

VIBRACIONES NATURALES DE UNA CANTIDAD ARBITRARIA DE VIGAS EN CONFIGURACIÓN DE POLÍGONO CERRADA.

Javier L. Raffo^a, Tomás A. Ribes^b

^aGrupo de Mecánica Computacional, Facultad Regional Delta, Universidad Tecnológica Nacional, San Martín 1171, 2804 Campana, Argentina, jraffo@frd.utn.edu.ar, <http://www.frd.utn.edu.ar/grupo-de-mecanica-computacional>

^b Grupo de Mecánica Computacional, Facultad Regional Delta, Universidad Tecnológica Nacional, San Martín 1171, 2804 Campana, Argentina, tribes@frd.utn.edu.ar, <http://www.frd.utn.edu.ar/grupo-de-mecanica-computacional>

Palabras Clave: Vibraciones de vigas, restricciones elásticas, formas modales, cálculo de variaciones, rótulas, pórtico.

Resumen. El uso del cálculo de variaciones en aplicaciones de ingeniería permitió obtener el problema de contorno y ecuaciones diferenciales de numerosos problemas de estructuras encontrados en la industria. En este trabajo se presenta el estudio de un sistema de una cantidad arbitraria de vigas en configuración cerrada formando una geometría de polígono inscrito y se obtiene el correspondiente problema de contorno, ecuaciones diferenciales, algoritmo de cálculo de solución analítica y resultados numéricos. Se presentan resultados de diferentes configuraciones y condiciones de borde para esquemas cerrados de vigas. Se analizan las vibraciones libres y resultados del problema estático ante cargas internas. Se utiliza solución analítica para obtener resultados numéricos del coeficiente de frecuencia y presentar las correspondientes formas modales.

Keywords: Vibration of beams, elastic restrictions, modal shapes, calculus of variations, hinges, frame.

Abstract. The application of calculus of variations in engineering allowed to obtain the boundary conditions and differential equations of numerous structural problems found in industry. This work presents the study of a frame system with an arbitrary number of beams in a closed configuration forming an inscribed polygon geometry. The corresponding boundary conditions, differential equations, analytical solution and the algorithm to obtain numerical results are presented. New results for different configurations and boundary conditions for closed beam frames are obtained. Free vibrations of the static problem under internal loads are analyzed. Analytical solution is used to obtain numerical results of the frequency parameter with their corresponding modal shape.

1 INTRODUCCIÓN

Gran esfuerzo se ha realizado en el estudio del comportamiento estático y dinámico de componentes estructurales con complejidades geométricas. Sin la intención de realizar una revisión de la bibliografía a continuación se presentan algunos ejemplos. Oguamanam y otros (1998) modelaron un pórtico de dos tramos abierto usando la teoría de vigas Euler-Bernoulli considerando un ángulo generalizado entre tramos y una masa en el extremo del segundo tramo. Heppler y otros (2003) examinaron la dinámica de un pórtico abierto de dos tramos con movimiento dentro y fuera del plano usando la teoría de vigas de Euler-Bernoulli. El estudio de las vibraciones libres de pórticos con restricciones elásticas no ha sido tan extensamente tratado. Albarracín y Grossi (2005) determinaron las frecuencias naturales de un pórtico formado por una viga y una columna con restricciones elásticas considerando desplazamiento transversal y axial según la teoría de vigas de Euler-Bernoulli. Grossi y Albarracín (2013) trataron el problema de vibraciones libres de pórticos de tres tramos inclinados con restricciones elásticas en extremos y puntos de unión entre tramos desarrollando el cálculo de variaciones para obtener las ecuaciones de contorno. Raffo y Grossi (2012) realizaron un estudio de sensibilidad sobre las primeras frecuencias naturales que consiste en la influencia de la posición y valor de una restricción elástica intermedia en vigas con rótulas intermedias. Albarracín (2006) en su tesis doctoral presentó el análisis de pórticos constituidos por tres elementos de viga, con restricciones elásticas en los extremos y en puntos intermedios, correspondientes a las uniones de los componentes, obteniendo por medio del principio de Hamilton la respectiva ecuación diferencial y las condiciones de contorno. Raffo y Ovejero (2016) presentaron un estudio de las vibraciones libres de vigas uniformes con extremos elásticamente restringidos obteniendo la rigidez mínima de las restricciones elásticas internas que aumentan las frecuencias naturales hasta su límite superior.

