

DETECCIÓN DE FISURAS EN VIGAS VIBRANTES UTILIZANDO MASAS PUNTUALES

CRACK DETECTION IN VIBRATING BEAMS USING POINT MASSES

Maximiliano Carnelutto, Juan, A. Ferrari y Javier, L. Raffo

*Grupo de Mecánica Computacional, Facultad Regional Delta, Universidad Tecnológica Nacional, San
Martín 1171, 2804 Campana, Argentina, jraffo@frd.utn.edu.ar,
<https://www.frd.utn.edu.ar/mecanica-computacional/>*

Palabras clave: Fisuras, masas, vibraciones, restricciones elásticas, detección.

Resumen. Mucho fue el esfuerzo realizado al momento para la determinación de fisuras en vigas utilizando las frecuencias naturales de vibrar. En el presente trabajo se presenta la influencia de la presencia de masas puntuales para mejorar la detección de fisuras en vigas que vibran. Se presenta un modelo de viga con masas puntuales y condiciones elásticas generales para modelar las diferentes posiciones y profundidades de fisuras. Se analizan las vibraciones libres luego de obtener las ecuaciones diferenciales y condiciones de contorno en forma natural. Se utiliza el método de Ritz para obtener resultados numéricos y se analiza el efecto que causa la presencia de la masa puntual y cómo beneficia la detección de fisuras.

Keywords: Cracks, masses, vibrations, elastic constraints, detection.

Abstract. Much effort has been made up to now to determine cracks in beams using natural vibration frequencies. This paper presents the influence of point masses presences to improve the detection of cracks in vibrating beams. A beam model with point masses and general elastic conditions is presented to model the different positions and depths of cracks. Free vibrations are analyzed after obtaining the differential equations and boundary conditions in a natural way. The Ritz method is used to obtain numerical results and the effect caused by the presence of the point masses and how it benefits crack detection.

1. INTRODUCCIÓN

La detección de fisuras en vigas es de interés en la ingeniería, ya que pueden afectar el comportamiento de diseño y comprometer su integridad. Por otra parte, en general afectan la frecuencia natural al igual que sus correspondientes formas modales.

En el presente trabajo se propone un método para la detección de fisuras en vigas, con distintas profundidades y condiciones de contorno, utilizando una masa puntual y analizando las frecuencias naturales de vibración de la misma.

Si bien el análisis de vibraciones libres de vigas con fisuras fue abordado en gran medida por diferentes autores, y sin intención de realizar una revisión exhaustiva, se mencionan algunos de los últimos trabajos. [Zheng \(2004\)](#), realiza un análisis de vibraciones libres de una viga con fisura, por medio del método de elementos finitos, obteniendo las frecuencias naturales, y las formas modales, agregando una matriz de flexibilidad adicional global, en lugar de la matriz de flexibilidad adicional local, a la matriz de flexibilidad del correspondiente elemento de viga intacto para obtener la matriz de flexibilidad total y, por tanto, la matriz de rigidez. [Orhan \(2007\)](#), realiza un análisis de una viga empotrada libre, para vibraciones libres y forzadas, viendo como varía la respuesta dinámica en cada caso, por medio de un programa de elementos finitos. En el caso de [Ariaei y Ghayour \(2009\)](#), presenta un método de cálculo para determinar la respuesta dinámica en vigas Euler Bernoulli, con fisuras abiertas por medio de una masa puntual en movimiento, utilizando un método de elemento discreto y el método de elementos finitos. Más adelante, [Raffo y Carrizo \(2015\)](#), proponen un método analítico de detección de fisuras, a partir de valores de frecuencias naturales, obtenidos con la solución exacta, experimentalmente y por medio de elementos finitos. Por su parte, [Nguyen \(2016\)](#), propone un método de detección de fisuras en vigas dobles, con vínculos elásticos y una masa adosada, analizando el cambio en la frecuencia natural, utilizando una transformada para amplificarlo, y así detectar la fisura.

Se observa que en la bibliografía no se ha presentado al momento un método de detección de fisuras analítico, directo y que utilice una masa puntual adosada para condiciones de contorno generales. Cabe mencionar que el problema de contorno y las ecuaciones diferenciales se obtuvieron de manera natural, utilizando la técnica del cálculo de variaciones, ([Grossi, 2010](#)). Y los resultados son obtenidos utilizando el método variacional de Ritz.

2. MODELO ANALÍTICO

Se plantea una viga Timoshenko, de longitud l y altura h en tres tramos o subdominios, dentro de los cuales se ubica a una distancia c_i , una masa puntual m_i . Existen dos resortes rotacionales intermedios, conectando ambos lados de la viga, tal como se muestra en la figura 1.

