

UN ELEMENTO FINITO DE VIGA CON IMPERFECCIONES INCLUIDAS IMPLICITAMENTE EN ENERGÍA.

A BEAM FINITE ELEMENT WITH IMPERFECTIONS IMPLICITLY INCLUDED IN ENERGY

Claudio E. Jouglaard y Ana Liza Perez

*Departamento de Ingeniería Civil, Facultad Regional Buenos Aires, Universidad Tecnológica Nacional, Mozart 2300, C1407IVT Buenos Aires, Argentina, claudio.jouglaard@frba.utn.edu.ar,
<http://www.frba.utn.edu.ar>*

Palabras clave: Imperfecciones implícitas, matrices no lineales, elemento finito de viga.

Resumen. Para el cálculo de estructuras metálicas esbeltas es necesario llevar en cuenta el efecto de imperfecciones o pequeños desvíos de la geometría para el cálculo de las resistencias requeridas de sus miembros. La mayoría de los programas comerciales modelan la geometría imperfecta simplemente desplazando los nodos de la malla de elementos finitos. Esto puede requerir una gran cantidad de elementos, en especial para imperfecciones con gran variación de curvatura en cada miembro. En este trabajo presentamos un elemento finito para el análisis no lineal geométrico de vigas imperfectas donde las imperfecciones son llevadas en cuenta en la formulación del elemento de manera implícita en la energía potencial del elemento. Esta formulación simplifica el tratamiento de las imperfecciones y se consigue una reducción de la cantidad de elementos finitos necesarios en el modelado de estructuras de barras imperfectas.

Keywords: Implicit imperfections, nonlinear matrices, beam finite element.

Abstract. For the analysis of slender metal structures, it is necessary to take into account the effect of imperfections or small deviations in the geometry for the computation of the required resistance of its members. Most commercial programs model imperfect geometry by simply shifting the nodes of the finite element mesh. This may require a large number of elements, especially for imperfections with large variation in curvature in each member. In this work we present a finite element for the geometric nonlinear analysis of imperfect beams where the imperfections are taken into account in the formulation of the element implicitly in the potential energy of the element. This formulation simplifies the treatment of imperfections and achieves a reduction in the number of finite elements necessary in the modeling of imperfect structures.

1. INTRODUCCIÓN

Las estructuras metálicas esbeltas presentan problemas de inestabilidad (Ziemian, 2010) y estos se manifiestan al incrementarse las cargas hasta alcanzar un cierto valor, usualmente llamado carga crítica o de pandeo, donde la estructura se inestabiliza cambiando bruscamente de configuración pasando a un estado con grandes desplazamientos y deformaciones que pueden llevar al colapso de la estructura.

En general, este fenómeno no se presenta de manera repentina al llegar a la carga de pandeo, sino que aparece de manera gradual. Esto es debido a la presencia inevitable de las imperfecciones geométricas que provocan un incremento de las deformaciones desde el inicio de la carga (Ziemian, 2010; Godoy, 1996; Thompson y Hunt, 1973).

En la figura 1 podemos observar una columna ideal perfectamente vertical y cargada de punta a la izquierda. En esta configuración la deformada es perfectamente vertical hasta que la carga alcanza un valor crítico P_c y en ese punto es posible una configuración de equilibrio asociada a su modo de pandeo que se muestra en la misma figura. Técnicamente existe una bifurcación para esa carga como se muestra a la derecha.

En el centro tenemos una columna real que presenta pequeñas imperfecciones geométricas y por lo tanto presenta deformaciones laterales desde el inicio de la carga. Finalmente a la derecha tenemos un diagrama de carga-desplazamiento donde se aprecia que el comportamiento real de la estructura imperfecta, que es asintótico al de la estructura perfecta, presenta desplazamientos laterales desde el inicio y son estas deformaciones las que dan el estado tensional real presente en la estructura.

