

DINÁMICA DE VIGAS RECTAS Y CURVAS CON INCLUSIÓN DE RESONADORES PERIÓDICOS EMBEBIDOS CONSIDERANDO LA INCERTIDUMBRE PARAMÉTRICA

DYNAMICS OF STRAIGHT AND CURVED BEAMS WITH INCLUSION OF EMBEDDED PERIODIC RESONATORS CONSIDERING PARAMETRIC UNCERTAINTY

Walter Horacio Fruccio^a, Marcelo Tulio Piovan^b y Rogelio Hecker^a

^aFacultad de Ingeniería, Universidad Nacional de La Pampa. Calle 110 N°390, 6360, Gral Pico, Pcia La Pampa. Argentina, <http://www.ing.unlpam.edu.ar>

^bCentro de Investigaciones de Mecánica Teórica y Aplicada, Universidad Tecnológica Nacional FRBB. 11 de Abril 461, B8000LMI, Bahía Blanca, Pcia Buenos Aires. Argentina., <http://www.frbb.utn.edu.ar>

Palabras clave: Vigas Curvas, Meta-materiales, Resonadores, Bandgaps.

Resumen. Los meta-materiales representan un campo nuevo y emergente en la ingeniería de materiales, y se caracterizan por poseer propiedades excepcionales que no se encuentran comúnmente en materiales naturales. En particular, poseen un llamativo comportamiento vibratorio, es decir, regiones de frecuencia donde se puede observar una fuerte reducción en la propagación de ondas elásticas, conocidas como bandgaps. En este trabajo, se introduce un modelo de viga de paredes delgadas periódica, a partir de un modelo determinístico realizado mediante un elemento finito 1D. El modelo probabilístico se construye apelando al modelo computacional del enfoque determinista. Se plantean diferentes configuraciones de resonadores distribuidos a lo largo de la viga para ser evaluada la aparición de bandas de atenuación como resultado del cambio de configuraciones de los resonadores embebidos y de las propiedades elásticas/dinámicas de la estructura portante. Las funciones de densidad de probabilidad de las variables aleatorias se derivan con el Principio de Máxima Entropía y el modelo estocástico se genera mediante el método de Monte Carlo, con el cual se ejecutan simulaciones con realizaciones independientes.

Keywords: Meta-materials, Thin-walled Beam, Bandgap, Resonators.

Abstract. Metamaterials represent a new and emerging field in materials engineering, and are characterized by having exceptional properties not commonly found in natural materials. In particular, they have a striking vibrational behavior, that is, frequency regions where a strong reduction in the propagation of elastic waves can be observed, known as bandgaps. In this work, a periodic thin-walled beam model is introduced, based on a deterministic model made using a 1D finite element. The probabilistic model is built by appealing to the computational model of the deterministic approach. Different configurations of resonators distributed along the beam are proposed to evaluate the appearance of attenuation bands. The probability density functions of the random variables are derived with the Maximum Entropy Principle and the stochastic model is generated using the Monte Carlo method.

1. INTRODUCCIÓN

Los meta-materiales representan un campo nuevo y emergente en la ingeniería de materiales, ya que se caracterizan por poseer propiedades excepcionales que no se encuentran comúnmente en materiales naturales. Estas meta-estructuras poseen un distintivo comportamiento vibratorio, es decir, la existencia de regiones de frecuencia específicas en las cuales se produce una reducción o atenuación significativa de la propagación de las ondas, conocidas como bandgaps. (Tan y Huang, 2013; Sangiuliano, 2020). En particular, las meta-estructuras localmente resonantes, pueden ser estructuras finitas que explotan el fenómeno de resonancia local como mecanismo para la generación de bandgaps. Con lo cual, las meta-estructuras se pueden diseñar construyendo sub-unidades mecánicas en un material natural o ensamblando elementos resonantes nominalmente iguales, que están sintonizados en el rango de frecuencias deseados (Sangiuliano, 2020; Sugino, 2018). En particular, las vigas, sean posiblemente uno de los componentes más difundidos en la generalidad de las estructuras resistentes; especialmente, las vigas de pared delgada, por sus propiedades de rigidez y resistencia en relación con su peso.