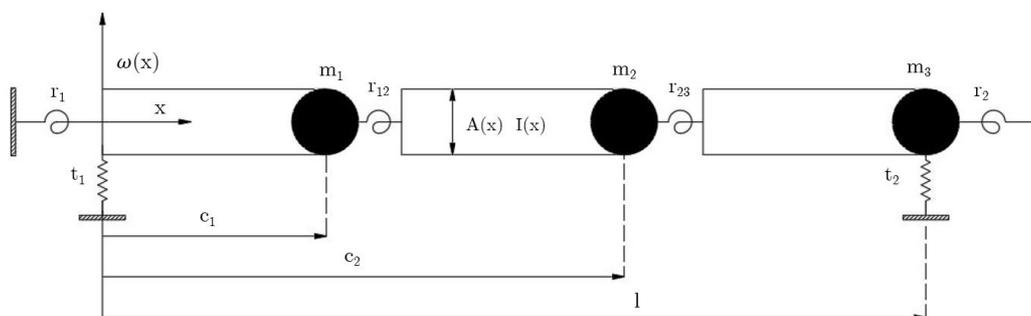


Figura 1: Sistema mecánico del método analítico propuesto.

Luego de resolver el problema de contorno (Raffo y Carnelutto, 2022) y utilizar las técnicas de métodos variacionales al sistema mecánico en estudio, se obtiene el siguiente problema analítico:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^3 \left[\int_{c_{i-1}}^{c_i} \left[\frac{(\kappa GA)_i l^2}{EI} (\bar{x}) \left[\left(\Psi(\bar{x}) - \frac{dW}{d\bar{x}}(\bar{x}) \right) \bar{\Psi}(\bar{x}) + \left(\frac{dW}{d\bar{x}}(\bar{x}) - \Psi(\bar{x}) \right) \frac{d\bar{W}}{d\bar{x}}(\bar{x}) \right] \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{(EI)_i l^2}{EI} \frac{d\Psi}{d\bar{x}}(\bar{x}) \frac{d\bar{\Psi}}{d\bar{x}}(\bar{x}) \right] d\bar{x} + R_{i,i+1} (\Psi(\bar{c}_i^-) - \Psi(\bar{c}_i^+)) \bar{\Psi}(\bar{c}_i^-) + R_{i,i+1} (\Psi(\bar{c}_i^+) \right. \\ & \left. - \Psi(\bar{c}_i^-)) \bar{\Psi}(\bar{c}_i^+) \right] + R_1 \Psi(\bar{0}) \bar{\Psi}(\bar{0}) + R_2 \Psi(\bar{1}) \bar{\Psi}(\bar{1}) + T_1 W(\bar{0}) \bar{W}(\bar{0}) + T_2 W(\bar{1}) \bar{W}(\bar{1}) = \\ & = \sum_{i=1}^3 \lambda^4 \left[\int_{c_{i-1}}^{c_i} \left(W(\bar{x}) \bar{W}(\bar{x}) + \frac{I_i}{A_i l^2} \Psi(\bar{x}) \bar{\Psi}(\bar{x}) \right) d\bar{x} + M_i W(\bar{c}_i^-) \bar{W}(\bar{c}_i^-) \right] \end{aligned} \quad (1)$$

donde: $\bar{c}_i = c_i/l$, $R_{i,i+1} = \frac{r_{i,i+1}l}{(EI)_i}$, $M_i = \frac{m_i}{l(\rho A)_i}$, con $i = 1, 2, 3$, $T_1 = \frac{t_1 l^3}{(EI)_1}$, $R_1 = \frac{r_1 l}{(EI)_1}$, $R_2 = \frac{r_2 l}{(EI)_3}$, $T_2 = \frac{t_2 l^3}{(EI)_3}$.

El coeficiente $\Omega_i = \sqrt{\frac{(\rho A)_i \omega l^2}{(EI)_i}}$, está relacionado con λ_i de la forma $\Omega_i = (\lambda_i)^2$.

Si se aplica el método variacional de Ritz a la ecuación (1), podemos calcular los valores del coeficiente λ_i .

3. MÉTODO DE DETECCIÓN DE FISURAS UTILIZANDO MASAS ADOSADAS

El método consiste en obtener los primeros cuatro valores del coeficiente de frecuencia de la viga Timoshenko, cuando existe una masa puntual cuya ubicación se va variando desde $\bar{x} = 0$ hasta $\bar{x} = 1$ con un paso $\Delta\bar{x} = 0,025$, tanto para la viga sin fisura como la viga con fisura. Luego se obtiene $\lambda(\bar{x}) = \frac{\lambda_c(\bar{x})}{\lambda}$, donde $\lambda_c(\bar{x})$ corresponde a los coeficientes de la viga con fisura y masa adosada, mientras que λ , toma los valores de coeficientes para una viga sin fisura y sin masa adosada. Esta relación nos permite trabajar con valores no mayores a 1.