En este trabajo se analiza el problema de estático con carga interna distribuida y de las vibraciones libres en un pórtico compuesto con una cantidad arbitraria de vigas de igual longitud conectadas por rótulas y restricciones elásticas. Las diferentes vigas están caracterizadas por poseer las mismas propiedades mecánicas tal como sección y material. Estas se encuentran dentro de una configuración cerrada inscrita en un círculo. Poseen restricciones elásticas transversales y rotacionales en cada extremo y presentan restricciones elásticas rotacionales y transversales en cada una de las uniones entre vigas. Para el problema estático las diferentes vigas están sujetas a fuerzas transversales a cada una, distribuidas homogéneamente, de igual magnitud.

Se presentan resultados nuevos que consisten en frecuencias naturales y formas modales de vibración como solución del problema dinámico, siendo novedosa la configuración poco usual del pórtico cerrado.

2 FORMULACIÓN VARIACIONAL Y OBTENCIÓN DEL PROBLEMA DE CONTORNO ESTÁTICO

Sea un pórtico conformado por n vigas de igual longitud en una configuración cerrada, inscritas en una circunferencia. Cada viga tiene en ambos extremos resortes traslacionales y rotacionales conectados a un punto fijo. Los resortes traslacionales actúan perpendiculares al eje de la viga. En la unión entre tramos de cada viga existen resortes rotacionales, conectados a ambos extremos de cada viga. En la Figura 1 se presenta el caso para $n=3$. A su vez, las vigas tienen una carga distribuida interna de valor constante con el objetivo de representar una carga de presión interna en caso de una tubería con rigidizadores, que sería el caso cuando n crece.

En la Figura 1 se observa el sistema en estudio donde los vínculos rotacionales se caracterizan con los coeficientes de rigidez $r_1, r_{11}, r_{12}, r_2, r_{21}, r_{22}, r_3, r_{31}$ y r_{32} , y los resortes traslacionales mediante $t_1, t_{11}, t_{12}, t_2, t_{21}, t_{22}, t_3, t_{31}$ y t_{32} . Por otra parte, los desplazamientos transversales de cada viga son descriptos por las funciones $w_i = w_i(x_i)$, $i = 1, 2, 3$.

Al ser el desarrollo teórico propuesto para un número arbitrario de vigas, se definen los largos y los ángulos α en función de dicho número n , siendo $n \geq 3$, queda definido

$$\alpha = \left(\frac{180^\circ}{n} \right).$$

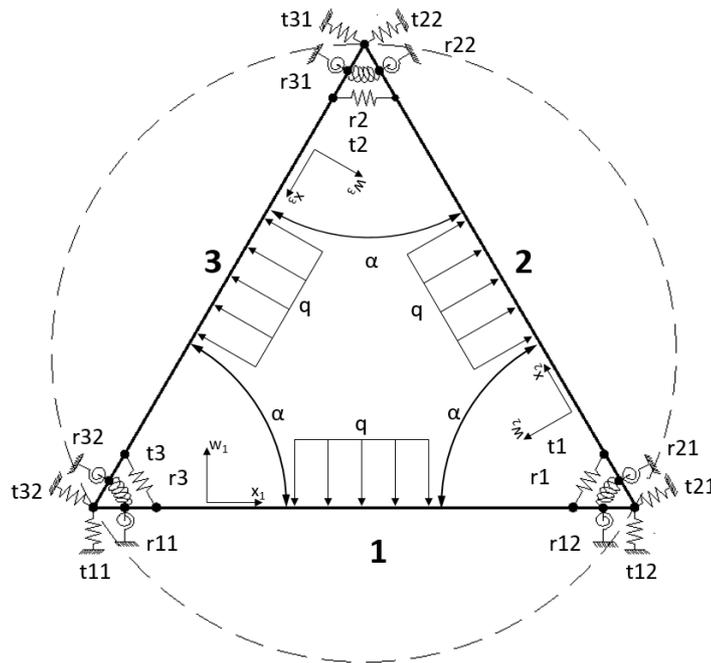


Figura 1: Pórtico cerrado analizado, restringido elásticamente.