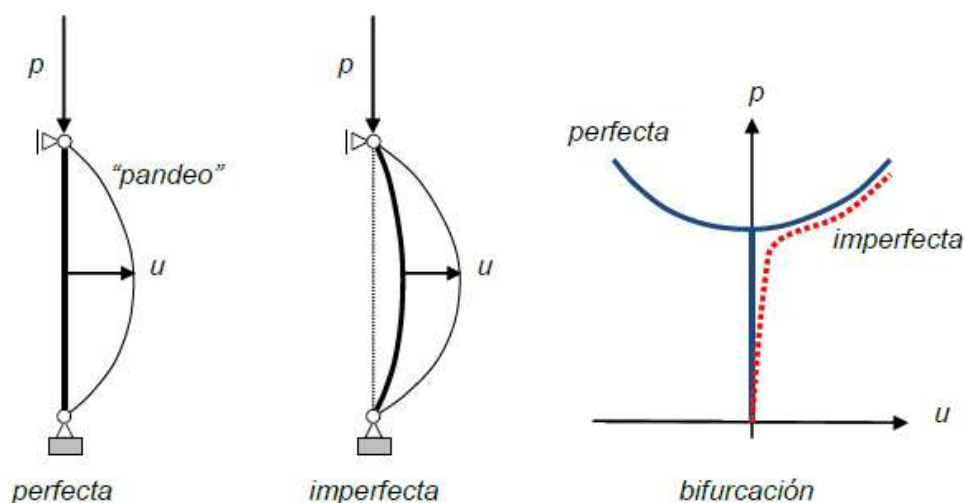


Figura 1: Columna cargada de punta.

Las normativas más modernas de análisis estructural, como el ANSI/AISC-310 o el Eurocode 3, especifican que para la verificación y dimensionamiento de estructuras metálicas el equilibrio debería plantearse en una configuración imperfecta, esto es, deben ser llevadas en cuenta imperfecciones en la definición de la geometría inicial con una amplitud acorde a la calidad constructiva.

Un problema que se presenta con el modelado directo de imperfecciones es que la estructura originalmente formado por componentes rectos, adquiere una geometría curva. Los programas

comerciales de cálculo actuales pueden modelar estructuras imperfectas pero en su inmensa mayoría definen las imperfecciones simplemente desplazando los nodos de la estructura perfecta, sin embargo esto puede requerir una cantidad elevada de elementos para modelar la imperfección (ver figura 2).

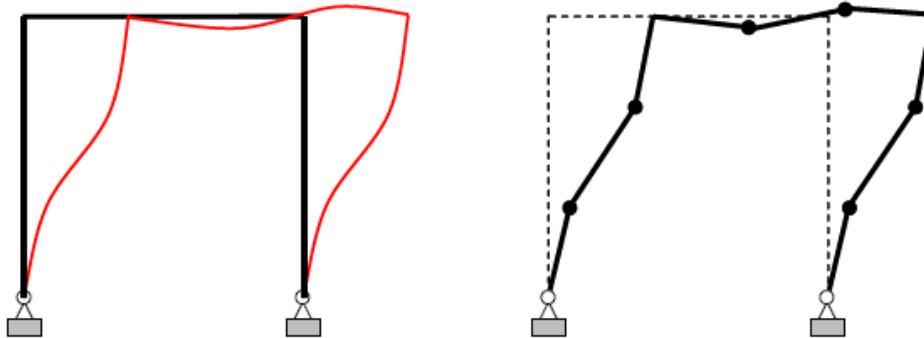


Figura 2: Aproximación de imperfecciones con elementos finitos rectos.

En este trabajo presentaremos una formulación de elementos finitos con imperfecciones incluidas en energía, más específicamente en los desplazamientos, que permite llevar en cuenta la influencia de las imperfecciones con mínimas modificaciones con respecto de la formulación para la estructuras perfectas.

En particular, mostraremos la deducción de las matrices y vectores necesarios para implementar una estrategia incremental para la obtención de la respuesta de estructuras planas aporricadas.