Por otro lado, se realiza la misma relación, con los coeficientes correspondientes a la viga sin fisura pero con masa. $\lambda_s(\bar{x}) = \frac{\lambda_n(\bar{x})}{\lambda}$, donde $\lambda_n(\bar{x})$ corresponde a los coeficientes de frecuencias obtenidos para la viga sin fisura pero con masa adosada.

Luego se calcula λ_f , que es

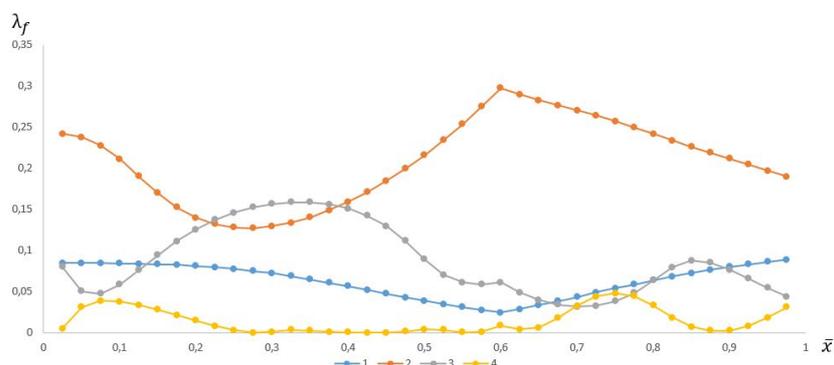
$$\lambda_f(\bar{x}) = \lambda(\bar{x}) - \lambda_s(\bar{x}) \quad (2)$$

A modo de ejemplo, se propone el caso de una viga empotrada libre, con una relación de esbeltez $h/l = 0,25$, una fisura en $\bar{x} = 0,6$, el modelo de fisura corresponde al presentado por Khaji et al. (2009), donde el resorte rotacional que simulará la fisura es $R = 0,5185$, correspondiente a una fisura del 70 % del alto de la viga, la masa $M_i = 1$, se irá colocando en las distintas posiciones \bar{x} , obteniendo todos los valores del coeficiente de vibraciones para cada uno de los casos, en la tabla 1, podemos ver los valores $\lambda(\bar{x})$.

C-F	\bar{x}	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
	0,025	0,91538702	0,75687233	0,90317406	0,88423271
	0,05	0,91536726	0,75630944	0,85444882	0,80783794
	0,075	0,91530823	0,75487882	0,79573856	0,80412579
	0,1	0,91517913	0,75207792	0,75130697	0,81620894
	0,125	0,91494171	0,74740861	0,72008584	0,83375746
	0,15	0,91455107	0,74052897	0,69924504	0,85433397
	0,175	0,91395654	0,73141327	0,68677948	0,8769681
	0,2	0,91310267	0,72040501	0,68120995	0,90096877
	0,225	0,91193042	0,70810494	0,68136447	0,92552049
	0,25	0,91037871	0,6951768	0,6863331	0,94944174
	0,275	0,90838631	0,68219692	0,69546891	0,97106565
	0,3	0,90589401	0,66959428	0,70836903	0,98816802
	0,325	0,90284731	0,65765484	0,72483193	0,99650659
	0,35	0,89919919	0,64655105	0,74480059	0,98650253
	0,375	0,89491294	0,63637352	0,76828668	0,96099028
	0,4	0,88996469	0,62715613	0,79524187	0,93307601
	0,425	0,88434531	0,61889406	0,82528611	0,90765754
	0,45	0,87806143	0,61155592	0,8570805	0,88706188
	0,475	0,87113531	0,60509207	0,88701706	0,87445458
	0,5	0,86360355	0,59944044	0,90798688	0,87486451
	0,525	0,85551487	0,5945308	0,91336528	0,89129682
	0,55	0,84692714	0,59028812	0,90473427	0,9180644
	0,575	0,83790414	0,58663522	0,88811828	0,94536461
Fisura	0,6	0,82851239	0,58349488	0,86772859	0,96754966
	0,625	0,81159378	0,61220974	0,8641004	0,99482795
	0,65	0,7943657	0,64136968	0,86050307	0,9862721
	0,675	0,77698004	0,66998644	0,8577128	0,95638659
	0,7	0,75958058	0,69671642	0,85688755	0,92260812
	0,725	0,74229911	0,71995439	0,85944017	0,89381706
	0,75	0,7252519	0,73813872	0,86651243	0,87408547
	0,775	0,70853731	0,75023545	0,87800681	0,86535669
	0,8	0,69223475	0,75612855	0,89164779	0,86990607
	0,825	0,67640497	0,75660135	0,90349834	0,89055753
	0,85	0,66109133	0,75293699	0,91075529	0,92781616
	0,875	0,64632181	0,74646619	0,91346028	0,97293151
	0,9	0,63211128	0,73829972	0,91301593	0,99624058
	0,925	0,61846391	0,72925443	0,91063731	0,98800833
	0,95	0,60537543	0,71988433	0,90702929	0,96620476
	0,975	0,59283512	0,71054369	0,90252422	0,9397307

Tabla 1: Valores de $\lambda(\bar{x})$ para viga con fisura en $\bar{x} = 0,6$.