El funcional para el sistema estático de la Figura 1 queda definido por:

$$\begin{aligned}
 I(w) = & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_0^l \left(EI \left(\frac{\partial^2 w_i(x)}{\partial x_i^2} \right)^2 + 2q(x_i)w_i(x_i) \right) dx_i + \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(t_{i1}w_i^2(0) + t_{i2}w_i^2(l) + r_{i1} \left(\frac{\partial w_i(0)}{\partial x_i} \right)^2 + r_{i2} \left(\frac{\partial w_i(l)}{\partial x_i} \right)^2 \right) \\
 & + r_i \left(\frac{\partial w_{i+1}(0)}{\partial x_{i+1}} - \frac{\partial w_i(l)}{\partial x_i} \right)^2 + t_i \cos \left(\frac{\alpha}{2} \right)^2 \left(w_i(l) + w_{i+1}(0) \right)^2
 \end{aligned} \tag{1}$$

donde EI es la rigidez de las vigas.

Aplicando las técnicas del Cálculo de variaciones (Grossi, 2010), la variación de I en w y en la dirección v está dada por

$$\partial I(w; v) = \frac{d}{d\varepsilon} I(w + \varepsilon v) \Big|_{\varepsilon=0} \tag{2}$$

Al resolver obtenemos la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
 \partial I(w; v) = & \sum_{i=1}^n \left[\int_0^l \left(EI \frac{\partial^4 w_i(x_i)}{\partial x_i^4} + q(x_i) \right) v_i(x_i) dx_i \right. \\
 & + \left(t_{i1}w_i(0) + EI \frac{\partial^3 w_i(0)}{\partial x_i^3} + t_{i-1} \cos \left(\frac{\alpha}{2} \right)^2 w_{i-1}(l) + t_{i-1} \cos \left(\frac{\alpha}{2} \right)^2 w_i(0) \right) v_i(0) \\
 & + \left(t_{i2}w_i(l) - EI \frac{\partial^3 w_i(l)}{\partial x_i^3} + t_i \cos \left(\frac{\alpha}{2} \right)^2 w_i(l) + t_i \cos \left(\frac{\alpha}{2} \right)^2 w_{i+1}(0) \right) v_i(l) \\
 & + \left(r_{i1} \frac{\partial w_i(0)}{\partial x_i} - EI \frac{\partial^2 w_i(0)}{\partial x_i^2} + r_{i-1} \frac{\partial w_i(0)}{\partial x_i} - r_{i-1} \frac{\partial w_{i-1}(l)}{\partial x_{i-1}} \right) \frac{\partial v_i(0)}{\partial x_i} + \\
 & \left. \left(r_{i2} \frac{\partial w_i(l)}{\partial x_i} + EI \frac{\partial^2 w_i(l)}{\partial x_i^2} - r_i \frac{\partial w_{i+1}(0)}{\partial x_{i+1}} + r_i \frac{\partial w_i(l)}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_i(l)}{\partial x_i} \right]
 \end{aligned} \tag{3}$$

De la ecuación (3) se obtiene la ecuación diferencial y las condiciones de contorno naturales del sistema para cada viga.

$$EI \frac{\partial^4 w_i(x_i)}{\partial x_i^4} + q(x_i) = 0 \quad (4)$$

$$t_{i1} w_i(0) + EI \frac{\partial^3 w_i(0)}{\partial x_i^3} + t_{i-1} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 w_{i-1}(l) + t_{i-1} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 w_i(0) = 0 \quad (5)$$

$$t_{i2} w_i(l) - EI \frac{\partial^3 w_i(l)}{\partial x_i^3} + t_i \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 w_i(l) + t_i \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 w_{i+1}(0) = 0 \quad (6)$$

$$r_{i1} \frac{\partial w_i(0)}{\partial x_i} - EI \frac{\partial^2 w_i(0)}{\partial x_i^2} + r_{i-1} \frac{\partial w_i(0)}{\partial x_i} - r_{i-1} \frac{\partial w_{i-1}(l)}{\partial x_{i-1}} = 0 \quad (7)$$

$$r_{i2} \frac{\partial w_i(l)}{\partial x_i} + EI \frac{\partial^2 w_i(l)}{\partial x_i^2} - r_i \frac{\partial w_{i+1}(0)}{\partial x_{i+1}} + r_i \frac{\partial w_i(l)}{\partial x_i} = 0 \quad (8)$$

Multiplicando por una función auxiliar e integrando en el dominio a la ecuación diferencial (4) se obtiene

$$\sum_{i=1}^n \int_0^l EI \frac{\partial^4 w_i(x_i)}{\partial x_i^4} v_i(x_i) dx_i = \int_0^l q(x_i) v_i(x_i) dx_i \quad (9)$$