El objetivo de este trabajo se centra en el análisis de la propagación de la incertidumbre asociada con la variabilidad en las propiedades y la periodicidad de la estructura, para vigas de paredes delgadas con resonadores locales embebidos, construidas con materiales de gradación funcional (functionally graded material: FGM) (Piovan, 2012, 2013). Para dicho análisis, se realizó un modelo computacional de elementos finitos 1D, para determinar el modelo determinístico de dichas estructuras periódicas. Luego, mediante un enfoque paramétrico probabilístico se crea el modelo estocástico, apelando al modelo computacional del enfoque determinista. Cuyas funciones de densidad de probabilidades (PDF) se deducen del principio de máxima entropía (Sampaio y Cataldo, 2010; Di Giorgio, 2021). El modelo estocástico se genera mediante el método de Monte Carlo, con el cual se ejecutan simulaciones con realizaciones independientes.

2. DESARROLLO

2.1. Descripción cinemática. Modelo determinístico

Se considera una viga finita de paredes delgadas con eje curvo, de sección transversal simétrica y con resonadores embebidos masa-resorte ubicados a lo largo de la longitud de la viga en el Plano XY y en el Plano XZ. En la Fig. 1 se describe el sistema de referencia primario $\{C : X, Y, Z\}$ el cual se encuentra ubicado en el centro geométrico de la sección transversal, donde el eje X es tangente al eje circular de la viga, mientras que los ejes $\{Y, Z\}$ se tomaran como los ejes principales de inercia y pertenecen a la sección transversal de la viga. Suponemos que la viga tiene un eje curvado, con un radio constante R, que está contenido en un plano π .

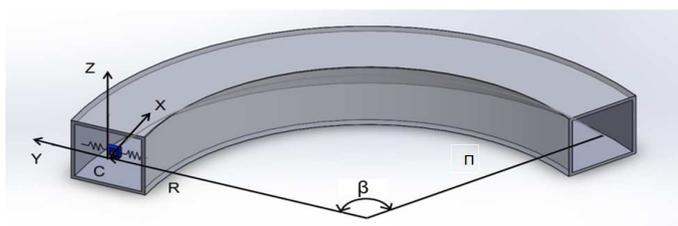


Figura 1: Viga curva de pared delgada con resonadores locales embebidos.

Las siguientes hipótesis se efectuaron con el propósito de desarrollar las ecuaciones de movimiento gobernantes de la meta-estructura portante y de la cinemática de la misma, con el

propósito de conseguir las ecuaciones constitutivas que rigen la dinámica de la meta-estructura. En consecuencia, se consideran las siguientes hipótesis:

A-La sección transversal de la viga curva tiene la configuración de paredes delgadas. La curvatura de la viga se ubica sobre el plano XY. B-La sección transversal es regular y rígida en su propio plano. C-El campo de desplazamientos tendrá los términos lineales de primer orden para su descripción. D-Se considera el esfuerzo cortante producido por flexión y torsión. Se define una función de alabeo referida al centroide.

Teniendo en cuenta las hipótesis antes descriptas, tendremos el siguiente campo de desplazamientos (Piovan y Cortínez, 2007).

$$\begin{Bmatrix} u_X \\ u_Y \\ u_Z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_x - \underline{\omega}\theta_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\Phi_3 & \Phi_2 \\ \Phi_3 & 0 & -\Phi_1 \\ -\Phi_2 & \Phi_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ y \\ z \end{Bmatrix}, \quad (1)$$

Donde

$$\Phi_1 = \phi_x \quad \Phi_2 = \theta_y \quad \Phi_3 = \theta_z - \frac{u_x}{R} \quad \Phi_w = \theta_x + \frac{\theta_y}{R} \quad (2)$$

Donde las variables cinemáticas involucradas son las siguientes: u_x, u_y, u_z serán los desplazamientos del punto de referencia desde el centro del sistema de coordenadas principal, θ_z y θ_y parámetros de rotación flexional con respecto a los ejes Z e Y, θ_x es el parámetro que indica la intensidad de alabeo y por último ϕ_x que es el parámetro de rotación torsional. La función de alabeo puede ser aproximada con la siguiente expresión (Piovan, 2012).

$$\underline{\omega} = \bar{\omega}F \quad \text{donde} \quad F = \frac{R}{R+y} \quad (3)$$

Siendo $\underline{\omega}$ la función de alabeo y $\bar{\omega}$ la función de alabeo deducida del problema de torsión pura de Saint Venant (Piovan, 2012). Y donde el factor F cuantifica el efecto de la curvatura a lo largo de la viga.

2.2. Ecuaciones constitutivas y campo de deformaciones

Conforme al campo de desplazamientos y a las variables cinemáticas, se define el vector desplazamiento, el vector deformación y el vector de esfuerzos internos (Piovan, 2012).