2. ENERGÍA DE DEFORMACION DE LA ESTRUCTURA PERFECTA

Asumiendo que todas las fuerzas actuando sobre la estructura son conservativas, es posible entonces definir una función de energía potencial V como

$$V(\mathbf{u}, \lambda) = U(\mathbf{u}) - \lambda W(\mathbf{u}) \quad (1)$$

siendo \mathbf{u} un vector de coordenadas generalizadas, en el caso de elementos finitos identificadas con desplazamientos nodales u_i

$$\mathbf{u}^T = \{u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad \cdots \quad u_n\}^T \quad (2)$$

λ es el factor de cargas proporcionales y $W(\mathbf{u})$ representa al trabajo de las fuerzas externas de referencia \mathbf{p} definido como:

$$W(\mathbf{u}) = \mathbf{p}^T \mathbf{u} \quad (3)$$

donde se asume que el vector de fuerzas externas de referencia \mathbf{p} es constante.

Luego, asumiremos que la energía de deformación $U(\mathbf{u})$ se pueda expresar mediante una serie de Taylor en las coordenadas generalizadas truncada a términos cuárticos

$$U(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}U_{ij}u_iu_j + \frac{1}{6}U_{ijk}u_iu_ju_k + \frac{1}{24}U_{ijkl}u_iu_ju_ku_l \quad (4)$$

donde se adopta la convención de suma sobre índices repetidos y los tensores simétricos U_{ij} , U_{ijk} , U_{ijkl} son

$$U_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial u_i \partial u_j} \Big|_0 = U_{,i} \Big|_0 \quad (5a)$$

$$U_{ijk} = \frac{\partial^3 U}{\partial u_i \partial u_j \partial u_k} \Big|_0 = U_{,ij} \Big|_0 \quad (5b)$$

$$U_{ijkl} = \frac{\partial^4 U}{\partial u_i \partial u_j \partial u_k \partial u_l} \Big|_0 = U_{,ijk} \Big|_0 \quad (5c)$$

donde con coma indicamos derivada respecto de las coordenadas generalizadas y todas las cantidades están evaluadas en la configuración inicial indeformada ($u_i = 0$).

Definiendo a las matrices \mathbf{K}_0 , $\mathbf{K}_1(\mathbf{u})$, $\mathbf{K}_2(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, que llamaremos matrices de rigidez de orden 0, 1, 2, respectivamente, de componentes

$$\mathbf{K}_0 = \{U_{ij}\}_{ij} \quad (6a)$$

$$\mathbf{K}_1(\mathbf{u}) = \{U_{ijk}u_k\}_{ij} \quad (6b)$$

$$\mathbf{K}_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \{U_{ijkl}u_k v_l\}_{ij} \quad (6c)$$

donde indicamos entre llaves al término genérico i, j de la matriz.

Usando estas matrices la energía de deformación puede expresarse como

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K}_0 \mathbf{u} + \frac{1}{6} \mathbf{u}^T \mathbf{K}_1(\mathbf{u}) \mathbf{u} + \frac{1}{24} \mathbf{u}^T \mathbf{K}_2(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \mathbf{u} \quad (7)$$

La notación con matrices facilita la implementación computacional de las expresiones involucradas.

2.1. Ecuaciones de equilibrio de la estructura perfecta

Las ecuaciones de equilibrio \mathbf{r} vienen dadas por las derivadas de la energía potencial, ec.(1), respecto de las coordenadas generalizadas u_i , esto es

$$\mathbf{r} = V_{\mathbf{u}} = U_{\mathbf{u}} - \lambda W_{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad (8)$$

donde con un vector como subíndice indicamos que se debe derivar respecto de cada componente del vector. Además, el primer término de esta suma es el vector de fuerzas internas \mathbf{f} cuyas componentes f_i vienen dadas por

$$f_i = \frac{\partial U}{\partial u_i} = U_{,i} \quad (9)$$

Aplicando las reglas del álgebra indicial (45) el vector de fuerzas internas f_i se puede expresar como:

$$f_i = U_{,i} = U_{ij}u_j + \frac{1}{2}U_{ijk}u_j u_k + \frac{1}{6}U_{ijkl}u_j u_k u_l \quad (10)$$

y usando las matrices de rigidez (6) se puede escribir como

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{K}_0 \mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{K}_1(\mathbf{u}) \mathbf{u} + \frac{1}{6} \mathbf{K}_2(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \mathbf{u} \quad (11)$$

Además, derivando el trabajo W de las fuerzas externas tenemos

$$\frac{\partial W}{\partial u_i} = W_{,i} = p_i \quad (12)$$

Por lo tanto, las ecuaciones de equilibrio quedan

$$\mathbf{r} = \mathbf{f}(\mathbf{u}) - \lambda \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (13)$$

Estas ecuaciones deben verificarse en cualquier configuración de equilibrio definida por las coordenadas generalizadas \mathbf{u} .

