Formulas for integral containing characteristic functions of a vibrating beam*, The University of Texas Publications, Circ. N° 14.(1950).
- [6] A.W. Leissa, “The free vibration of rectangular plates”, *Journal of Sound and Vibration* 31(3), 257-293, (1973)