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}^T &= \{u_{xc}, u_{yc}, \theta_z, u_{zc}, \theta_y, \phi_x, \theta_x\} & \tilde{\mathbf{D}}^T &= \{\varepsilon_{D1}, \varepsilon_{D2}, \varepsilon_{D3}, \varepsilon_{D4}, \varepsilon_{D5}, \varepsilon_{D6}, \varepsilon_{D7}, \varepsilon_{D8}\} \\ \tilde{\mathbf{Q}}^T &= \{Q_x, M_y, M_z, B, Q_y, Q_z, T_w, T_{sv}\} \end{aligned} \quad (4)$$

Donde las componentes del vector deformación se definen de la siguiente manera: ε_{D1} deformación axial, ε_{D2} y ε_{D3} deformaciones por flexión, ε_{D4} deformación por alabeo no uniforme, ε_{D5} y ε_{D6} deformación por corte-flexión, ε_{D7} deformación por corte de alabeo y ε_{D8} deformación por corte de torsión pura. Por otra parte, el vector de esfuerzos internos queda determinado de la siguiente manera: Q_x es la componente axial de la fuerza en la dirección X, M_y es el momento flector en la dirección Y, M_z es el momento flector en la dirección Z, B es el Bimomento, Q_y es la fuerza cortante en la dirección Y, Q_z es la fuerza cortante en la dirección Z, T_w es el momento torsor por alabeo y T_{sv} es el momento por torsión pura. De esta manera, la expresión general de las ecuaciones constitutivas de los esfuerzos en función de las deformaciones generalizadas queda definido de la siguiente forma.

$$\tilde{\mathbf{Q}}^T = [J] \tilde{\mathbf{D}}^T \quad (5)$$

Donde J_E es la matriz constitutiva de los esfuerzos y los coeficientes J_{ik} , que forman parte de la matriz, se pueden encontrar desarrollados en el trabajo de Piovan (2012).

Se definen las componentes del vector deformación, en función de las variables cinemáticas involucradas para el caso de análisis.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{D1} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{u_y}{R}, \varepsilon_{D2} = \frac{\partial \theta_y}{\partial x} - \frac{\phi_x}{R}, \varepsilon_{D3} = \frac{\partial \theta_z}{\partial x} - \frac{1}{R} \frac{\partial u_x}{\partial x}, \varepsilon_{D4} = \frac{\partial \theta_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial \theta_y}{\partial x}, \\ \varepsilon_{D5} &= \frac{\partial u_{yc}}{\partial x} - \theta_z, \varepsilon_{D6} = \frac{\partial u_{zc}}{\partial x} + \theta_y, \varepsilon_{D7} = \frac{\partial \phi_x}{\partial x} - \theta_x, \varepsilon_{D8} = \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\theta_y}{R} \end{aligned} \quad (6)$$

De la misma manera, podemos realizar el planteo de la parte inercial, donde se obtiene la matriz de coeficientes de masa o inercia.

$$\tilde{\mu} = M_m \tilde{\mathbf{U}} \quad \tilde{\mathbf{U}}^T = \{ \ddot{u}_x, \ddot{u}_y, \ddot{\theta}_z, \ddot{u}_{zc}, \ddot{\theta}_y, \ddot{\phi}_x, \ddot{\theta}_x \} \quad (7)$$

Donde M_m es la matriz de coeficientes de inercia y los coeficientes I_{ik} , que forman parte de la matriz, se pueden encontrar desarrollados en el trabajo de Piovan (2012). También podemos observar, que en la Ec. (7), los puntos sobre las variables cinemáticas indican la derivación temporal del desplazamiento.

2.3. Discretización en elementos finitos. Principio de trabajo virtual

Para resolver problemas de estática y dinámica con varias condiciones de contorno, se efectúa el estudio paramétrico del problema planteado y se emplea un elemento finito unidimensional, en base a la formulación débil de las ecuaciones que rigen la estática y dinámica de la meta-estructura. Esta formulación se obtiene mediante el principio de trabajo virtual, a partir del siguiente indicador variacional.

$$\mathcal{W}_T = \int_L \left(\delta \tilde{\mathbf{D}}^T \tilde{\mathbf{Q}} \right) dx + \int_L \delta \tilde{\mathbf{U}}^T \mathbf{M}_m \ddot{\mathbf{U}} dx - \int_L \delta \tilde{\mathbf{U}}^T \tilde{\mathbf{P}}_X dx \quad (8)$$

Donde $\tilde{\mathbf{P}}_X$, es el vector de fuerzas externas. Luego, la formulación del elemento finito se obtiene mediante la discretización de la Ec. (8), donde se utilizan elementos de 5 nodos y funciones de forma cuárticas (Piovan y Cortínez, 2007). Lo que nos permite representar apropiadamente la mecánica de los movimientos en el plano y fuera del plano. El vector de las variables de desplazamiento se expresa de la siguiente manera.