Se procede a realizar la diferencia entre los valores obtenidos, para la viga fisurada con masa puntual ($\lambda(\bar{x})$) y los correspondientes a la viga sin fisura pero con masa puntual ($\lambda_s(\bar{x})$). Estos nuevos valores, $\lambda_f(\bar{x})$, son plasmados en una gráfica de ejes indicando la posición de la masa y una escala numérica de 0 a 1. Tal como se ve en la Figura 2, donde la curva azul representa lo relativo al primer modo, la naranja al segundo modo, la gris al tercer modo y finalmente la amarilla al cuarto modo.

Figura 2: Gráfica de λ_f para distintas posiciones de masa, con fisura en $\bar{x} = 0,6$, donde la curva $i = 1, \dots, 4$ representa el valor relativo al modo i .

Se calcula la derivada de la función diferencia, $\lambda_f(\bar{x})$, utilizando el método de aproximación

por diferencia centrada mediante la ecuación,

$$\frac{d\lambda_f(\bar{x})}{dx} = \frac{\lambda_f(\bar{x} + \Delta\bar{x}) - \lambda_f(\bar{x} - \Delta\bar{x})}{2\Delta\bar{x}} \tag{3}$$

para evidenciar los cambios de pendiente que se producen a medida que nos vamos acercando a la ubicación de la fisura, y normalizamos la misma para obtener valores no mayores a la unidad. Esto lo podemos ver en la Figura 3.

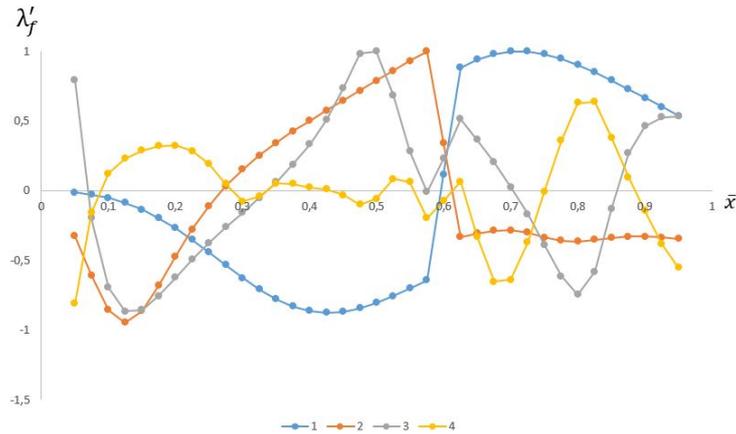


Figura 3: Gráfica de $\frac{d\lambda_f(\bar{x})}{dx}$ para distintas posiciones de masa, con fisura en $\bar{x} = 0,6$, donde la curva $i = 1, \dots, 4$ representa el valor relativo al modo i .

Por otro lado, se calcula la segunda derivada de la función diferencia,

$$\frac{d^2\lambda_f(\bar{x})}{d\bar{x}^2} = \frac{\lambda_f(\bar{x} + \Delta\bar{x}) - 2\lambda_f(\bar{x}) + \lambda_f(\bar{x} - \Delta\bar{x})}{\Delta\bar{x}^2} \tag{4}$$

y normalizamos la misma para obtener valores no mayores a la unidad, sabiendo que ésta, nos muestra los puntos donde existen máximos en la misma, con la idea de poder identificar la ubicación de la fisura. Tal como se muestra en la Figura 4.