Si se realiza el cambio de variables

$$\bar{x} = \frac{x}{L} \quad (10)$$

Y se aplica el método variacional de Ritz, teniendo en cuenta las condiciones de contorno (5) a (8) se obtiene

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \left[\int_0^1 \frac{d^2 w_i(\bar{x}_i)}{d\bar{x}_i^2} \frac{d^2 v_i(\bar{x}_i)}{d\bar{x}_i^2} d\bar{x}_i + \right. \\ & + \frac{L^3}{EI} \left(t_{i1} w_i(0) + t_{i-1} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 w_{i-1}(l) + t_{i-1} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 w_i(0) \right) v_i(0) \\ & + \frac{L^3}{EI} \left(t_{i2} w_i(l) + t_i \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 w_i(l) + t_i \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 w_{i+1}(0) \right) v_i(l) \\ & + \frac{L}{EI} \left(r_{i1} \frac{dw_i(0)}{d\bar{x}_i} + r_{i-1} \frac{dw_i(0)}{d\bar{x}_i} - r_{i-1} \frac{dw_{i-1}(l)}{d\bar{x}_{i-1}} \right) \frac{dv_i(0)}{d\bar{x}_i} \\ & \left. + \frac{L}{EI} \left(r_{i2} \frac{dw_i(l)}{d\bar{x}_i} - r_i \frac{dw_{i+1}(0)}{d\bar{x}_{i+1}} + r_i \frac{dw_i(l)}{d\bar{x}_i} \right) \frac{dv_i(l)}{d\bar{x}_i} \right] \\ & = \sum_{i=1}^n \frac{L^4}{EI} \int_0^1 -q(\bar{x}_i) v_i(\bar{x}_i) d\bar{x}_i \end{aligned} \quad (11)$$

Si en la ecuación (11) reemplazamos con los términos

$$T_{ij} = \frac{L^3 t_{ij}}{EI} \quad (12)$$

$$T_i = \frac{L^3 t_i \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}{EI} \quad (13)$$

$$R_i = \frac{L r_i}{EI} \quad (14)$$

$$R_{ij} = \frac{L r_{ij}}{EI} \quad (15)$$

$$Q(\bar{x}_i) = \frac{L^4 q(\bar{x}_i)}{EI} \quad (16)$$

$i=1, \dots, n, j=1, 2$. El sistema se resume a resolver

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \left[\int_0^1 \frac{d^2 w_i(\bar{x}_i)}{d\bar{x}_i^2} \frac{d^2 v_i(\bar{x}_i)}{d\bar{x}_i^2} d\bar{x}_i + \right. \\ & + (T_{i1} w_i(0) + T_{i-1} w_{i-1}(l) + T_{i-1} w_i(0)) v_i(0) \\ & + (T_{i2} w_i(l) + T_i w_i(l) + T_i w_{i+1}(0)) v_i(l) \\ & + \left(R_{i1} \frac{dw_i(0)}{d\bar{x}_i} + R_{i-1} \frac{dw_i(0)}{d\bar{x}_i} - R_{i-1} \frac{dw_{i-1}(l)}{d\bar{x}_{i-1}} \right) \frac{dv_i(0)}{d\bar{x}_i} \\ & \left. + \left(R_{i2} \frac{dw_i(l)}{d\bar{x}_i} - R_i \frac{dw_{i+1}(0)}{d\bar{x}_{i+1}} + R_i \frac{dw_i(l)}{d\bar{x}_i} \right) \frac{dv_i(l)}{d\bar{x}_i} \right] \end{aligned} \quad (17)$$

$$= \sum_{i=1}^n \int_0^1 -Q(\bar{x}_i) v_i(\bar{x}_i) d\bar{x}_i$$

Si se proponen como funciones de prueba polinomios simples se obtienen los resultados numéricos presentados mas adelante.

3 FORMULACIÓN VARIACIONAL Y OBTENCIÓN DEL PROBLEMA DE CONTORNO PARA EL PROBLEMA DE VIBRACIONES

Si se anula la carga distribuida y se agrega la energía cinética en un instante t, la misma es

$$T(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 \rho A \left(\frac{dw_i(x_i,t)}{dt} \right)^2, \tag{18}$$

donde A es la sección transversal y ρ la densidad lineal.