2.2. Matriz de rigidez tangente de la estructura perfecta

La matriz de rigidez tangente \mathbf{K} viene dada por las derivadas de las ecuaciones de equilibrio respecto de las coordenadas generalizadas u_i y como el vector \mathbf{p} es constante, entonces coincide con la derivada segunda de la energía de deformación respecto de las mismas coordenadas

$$\mathbf{K}(\mathbf{u}) = \mathbf{r}_{\mathbf{u}} = U_{\mathbf{u}\mathbf{u}}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} U_{,11} & U_{,12} & \dots & U_{,1n} \\ U_{,21} & U_{,22} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_{,n1} & \dots & \dots & U_{,nn} \end{bmatrix} \quad (14)$$

esto es, las componentes K_{ij} de la matriz de rigidez tangente son

$$K_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial u_i \partial u_j} = U_{,ij} \quad (15)$$

Notemos que la matriz de rigidez tangente es siempre simétrica pues la energía de deformación es una función continua en las coordenadas generalizadas u_i y sus derivadas cruzadas son iguales, independientemente del orden de derivación.

Aplicando las reglas de derivación (45), las componentes K_{ij} son

$$K_{ij} = U_{,ij} = U_{ij} + U_{,ijk}u_k + \frac{1}{2}U_{,ijkl}u_ku_l \quad (16)$$

En forma matricial, usando las matrices (6), la matriz de rigidez tangente \mathbf{K} se puede expresar como

$$\mathbf{K}(\mathbf{u}) = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1(\mathbf{u}) + \frac{1}{2}\mathbf{K}_2(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \quad (17)$$

Esta expresión es válida para cualquier configuración de equilibrio definida por desplazamientos \mathbf{u} .

3. ENERGIA DE DEFORMACION DE LA ESTRUCTURA IMPERFECTA

Consideremos una estructura deformable y tres configuraciones mostradas en la figura 3. Por un lado una configuración perfecta de referencia desde la cual se miden los desplazamientos totales \mathbf{v} , por otro lado tenemos una configuración imperfecta donde la estructura está libre de deformaciones y tensiones desde la cual se miden los desplazamientos de deformación \mathbf{u} . La configuración imperfecta inicial viene dada por el campo de desplazamientos $\epsilon \mathbf{w}$, donde \mathbf{w} es un campo fijo de imperfecciones de referencia, que asumimos conocido, y ϵ es un parámetro que mide la amplitud de las imperfecciones.

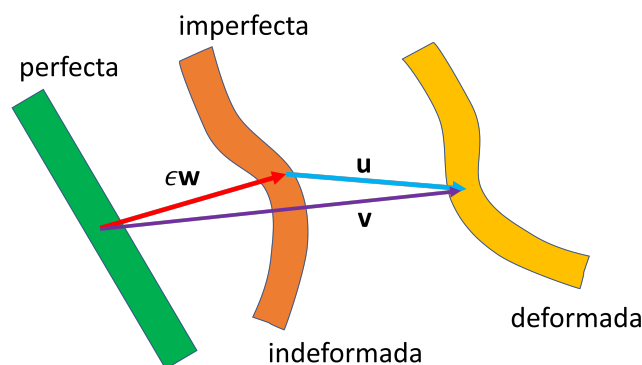


Figura 3: Configuraciones de la estructura imperfecta.

Luego es posible descomponer los desplazamientos como

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} - \epsilon \mathbf{w} \quad (18)$$

Asumiendo que las imperfecciones sean muy pequeñas es posible integrar la energía de deformación sobre la configuración de referencia perfecta, asumiendo que la configuración imperfecta es casi coincidente con la configuración de perfecta de referencia. Luego es posible asumir que la energía de deformación se puede expresar de manera idéntica a la de la estructura perfecta, ec.(4).

$$U(\mathbf{u}) = U(\mathbf{v} - \epsilon \mathbf{w}) \quad (19)$$

La única diferencia formal es que ahora las coordenadas generalizadas son los desplazamientos totales \mathbf{v} . Posiblemente, Timoshenko haya sido uno de los primeros en establecer la energía de deformación de una estructura imperfecta de esta manera (Timoshenko y Gere, 1961).