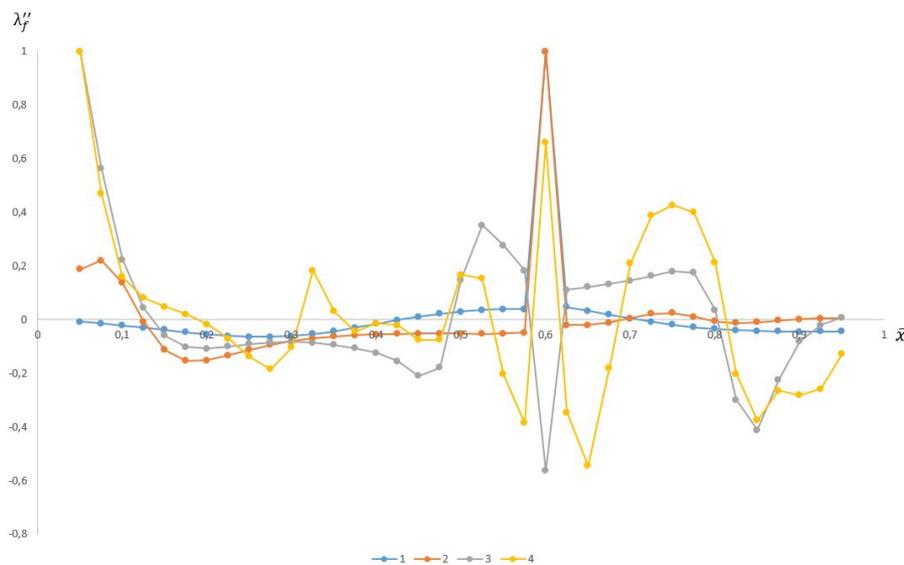


Figura 4: Gráfica de $\frac{d^2\lambda_f(\bar{x})}{d\bar{x}^2}$ para distintas posiciones de masa, con fisura en $\bar{x} = 0,6$, donde la curva $i = 1, \dots, 4$ representa el valor relativo al modo i .

4. RESULTADOS

Se muestran los resultados obtenidos para una viga con una relación de esbeltez $h/l = 0,25$, con distintas condiciones de contorno, y posiciones de fisura, tomando los dos primeros valores de $\lambda_f(\bar{x})$, donde las curvas azules representan los valores relativos al primer modo, y las naranjas al segundo modo.

4.1. Viga Empotrada-Libre (C-F)

En primer lugar se ven los resultados para un caso Empotrado-libre (C-F), donde $T_1 = R_1 = \infty$ y $T_2 = R_2 = 0$, con fisura en $\bar{x} = 0,5$, figuras 5, 6 y 7.

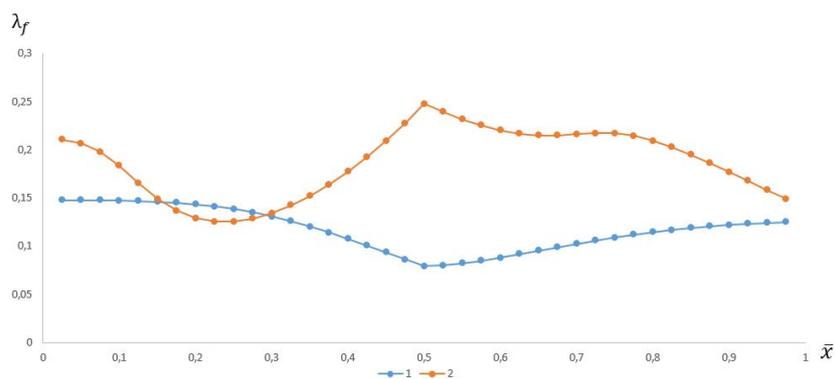


Figura 5: Gráfica de λ_f para distintas posiciones de masa, viga C-F con fisura en $\bar{x} = 0,5$, donde la curva $i = 1, 2$ representa el valor relativo al modo i .

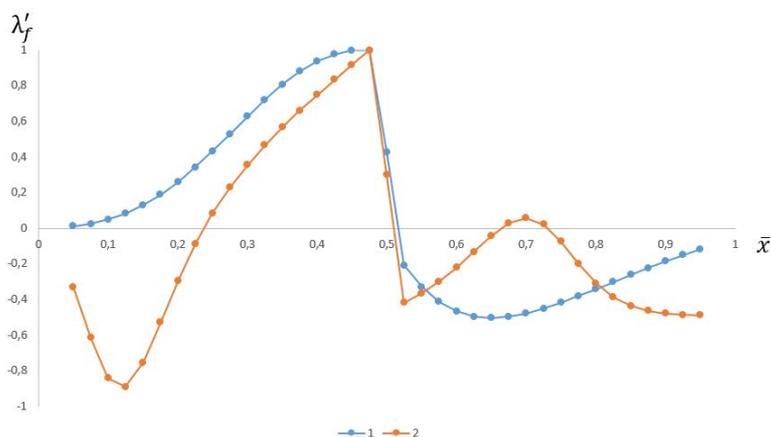


Figura 6: Gráfica de $\frac{d\lambda_f(\bar{x})}{dx}$ para distintas posiciones de masa, viga C-F con fisura en $\bar{x} = 0,5$, donde la curva $i = 1, 2$ representa el valor relativo al modo i .