El funcional queda definido por:

$$I(w) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^{t_1} \left[\int_0^l \left(-\rho A \left(\frac{dw_i(x_i,t)}{dt} \right)^2 + EI \left(\frac{\partial^2 w_i(x)}{\partial x_i^2} \right)^2 \right) dx_i + \left(ti1w_i^2(0) + ti2w_i^2(l) + ri1 \left(\frac{\partial w_i(0)}{\partial x_i} \right)^2 + ri2 \left(\frac{\partial w_i(l)}{\partial x_i} \right)^2 + r_i \left(\frac{\partial w_{i+1}(0)}{\partial x_{i+1}} - \frac{\partial w_i(l)}{\partial x_i} \right)^2 + t_i \cos \left(\frac{\alpha}{2} \right)^2 (w_i(l) + w_{i+1}(0))^2 \right] dt \tag{19}$$

Si se realiza el mismo tratamiento que en el caso estático, se obtiene

$$\begin{aligned} \partial I(w; v) &= \frac{d}{d\varepsilon} I(w + \varepsilon v) \Big|_{\varepsilon=0} \\ I(w; v) &= \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^{t_1} \left(\int_0^l \left(EI \frac{\partial^4 w_i(x_i)}{\partial x_i^4} + \rho A r \frac{\partial^2 w_i(x_i,t)}{\partial t^2} \right) v_i(x_i,t) dx_i + \left(ti1w_i(0,t) + EI \frac{\partial^3 w_i(0,t)}{\partial x_i^3} + t_{i-1} \cos \left(\frac{\alpha}{2} \right)^2 w_{i-1}(l,t) + t_{i-1} \cos \left(\frac{\alpha}{2} \right)^2 w_i(0,t) \right) v_i(0,t) + \left(ti2w_i(l,t) - EI \frac{\partial^3 w_i(l,t)}{\partial x_i^3} + t_i \cos \left(\frac{\alpha}{2} \right)^2 w_i(l,t) + t_i \cos \left(\frac{\alpha}{2} \right)^2 w_{i+1}(0,t) \right) v_i(l,t) + \left(ri1 \frac{\partial w_i(0,t)}{\partial x_i} - EI \frac{\partial^2 w_i(0,t)}{\partial x_i^2} + r_{i-1} \frac{\partial w_i(0,t)}{\partial x_i} - r_{i-1} \frac{\partial w_{i-1}(l,t)}{\partial x_{i-1}} \right) \frac{\partial v_i(0,t)}{\partial x_i} + \left(ri2 \frac{\partial w_i(l,t)}{\partial x_i} + EI \frac{\partial^2 w_i(l,t)}{\partial x_i^2} - r_i \frac{\partial w_{i+1}(0,t)}{\partial x_{i+1}} + r_i \frac{\partial w_i(l,t)}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_i(l,t)}{\partial x_i} \right) dt \end{aligned} \tag{20}$$

De la ecuación anterior obtenemos la siguiente ecuación diferencial,

$$EI \frac{\partial^4 w_i(x_i)}{\partial x_i^4} = -\rho A r \frac{\partial^2 w_i(x_i,t)}{\partial t^2} \tag{21}$$

Con condiciones de contorno similares a las del caso estático pero incluyendo la variable temporal.

Si se aplica el cambio de variable de la ecuación (10), se introduce (12) a (15), se propone la siguiente solución

$$w_{ni}(\bar{x}_i, t) = W_{ni}(\bar{x}_i) sen(\omega t) \tag{22}$$

y se reemplaza en el problema de contorno, se obtiene

$$\frac{d^4 W_{ni}}{d\bar{x}_i^4} (\bar{x}_i) = \frac{\rho A r L^4}{EI} \omega_n^2 W_{ni}(\bar{x}_i) \tag{23}$$

$$\frac{d^3 W_{ni}(0)}{d\bar{x}_i^3} + Ti1W_{ni}(0) + T_{i-1}W_{ni-1}(1) + T_{i-1}W_{ni}(0) = 0 \tag{24}$$

$$- \frac{d^3 W_{ni}(1)}{d\bar{x}_i^3} + Ti2W_{ni}(1) + T_i W_{ni}(1) + T_i W_{ni+1}(0) = 0 \tag{25}$$

$$- \frac{d^2 W_{ni}(0)}{d\bar{x}_i^2} + Ri1 \frac{dW_{ni}(0)}{d\bar{x}_i} + R_{i-1} \frac{dW_{ni}(0)}{d\bar{x}_i} - R_{i-1} \frac{dW_{ni-1}(1)}{d\bar{x}_{i-1}} = 0 \tag{26}$$

$$\frac{d^2 W_{ni}(1)}{d\bar{x}_i^2} + Ri2 \frac{dW_{ni}(1)}{d\bar{x}_i} - R_i \frac{dW_{ni+1}(0)}{d\bar{x}_{i+1}} + R_i \frac{dW_{ni}(1)}{d\bar{x}_i} = 0 \tag{27}$$