3.1. Ecuaciones de equilibrio de la estructura imperfecta

La energía potencial se puede expresar de manera similar para la estructura imperfecta

$$V(\mathbf{u}, \lambda) = U(\mathbf{u}) - \lambda W(\mathbf{u}) = U(\mathbf{u}) - \lambda \mathbf{p}^T \mathbf{u} \quad (20)$$

Para obtener las ecuaciones de equilibrio debemos derivar la energía potencial respecto de las coordenadas generalizadas v_i , esto es

$$\mathbf{r} = V_{\mathbf{v}} = U_{\mathbf{v}} - \lambda W_{\mathbf{v}} = \mathbf{0} \quad (21)$$

Aplicando la regla de la cadena tenemos

$$\mathbf{r} = V_{\mathbf{v}} = V_{\mathbf{u}} \mathbf{u}_{\mathbf{v}} = (U_{\mathbf{u}} - \lambda W_{\mathbf{u}}) \mathbf{u}_{\mathbf{v}} = (\mathbf{f}(\mathbf{u}) - \lambda \mathbf{p}) \mathbf{u}_{\mathbf{v}} = \mathbf{0} \quad (22)$$

donde $\mathbf{u}_{\mathbf{v}} = \mathbf{I}$ es la matriz identidad, pues

$$u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial v_j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (23)$$

Luego las ecuaciones de equilibrio de la estructura imperfecta quedan

$$\mathbf{r} = \mathbf{f}(\mathbf{u}) - \lambda \mathbf{p} = \mathbf{0} \quad (24)$$

donde el vector de fuerzas internas $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ se expresa por la ec.(11) sustituyendo \mathbf{u} por $\mathbf{v} - \epsilon \mathbf{w}$.

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{f}(\mathbf{v} - \epsilon \mathbf{w}) \quad (25)$$

3.2. Matriz de rigidez tangente de la estructura imperfecta

La matriz de rigidez tangente \mathbf{K} viene dada por las derivadas de las ecuaciones de equilibrio respecto de las coordenadas generalizadas v_i y como el vector \mathbf{p} es constante, entonces coincide con la derivada segunda de la energía de deformación respecto de las mismas coordenadas

$$\mathbf{K} = \mathbf{r}_v = \mathbf{r}_u = U_{uu}(\mathbf{u}) = U_{uu}(\mathbf{v} - \epsilon \mathbf{w}) \quad (26)$$

En forma matricial la matriz de rigidez tangente \mathbf{K} de la estructura imperfecta se expresa de manera idéntica a la de la estructura perfecta, ec.(17) aunque sustituyendo \mathbf{u} por $\mathbf{v} - \epsilon \mathbf{w}$.

$$\mathbf{K}(\mathbf{v} - \epsilon \mathbf{w}) = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1(\mathbf{v} - \epsilon \mathbf{w}) + \frac{1}{2} \mathbf{K}_2(\mathbf{v} - \epsilon \mathbf{w}, \mathbf{v} - \epsilon \mathbf{w}) \quad (27)$$

Esta expresión es válida para cualquier configuración de equilibrio definida por desplazamientos \mathbf{v} .

4. VECTOR TANGENTE DE LA ESTRUCTURA IMPERFECTA

Asumiremos que las soluciones \mathbf{v} , λ de las ecuaciones de equilibrio imperfecto (24) vienen expresadas paramétricamente por las funciones analíticas $\mathbf{v}(t, \epsilon)$, $\lambda(t, \epsilon)$, al menos en un entorno del origen ($t = 0, \epsilon = 0$) de un cierto parámetro t . Luego estas funciones se pueden expresar por las siguientes series de Taylor (Toledo, 2021) como