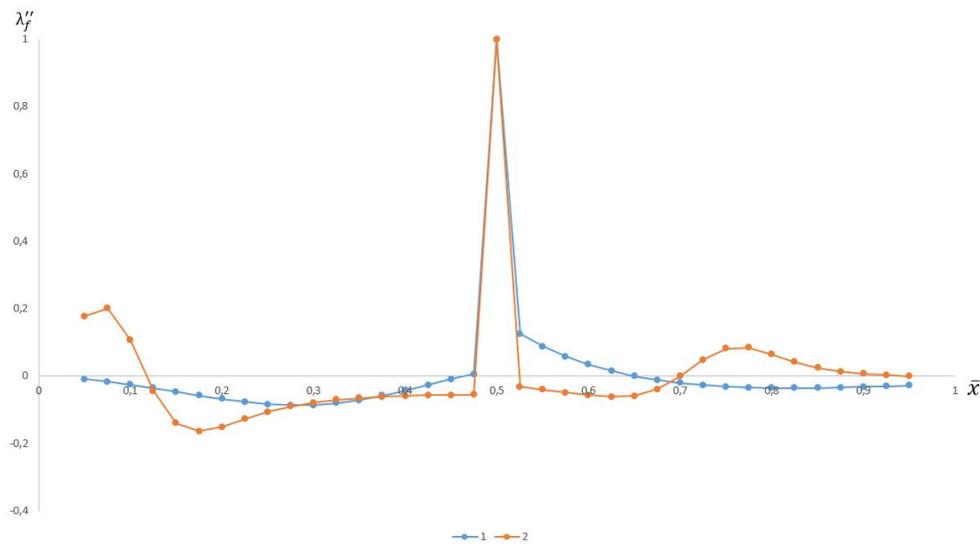


Figura 7: Gráfica de $\frac{d^2 \lambda_f(\bar{x})}{d\bar{x}^2}$ para distintas posiciones de masa, viga C-F con fisura en $\bar{x} = 0,5$, donde la curva $i = 1, 2$ representa el valor relativo al modo i .

Tal como se puede apreciar, analizando el caso empotrado-libre, en la Figura 5, en $\bar{x} = 0,5$, se produce un pico en la función, que nos permite saber que es un punto de interés. En la Figura 6, se puede ver que hay salto en el cambio de la pendiente en dicha posición, mientras que en la Figura 7, se produce un pico, de un orden mucho mayor, debido a la derivada segunda, en el mismo punto de interés, esto nos permite determinar que será el punto de ubicación de la fisura.

4.2. Viga Simplemente apoyada (S-S)

Se muestran las gráficas para un caso simplemente apoyado (S-S), donde $T_1 = T_2 = \infty$ y $R_1 = R_2 = 0$, con fisura en $\bar{x} = 0,4$, figuras 8, 9 y 10.

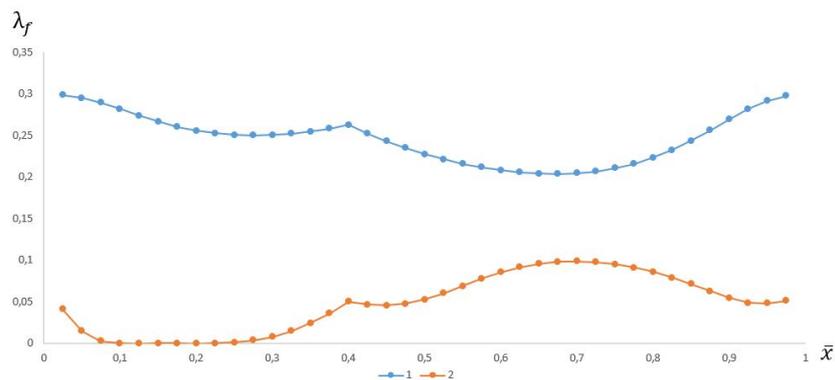


Figura 8: Gráfica de λ_f para distintas posiciones de masa, viga S-S con fisura en $\bar{x} = 0,4$, donde la curva $i = 1, 2$ representa el valor relativo al modo i .

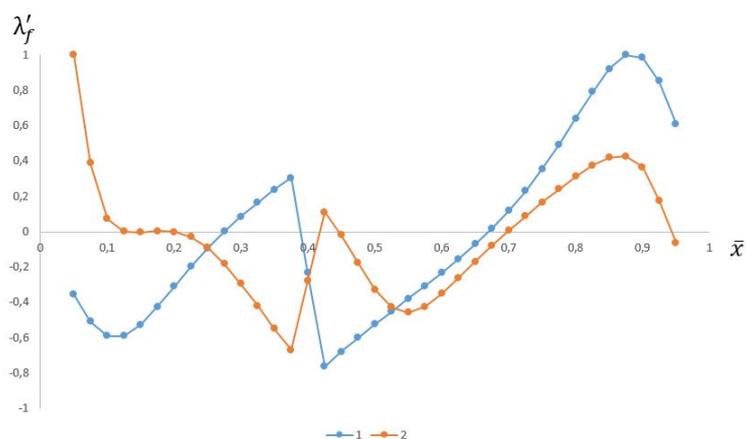


Figura 9: Gráfica de $\frac{d\lambda_f(\bar{x})}{dx}$ para distintas posiciones de masa, viga S-S con fisura en $\bar{x} = 0,4$, donde la curva $i = 1, 2$ representa el valor relativo al modo i .