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{U}}_e &= \{ \bar{U}_e^{(1)}, \bar{U}_e^{(2)}, \bar{U}_e^{(3)}, \bar{U}_e^{(4)}, \bar{U}_e^{(5)} \} \\ \bar{U}_e^{(j)} &= \{ u_{xcj}, u_{ycj}, \theta_{zj}, u_{zcyj}, \theta_{ycj}, \phi_{xcj}, \theta_{xcj} \} \quad j = 1, 2, 3, 4, 5 \end{aligned} \quad (9)$$

A partir de la formulación débil devenida del principio de trabajo virtual y aplicando los procedimientos variacionales convencionales (Piovan y Cortínez, 2007), se obtiene la siguiente ecuación de elementos finitos.

$$\begin{aligned} KU + C\dot{\mathbf{U}} + M\ddot{\mathbf{U}} &= F \\ C &= \eta_1 M + \eta_2 K \end{aligned} \quad (10)$$

donde K y M son las matrices globales de rigidez y masa, C es la matriz de amortiguamiento proporcional de Rayleigh, los coeficientes η_1 y η_2 en la Ec. (10) se pueden calcular empleando dos coeficientes de amortiguamiento dados (es decir, ξ_1 y ξ_2) para el primer y segundo modo (Bathe, 1996); mientras que U , \ddot{U} y F son los vectores globales de desplazamientos nodales, aceleraciones nodales y fuerzas nodales, respectivamente. Con lo cual el método de elementos finitos y la respuesta en el dominio de la frecuencia del sistema dinámico dada por la Ec. (10), deriva en la siguiente ecuación matricial correspondiente a la dinámica del modelo.

$$\hat{U} = [K - \omega^2 M + j\omega C]^{-1} \hat{F} \tag{11}$$

Donde \hat{U} y \hat{F} son la transformada de Fourier del vector de desplazamiento y el vector de fuerza, respectivamente; mientras ω es la frecuencia circular medida en [rad/seg].

Seguidamente, se incorpora la dinámica de los resonadores masa-resorte, dentro de las ecuaciones de equilibrio de la estructura portante, devenidas del principio de trabajo virtual presentado en la Ec. (8). Teniendo en cuenta que los resonadores se ubican a lo largo del eje Y y Z , se trabajó dentro de las ecuaciones donde tiene incidencia la variable cinemática u_y y u_z .

$$\begin{aligned} Q'_x - \frac{M'_z}{R} + \tilde{\mu}_1 &= \tilde{P}_{x1} \\ Q'_y + \frac{Q_x}{R} + \tilde{\mu}_2 &= \tilde{P}_{x2} + \sum_{j=1}^{N_Y} k_j^{(Y)} (\bar{u}_{yj} - u_{yj}) \delta(x - x_j) \\ M'_z - Q_y + \tilde{\mu}_3 &= \tilde{P}_{x3} \\ Q'_z + \tilde{\mu}_4 &= \tilde{P}_{x4} + \sum_{j=1}^{N_Z} k_j^{(Z)} (\bar{u}_{zj} - u_{zj}) \delta(x - x_j) \\ M'_y + \frac{B}{R} + Q_z + \frac{T_{sv}}{R} + \tilde{\mu}_5 &= \tilde{P}_{x5} \\ T'_{sv} + T'_w - \frac{M_y}{R} + \tilde{\mu}_6 &= \tilde{P}_{x6} \\ B' - T_w + \tilde{\mu}_7 &= \tilde{P}_{x7} \\ m_j^{(Y)} \ddot{u}_{yj} + k_j^{(Y)} \bar{u}_{yj} &= k_j^{(Y)} u_{yj} \quad j = 1, \dots, N \\ m_j^{(Z)} \ddot{u}_{zj} + k_j^{(Z)} \bar{u}_{zj} &= k_j^{(Z)} u_{zj} \quad j = 1, \dots, N \end{aligned} \tag{12}$$