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(t, \epsilon) &= \mathbf{w}\epsilon + (\mathbf{v}^{[1,0]} + \mathbf{v}^{[1,1]}\epsilon) t + (\mathbf{v}^{[2,0]} + \mathbf{v}^{[2,1]}\epsilon) t^2 + \dots \\ \lambda(t, \epsilon) &= (\lambda^{[1,0]} + \lambda^{[1,1]}\epsilon) t + (\lambda^{[2,0]} + \lambda^{[2,1]}\epsilon) t^2 + \dots \end{aligned} \quad (28)$$

El vector tangente inicial viene dado por la derivada del vector posición respecto del parámetro t evaluada en $t = 0$, esto es

$$\boldsymbol{\rho}_0^{[1]} = \begin{Bmatrix} \mathbf{v}^{[1,0]} + \mathbf{v}^{[1,1]}\epsilon \\ \lambda^{[1,0]} + \lambda^{[1,1]}\epsilon \end{Bmatrix} \quad (29)$$

Si usamos el factor de cargas $\lambda = t$ como parámetro del camino imperfecto, se puede demostrar (Toledo, 2021) que el vector tangente inicial se puede escribir como

$$\boldsymbol{\rho}_0^{[1]} = \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_0 + \mathbf{v}^{[1,1]}\epsilon \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (30)$$

donde \mathbf{d}_0 y $\mathbf{v}^{[1,1]}$ se obtienen de resolver

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_0 \mathbf{d}_0 &= -\mathbf{p} \\ \mathbf{K}_0 \mathbf{v}^{[1,1]} &= -\mathbf{K}_G(\mathbf{0}, \mathbf{d}_0) \mathbf{w} \end{aligned} \quad (31)$$

Siendo $\mathbf{K}_G(\mathbf{u}_E, \mathbf{d}_E)$ la *matriz de rigidez geométrica* en una configuración de equilibrio definida por los desplazamientos de deformación $\mathbf{u}_E = \mathbf{v}_E - \epsilon \mathbf{w}$

$$\mathbf{K}_G(\mathbf{u}_E, \mathbf{d}_E) = \mathbf{K}_1(\mathbf{d}_E) + \mathbf{K}_2(\mathbf{u}_E, \mathbf{d}_E) \quad (32)$$

donde el vector \mathbf{d}_E se obtiene de

$$\mathbf{K}_E \mathbf{d}_E = -\mathbf{p} \quad (33)$$

siendo \mathbf{K}_E la matriz de rigidez tangente imperfecta ec.(27) en la configuración E definida por los desplazamientos \mathbf{v}_E

$$\mathbf{K}_E = \mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_1(\mathbf{v}_E - \epsilon \mathbf{w}) + \frac{1}{2} \mathbf{K}_2(\mathbf{v}_E - \epsilon \mathbf{w}, \mathbf{v}_E - \epsilon \mathbf{w}) \quad (34)$$

Notemos que para la configuración indeformada $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ la matriz de rigidez geométrica inicial $\mathbf{K}_G(\mathbf{0}, \mathbf{d}_0)$ es

$$\mathbf{K}_G(\mathbf{0}, \mathbf{d}_0) = \mathbf{K}_1(\mathbf{d}_0) \quad (35)$$

Se puede demostrar que en un punto E sobre la trayectoria de equilibrio el vector tangente vale

$$\boldsymbol{\rho}_E^{[1]} = \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_E + \mathbf{v}_E^{[1,1]} \epsilon \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (36)$$

donde $\mathbf{v}_E^{[1,1]}$ se obtienen de resolver

$$\mathbf{K}_E \mathbf{v}_E^{[1,1]} = -\mathbf{K}_G(\mathbf{u}_E, \mathbf{d}_E) \mathbf{w} \quad (37)$$

Notemos que todas las matrices y vectores necesarios \mathbf{r} , \mathbf{f} , \mathbf{K} , \mathbf{K}_G , para obtener la respuesta numérica de la estructura imperfecta se pueden obtener con las mismas matrices \mathbf{K}_0 , \mathbf{K}_1 , \mathbf{K}_2 utilizadas para la estructura perfecta.

5. PARTICULARIZACIÓN A UN ELEMENTO DE VIGA IMPERFECTO

Consideremos un elemento finito de viga con los desplazamientos nodales mostrados en la figura (4).