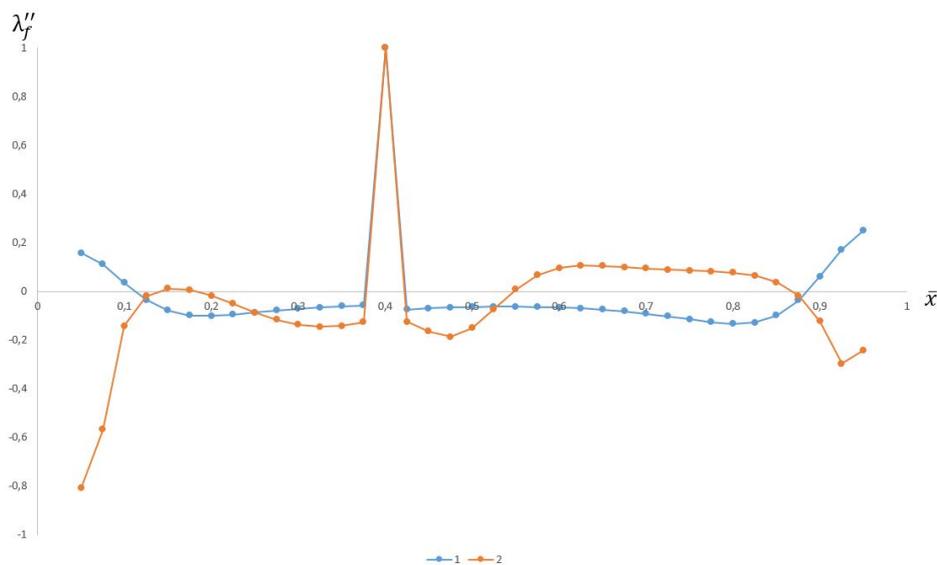


Figura 10: Gráfica de $\frac{d^2\lambda_f(\bar{x})}{d\bar{x}^2}$ para distintas posiciones de masa, viga S-S con fisura en $\bar{x} = 0,4$, donde la curva $i = 1, 2$ representa el valor relativo al modo i .

Si vemos las Figuras 8, 9 y 10, correspondientes a la viga simplemente apoyada, y analizamos los gráficos, se puede apreciar que en $\bar{x} = 0,4$ se producen picos y saltos en los cambios de pendiente, tal como se vio para el caso empotrado-libre, de esta manera podemos decir que en dicha posición se encuentra la fisura.

4.3. Viga Empotrada-Simple (C-S)

Por otro lado, se presentan los resultados para un caso Empotrado-Simple (C-S), donde $T_1 = R_1 = \infty$ y $T_2 = \infty$ y $R_2 = 0$, con fisura en $\bar{x} = 0,3$, figuras 11, 12 y 13.

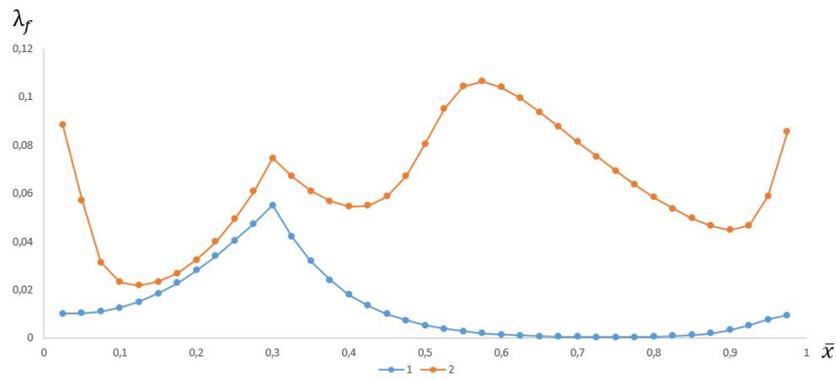


Figura 11: Gráfica de λ_f para distintas posiciones de masa, viga C-S con fisura en $\bar{x} = 0,3$, donde la curva $i = 1, 2$ representa el valor relativo al modo i .

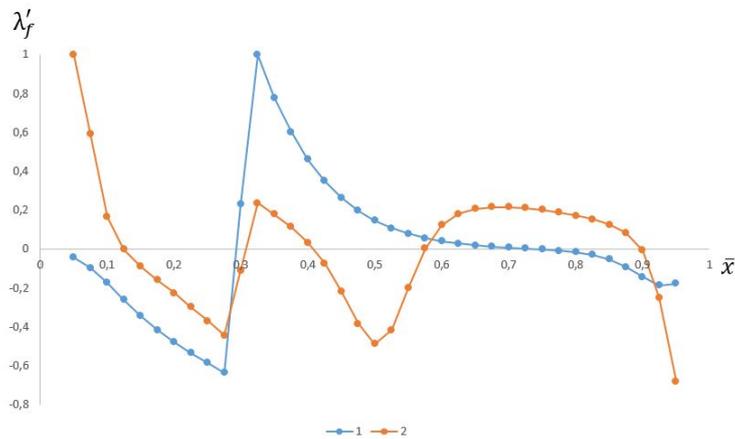


Figura 12: Gráfica de $\frac{d\lambda_f(\bar{x})}{dx}$ para distintas posiciones de masa, viga C-S con fisura en $\bar{x} = 0,3$, donde la curva $i = 1, 2$ representa el valor relativo al modo i .