Esto quiere decir que la parte inercial de la formulación débil de la Ec. (8), se verá modificada por la dinámica de los N resonadores embebidos a lo largo de la viga. Para esto, se introduce un coeficiente α , que es el cociente entre la masa total de los resonadores y la masa de la viga (masa distribuida). De esta manera, se pueden simplificar y adecuar las ecuaciones, ya que específicamente, el tamaño del bandgap depende de la relación de masa total agregada, siempre que exista una cantidad suficiente de resonadores embebidos (Sugino, 2018). Vamos a tener un coeficiente α para el conjunto de resonadores en el eje Y y en el eje Z .

$$\alpha_j^Y = \frac{m_j^{(Y)}}{\rho A l_M^{(Y)}} \quad \alpha_j^Z = \frac{m_j^{(Z)}}{\rho A l_M^{(Z)}} \tag{13}$$

Donde $m_j^{(Y)}$ es la masa de cada uno de los resonadores alineados en el eje Y y $m_j^{(Z)}$ es la masa de cada uno de los resonadores alineados en el eje Z , $l_M^{(Y)}$ y $l_M^{(Z)}$ es la distancia entre los mismos

a lo largo de la longitud de la viga en el eje Y y Z respectivamente, A es el área de la sección transversal de la estructura portante y ρ es la densidad de la estructura portante. De esta manera, al introducir la dinámica de los resonadores, y teniendo en cuenta la hipótesis que contempla un sistema viga-resonadores distribuidos continuamente e idénticamente iguales, para una cantidad de resonadores infinitos, desarrollada por Sugino (2016), se obtiene una nueva matriz global de masa M , que nos deriva en una nueva ecuación matricial correspondiente a la dinámica del modelo con resonadores locales embebidos.

$$\hat{U} = [K + j\omega C - \omega^2 \hat{M}]^{-1} \hat{F} \quad (14)$$

2.4. Modelo estocástico

El modelo estocástico se construye a partir de la formulación de elementos finitos del modelo determinístico, seleccionando los parámetros inciertos y asociándoles variables aleatorias. Se utiliza el principio de máxima entropía para obtener las PDF, ya que ofrece una estrategia consistente y garantiza consistencia con la información disponible (Sampaio y Cataldo, 2010). Las variables aleatorias V_i con $i=1,2,3,4$ se consideran acotadas, cuyos valores límites son conocidos. En este sentido, se asume que el valor medio de las mismas coincide con el valor nominal determinístico de cada uno de los parámetros seleccionados $\mathcal{E}\{V_i\} = \underline{V}_i$, $i=1,2,3,4$ con el fin de chequear la convergencia. Además, podemos asumir que, al no existir dependencia entre las variables, se toman de forma independiente.

De lo anterior, las PDF de las variables pueden ser expresadas de la siguiente manera:

$$p_{V_i}(v_i) = S[\mathcal{L}_{V_i}, \mathcal{U}_{V_i}](v_i) \frac{1}{\mathcal{U}_{V_i} - \mathcal{L}_{V_i}} = S[\mathcal{L}_{V_i}, \mathcal{U}_{V_i}](v_i) \frac{1}{2\sqrt{3}\underline{V}_i\delta_{vi}}, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (15)$$

Donde $S[\mathcal{L}_{V_i}, \mathcal{U}_{V_i}]$ es el soporte, \mathcal{L}_{V_i} y \mathcal{U}_{V_i} son las cotas inferior y superior, \underline{V}_i es el valor esperado y δ_{vi} es el coeficiente de variación, todos pertenecientes a la variable V_i , $i=1,2,3,4$. Luego, es utilizada la distribución uniforme, ya que para el estudio de este trabajo se puede obtener el máximo de entropía. En consecuencia y mediante la función de Matlab `unifrnd(V_i(1 - \delta_{vi}\sqrt{3}), V_i(1 + \delta_{vi}\sqrt{3}))`, se generan las realizaciones correspondientes para las variables aleatorias V_i $i = 1, 2, 3, 4$. Por ende, y mediante el modelo de elementos finitos de la Ecuación Ec. (11 y 14), a través del método de Monte Carlo, con las PDF definidas en la Ec. (15) el modelo estocástico puede definirse mediante la siguiente expresión.

$$\hat{U}(\omega) = [\mathbb{K} - \omega^2 \mathbb{M} + j\omega \mathbb{C}]^{-1} \hat{F} \quad (16)$$