En la ecuación (25) agruparemos los términos constantes y ω_n^2 ,

$$A^4 = \frac{L^4 \rho A r \omega_n^2}{EI} \tag{28}$$

quedando

$$\frac{d^4 W_{ni}}{dx^4}(\bar{x}_i) = A^4 W_{ni}(\bar{x}_i) \tag{29}$$

Al introducir el método de Ritz al problema, se obtiene el sistema a resolver

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \left[\int_0^1 \frac{d^2 W_n(\bar{x})}{d\bar{x}^2} \frac{d^2 v(\bar{x})}{d\bar{x}^2} d\bar{x}_i + \right. \\ & + (Ti1W_{ni}(0) + T_{i-1}W_{ni-1}(1) + T_{i-1}W_{ni}(0))v_i(0) \\ & + (Ti2W_{ni}(1) + T_iW_{ni}(1) + T_iW_{ni+1}(0))v_i(1) \\ & + \left(Ri1 \frac{dW_{ni}(0)}{d\bar{x}_i} + R_{i-1} \frac{dW_{ni}(0)}{d\bar{x}_i} - R_{i-1} \frac{dW_{ni-1}(1)}{d\bar{x}_{i-1}} \right) \frac{dv_i(0)}{d\bar{x}_i} \\ & + \left. \left(Ri2 \frac{dW_{ni}(1)}{d\bar{x}_i} - R_i \frac{dW_{ni+1}(0)}{d\bar{x}_{i+1}} + R_i \frac{dW_{ni}(1)}{d\bar{x}_i} \right) \frac{dv_i(1)}{d\bar{x}_i} \right] \\ & = \sum_{i=1}^n \int_0^1 A^4 W_{ni}(\bar{x}_i)(\bar{x}_i) d\bar{x}_i \end{aligned} \tag{30}$$

4 RESULTADOS NUMÉRICOS

Para validar los resultados obtenidos con el código desarrollado se obtuvieron las frecuencias naturales y los modos normales de vibración para condiciones donde las vigas que componen el pórtico actúan como vigas individuales con condiciones de restricción en sus extremos clásicas. Estas condiciones se compararán con datos extraídos de [Blevins \(1979\)](#).

Para establecer las distintas condiciones de apoyo clásicas en los extremos del pórtico y de las vigas se adopta la notación donde E denota que el extremo está empotrado, A denota que el extremo está articulado. En este caso al ser una configuración cerrada se tomarán condiciones simétricas A-A y E-E. Adicionalmente se muestran diferentes condiciones asimétricas denominadas C1 y C2 que se describen en la [Tabla 1](#), donde además se presentan los valores de las distintas restricciones elásticas para representar las condiciones de borde descriptas.

	R1	R11	R12	T1	T11	T12	R2	R21	R22	T2	T21	T22	R3	R31	R32	T3	T31	T32
A-A	0	0	0	∞	∞	∞	0	0	0	∞	∞	∞	0	0	0	∞	∞	∞
E-E	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
C1	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	0	0	∞	∞	∞	0	0	0	0	0	0
C2	0	0	0	∞	∞	∞	0	∞	∞	0	∞	∞	∞	0	∞	∞	0	∞

Tabla 1: Condiciones de borde analizadas.

C. B.	Ref.	Secuencia Modal			
		1	2	3	4
A-A	Blevins (1979)	3.14159265	6.28318531	9.42477796	12.56637061
	Presente	3.14159265	6.28324261	9.42593403	12.82870060
E-E	Blevins (1979)	4.73004074	7.85320462	10.9956079	14.1371655
	Presente	4.7300408	7.85449251	11.005695	14.895097

Tabla 2: Comparación de resultados de λ con los de [Blevins \(1979\)](#).