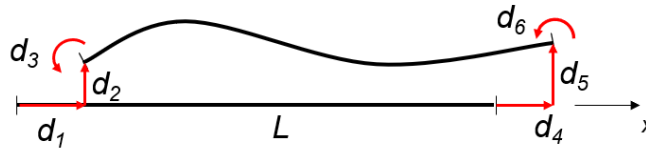


Figura 4: Desplazamientos nodales.

Adoptando funciones de forma lineales para los desplazamientos axiales $u(x)$ y cúbicas para los desplazamientos transversales $v(x)$ es posible aproximar la energía de deformación considerando rotaciones moderadas (Jougard y Perez, 2014; Jougard, 1993) como

$$U = \int_0^L \frac{EA}{2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{EA}{2} \frac{du}{dx} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + \frac{EA}{8} \left(\frac{dv}{dx} \right)^4 + \frac{EI}{2} \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 dx \quad (38)$$

Resultando para este elemento particular las siguientes matrices

$$\mathbf{K}_0 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & -c_1 & 0 & 0 \\ & c_5 & c_4 & 0 & -c_5 & c_4 \\ & & c_3 & 0 & -c_4 & c_2 \\ & & & c_1 & 0 & 0 \\ & & & & c_5 & -c_4 \\ & & & & & c_3 \end{bmatrix} \quad (39)$$

con

$$c_1 = \frac{EA}{L} \quad c_2 = \frac{2EI}{L} \quad c_3 = \frac{4EI}{L} \quad c_4 = \frac{6EI}{L^2} \quad c_5 = \frac{12EI}{L^3} \quad (40)$$

La matriz $\mathbf{K}_1(\mathbf{u})$ es

$$\mathbf{K}_1(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 0 & c_{12} & c_{11} & 0 & -c_{12} & c_{10} \\ & c_9 & c_8 & -c_{12} & -c_9 & c_8 \\ & & c_7 & -c_{11} & -c_8 & c_6 \\ & & & 0 & c_{12} & -c_{10} \\ & & & & c_9 & -c_8 \\ & & & & & c_7 \end{bmatrix} \quad (41)$$

con

$$\begin{aligned} c_6 &= 1/30 EA(u_1 - u_4) & c_7 &= 2/15 EA(u_4 - u_1) & c_8 &= 1/10 EA/L(u_4 - u_1) \\ c_9 &= 6/5 EA/L^2(u_4 - u_1) & c_{10} &= 1/30 EA/L [3(u_5 - u_2) + L(u_3 - 4u_6)] \\ c_{11} &= 1/30 EA/L [3(u_5 - u_2) + L(u_6 - 4u_3)] \\ c_{12} &= 1/30 EA/L [12(u_5 - u_2) - L(u_3 + u_6)] \end{aligned} \quad (42)$$

Finalmente la matriz $\mathbf{K}_2(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ es

$$\mathbf{K}_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & c_{13} & c_{14} & 0 & -c_{13} & c_{15} \\ & & c_{16} & 0 & -c_{14} & c_{18} \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & c_{13} & -c_{15} \\ & & & & & c_{17} \end{bmatrix} \quad (43)$$