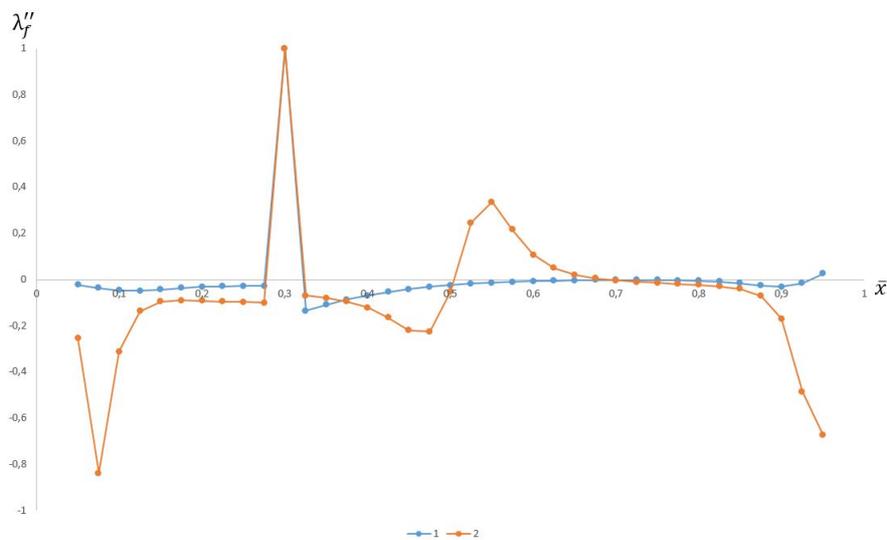


Figura 13: Gráfica de $\frac{d^2\lambda_f(\bar{x})}{d\bar{x}^2}$ para distintas posiciones de masa, viga C-S con fisura en $\bar{x} = 0,3$, donde la curva $i = 1, 2$ representa el valor relativo al modo i .

Para el caso empotrado-simplemente apoyado, analizando los gráficos de las Figuras 11, 12 y 13, al igual que los casos anteriores, se puede ver que la fisura se encuentra ubicada en la posición de los picos y el cambio de pendiente.

5. CONCLUSIONES

Se puede apreciar que el algoritmo para el método planteado y desarrollado, nos brinda muy buenos resultados para vigas Timoshenko, con una relación de esbeltez $h/l = 0,25$, con un porcentaje de fisura del 70 % del espesor, para las condiciones de borde analizadas. Permitiendo identificar donde se encuentra la misma, utilizando una masa adosada que recorre su longitud, haciendo un análisis de los tres gráficos que se presentan según cada caso, $\lambda_f(\bar{x})$, $\frac{d\lambda_f(\bar{x})}{d\bar{x}}$ y $\frac{d^2\lambda_f(\bar{x})}{d\bar{x}^2}$.

REFERENCIAS

- Ariaei A. Ziaei-Rad S. y Ghayour M. Vibration analysis of beams with open and breathing cracks subjected to moving masses. *Journal of Sound and Vibration*, 326:709–724, 2009.
- Grossi R. *Cálculo de variaciones. Teoría y Aplicaciones*. CIMNE, Barcelona, 2010.
- Khaji N., Shafiei M., y Jalalpour M. Closed-form solutions for crack detection problem of timoshenko beams with various boundary conditions. *International Journal of Mechanical Sciences*, 51:667–681, 2009.
- Nguyen K.V. Crack detection of a double-beam carrying a concentrated mass. *Mechanics Research Communications*, 75:20–28, 2016.
- Orhan S. Analysis of free and forced vibration of a cracked cantilever beam. *NDTE International*, 40:443–450, 2007.
- Raffo J.L. y Carnelutto M. Análisis de vibraciones libres de soportes cortos con masas y restricciones elásticas generales. *AMCA*, 39:231–240, 2022.
- Raffo J.L. y Carrizo M.R. Método analítico de detección de fisuras en vigas vibrantes. *Revista Argentina de Ingeniería CONFEDI*, 5, 2015.
- Zheng D.Y. and Kessissoglou N. Free vibration analysis of a cracked beam by finite element method. *Journal of Sound and Vibration*, 273:457–475, 2004.