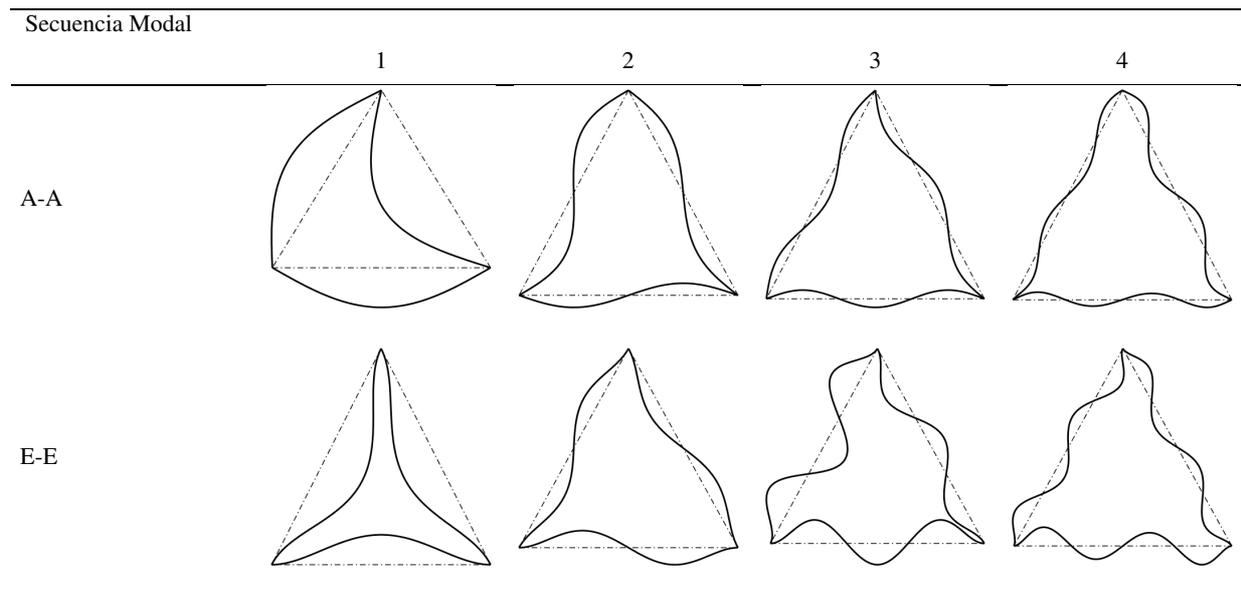


Tabla 3: Modo de vibración con restricciones clásicas

La [Tabla 2](#) muestra los valores de las primeras 4 frecuencias naturales de los casos A-A y E-E y la [Tabla 3](#) muestra sus correspondientes formas modales.

Secuencia Modal	1	2	3	4
C1	4.73004084	7.85449356	10.21657082	10.21809220
C2	1.87510406	2.36502036	4.69409171	4.73004023

Tabla 4 frecuencias naturales del pórtico con condiciones asimétricas indicadas en la [Tabla 1](#).