donde

$$\begin{aligned} c_{13} &= 9/35 EA/L^3 [24(u_2 - u_5)(v_2 - v_5) + 3L(u_2 - u_5)(v_3 + v_6) + 3L(v_2 - v_5)(u_3 + u_6) \\ &\quad + L^2(u_3v_3 + u_6v_6)] \\ c_{14} &= 3/140 EA/L^2 [36(u_2 - u_5)(v_2 - v_5) + 12L(u_2 - u_5)v_3 + 12L(v_2 - v_5)u_3 \\ &\quad + L^2(u_6 - u_3)v_3 + L^2(u_3 + u_6)v_6] \\ c_{15} &= 3/140 EA/L^2 [36(u_2 - u_5)(v_2 - v_5) + 12L(u_2 - u_5)v_6 + 12L(v_2 - v_5)u_6 \\ &\quad + L^2(u_3 - u_6)v_6 + L^2(u_3 + u_6)v_3] \\ c_{16} &= 1/140 EA/L [36(u_2 - u_5)(v_2 - v_5) + 3L(u_2 - u_5)(v_6 - v_3) + 3L(v_2 - v_5)(u_6 - u_3) \\ &\quad + L^2(24u_3v_3 - 3u_3v_6 - 3u_6v_3 + 2u_6v_6)] \\ c_{17} &= 1/140 EA/L [36(u_2 - u_5)(v_2 - v_5) - 3L(u_2 - u_5)(v_6 - v_3) - 3L(v_2 - v_5)(u_6 - u_3) \\ &\quad + L^2(24u_6v_6 - 3u_3v_6 - 3u_6v_3 + 2u_3v_3)] \\ c_{18} &= 1/140 EA/L [3(u_2 - u_5)(v_6 + v_3) + 3(v_2 - v_5)(u_6 + u_3) - 3L(u_3v_3 + u_6v_6) \\ &\quad + 2L(u_3v_6 + u_6v_3)] \end{aligned} \quad (44)$$

6. CONCLUSIONES

Se han presentado las matrices y vectores necesarios para hacer el trazado de los caminos de equilibrio de una estructura imperfecta, particularizando las matrices para un elemento de viga. Entre las ventajas de la formulación presentada podemos citar:

1. No es necesario aplicar ninguna teoría especial para calcular aproximadamente las deformaciones de la estructura imperfecta. Notemos que una viga imperfecta presenta una geometría curva y en rigor debería tratarse su deformación mediante alguna teoría de vigas curvas. Sólo es necesario conocer la energía de deformación de la estructura perfecta y sustituir desplazamientos.
2. La formulación presentada se puede aplicar a cualquier componente estructural imperfecto si se conoce la expresión de la energía de deformación para la estructura perfecta.

Como propuestas de mejora podemos citar

1. Usar otra formulación de viga que lleve en cuenta grandes desplazamientos y rotaciones, como la formulación corrotacional (Battini y Pacoste, 2002), para ampliar el espectro de uso del elemento.
2. Utilizar otros parámetros de trazado, como la longitud de arco para garantizar convergencia en el pasaje de los puntos límites (Jougard, 1993).

APÉNDICE: REGLAS DE DERIVACIÓN INDICIAL

Se puede demostrar (Jougard, 1993) que las derivadas de las siguientes formas simétricas son:

$$\frac{\partial U_{ij}u_iu_j}{\partial u_i} = 2U_{ij}u_j \quad (45a)$$

$$\frac{\partial U_{ijk}u_iu_ju_k}{\partial u_i} = 3U_{ijk}u_ju_k \quad (45b)$$

$$\frac{\partial U_{ijkl}u_iu_ju_ku_l}{\partial u_i} = 4U_{ijkl}u_ju_ku_l \quad (45c)$$

REFERENCIAS

- Battini J.M. y Pacoste C. Co-rotational beam elements with warping effects in instability problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(17-18):1755–1789, 2002.
- Godoy L.A. *Thin-Walled Structures with Structural Imperfections*. Elsevier, 1996.
- Jougard C.E. *Análise Nao-linear Incremental Assintótica da Estabilidade de Estruturas Elásticas*. Tesis de Maestría, COPPE, Universidade Federal do Río de Janeiro, Río de Janeiro, Brazil, 1993.
- Jougard C.E. y Perez A.L. Un Elemento Finito para Análisis No Lineal de Vigas Imperfectas. En *23 Jornadas Argentinas de Ingeniería Estructural*. Buenos Aires, Argentina, 2014.
- Thompson J.M.T. y Hunt G.W. *A General Theory of Elastic Stability*. J. Wiley, 1973.
- Timoshenko S. y Gere J.M. *Theory of Elastic Stability (2ed.)*. McGraw-Hill, 2 ed. edición, 1961.
- Toledo J.A. *Metodología para el Análisis No Lineal Geométrico de Estructuras de Barras con Imperfecciones*. Tesis de Maestría, Universidad Tecnológica Nacional. Facultad Regional General Pacheco, Buenos Aires, Argentina, 2021.
- Ziemian R.D. *Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures*. John Wiley & Sons, 6 ed. edición, 2010.