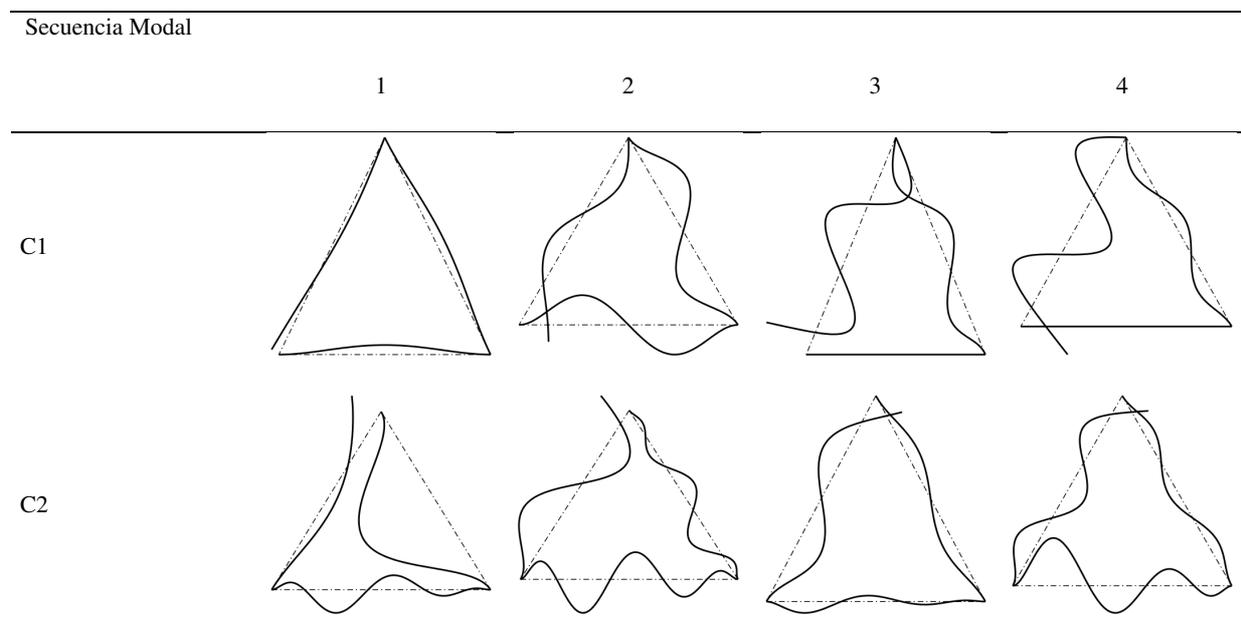


Tabla 5: Formas modales de las condiciones C1 y C2.

En la [Figura 2](#) se muestra la respuesta estática del sistema con las condiciones A-A antes mencionadas ante una carga distribuida de $Q = \frac{qL^4}{EI} = 100$.

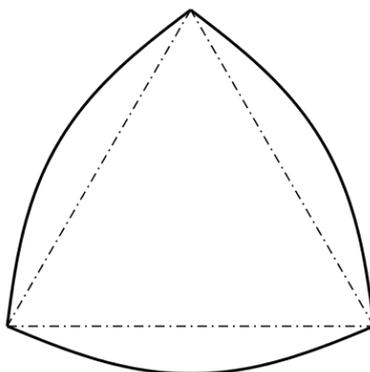


Figura 2: Pórtico cerrado con una carga distribuida homogénea $Q=100$ para el caso A-A.

5 CONCLUSIONES

Se obtuvo y resolvió el problema de contorno para el caso estático y de vibraciones de un sistema mecánico tipo pórtico compuesto por 3 vigas en configuración cerrada que forma un triángulo equilátero, cuyas vigas se encuentran vinculadas entre sí y en sus extremos a puntos fijos por restricciones elásticas traslacionales y rotacionales. Los desarrollos fueron realizados utilizando el cálculo de variaciones y métodos variacionales para obtener una solución analítica que luego utilizando polinomios simples aproximantes se desarrolló un algoritmo de cálculo para la obtención de resultados numéricos.

Se presentaron diferentes valores de frecuencias naturales y formas modales de vibración del sistema analizado donde además algunos casos fueron comparados con los obtenidos por otros autores, y de esta manera demostrar la excelente concordancia de los valores obtenidos con el modelo propuesto. Se presenta además resultados de la respuesta estática del sistema ante una carga distribuida interna.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue realizado en la Facultad Regional Delta de la Universidad Tecnológica Nacional, con el auspicio del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET PIP 242).

REFERENCIAS

- Albarracín, C. M., Dinámica de elementos estructurales: Soluciones clásicas y débiles. Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Salta. 2006.
- Albarracín, C. M. y Grossi, R. O., Vibrations of elastically restrained frames. *Journal of Sound and Vibration*, 285:467-476, 2005.
- Blevins, R. D., Formulas for Natural Frequency and Mode Shape. Van Nostrand Reinhold, 1979.
- Grossi, R. O., Cálculo de Variaciones. Teoría y Aplicaciones. CIMNE, 2010.
- Grossi, R. O. y Albarracín, C. M., Variational approach to vibrations of frames with inclined members, *Applied Acoustics*, 74:325-334, 2013.
- Heppler, G. R., Oguamanam, D. C. D. y Hansen, J. S., Vibration of a two-member open frame. *Journal of Sound and Vibration*, 263: 299-317, 2003.
- Oguamanam, D. C. D., Hansen, J. S. y Heppler, G. R., Vibration of arbitrary oriented two-member open frames with tip mass. *Journal of Sound and Vibration*, 209:651-669, 1998.
- Raffo, J. L. y Grossi, R. O., A study on mode shapes of beams with internal hinges and intermediate elastic restraints, *Mecánica Computacional*, 31:2593-2610, 2012.
- Raffo, J. L. y Ovejero, F., A Study on the Effect of Two Internal Translational Elastic Restraints on Mode Shapes of Beams. *Asociación Argentina de Mecánica Computacional*, 34:699-712, 2016.