Donde la tipografía diferenciada indica que las entidades son estocásticas. Para simular la dinámica estocástica se utiliza el método de Monte Carlo, lo que implica el cálculo de un sistema determinista para cada realización de las variables aleatorias V_i , $i = 1, 2, 3, 4$. La convergencia de la respuesta estocástica es analizada bajo un criterio de media cuadrática apelando a la siguiente función.

$$conv(N_{MS}) = \sqrt{\frac{1}{N_{MS}} \sum_{j=1}^{N_{MS}} \int_{\Omega} \|\hat{U}_j(\omega) - \hat{U}(\omega)\|^2 d\omega} \quad (17)$$

Donde N_{MS} es el número de muestreos de Monte Carlo y Ω es la banda de frecuencia de análisis. \hat{U} es la respuesta del modelo estocástico y \hat{U} es la respuesta del modelo medio o modelo determinista.

2.5. Propiedades de los componentes para la viga FGM

La viga FGM estará compuesta por dos componentes, divididos en dos fases. La fase metálica que comenzará desde el núcleo de la viga y la fase cerámica que se ubicara en la superficie de la misma. La fase metálica es de acero con modulo de elasticidad longitudinal $E = 214$ Gpa, modulo de elasticidad transversal $G = 80$ Gpa y densidad $\rho = 7800$ kg/m³. Luego, para la otra fase se utilizará un material cerámico, en este caso Alumina, con modulo de elasticidad longitudinal $E = 390$ Gpa, modulo de elasticidad transversal $G = 137$ Gpa y densidad $\rho = 3200$ kg/m³. Las propiedades materiales efectivas de la viga curva FGM, adoptadas para los ejemplos numéricos se definen de acuerdo a la siguiente ecuación.

$$p_{fgm} = p_m + (p_c - p_m) \left| \frac{2x_w}{b_w} \right|^n \quad (18)$$

Donde el termino p_{fgm} identifica una propiedad gradada genérica (módulo de elasticidad, densidad, etc.), mientras que p_c y p_m identifican la propiedad homónima para las fases cerámica y metálica, respectivamente. Luego, x_w es la coordenada que recorre el espesor de la pared de la sección transversal de la viga y t_w es el espesor de la pared. Este último tipo de distribución de material, implica que la viga de paredes delgadas tiene una superficie cerámica que rodea el núcleo metálico. El exponente n es una variable tal que $n \geq 0$; su magnitud da la forma de variación de las propiedades dentro de las paredes de la viga, ya que estas varían desde el núcleo hasta la superficie de la misma (Piovan, 2009).

3. RESULTADOS

3.1. Validación del modelo

En esta sección se realiza una validación del modelo de viga determinista, donde se comparan las frecuencias naturales del modelo de viga curva del presente trabajo con los resultados correspondientes a dos trabajos seleccionados. El modelo de viga curva desarrollado en este trabajo, se puede reducir al caso de una viga recta, si se impone la condición de $R \rightarrow \infty$. Como primer caso, se comparan los valores obtenidos con el modelo numérico 1D del presente trabajo, para una viga curva tipo cajón de paredes delgadas reducida al caso de viga recta, con respecto a los resultados obtenidos en el modelo de elemento finito propuesto por Ziane (2012). En el segundo caso se comparan los valores de frecuencia de vibración libre del modelo 1D del presente trabajo, para una viga curva de sección transversal rígida, con el modelo de viga curva desarrollado por Piovan (2012). Para ambos casos, la comparación se realizó utilizando 12 elementos del modelo de elementos finitos 1D. En el primer caso, para una viga FGM de paredes delgadas, con las siguientes dimensiones $h = 0,106$ m $b = 0,0508$ m $t = 0,0152$ m $L = 1,52$ m. El resultado de la comparación nos arrojó un error máximo del 4%, para las primeras 7 frecuencias naturales. Para el segundo caso, para una viga curva FGM con sección transversal rígida, con las siguientes dimensiones $h = 0,02$ m $b = 0,01$ m $L = 1$ m $R = 1$ m, se obtuvieron mejores resultados. Ya que la comparación arrojó resultados con un error máximo del 1%, en este caso para las primeras 4 frecuencias naturales. Con lo cual, podemos asumir que con los errores de ambas comparaciones, y teniendo en cuenta la cantidad de elementos utilizados, el modelo garantiza la obtención de buenos resultados.

3.2. Estudios computacionales

Se emplea una viga curva FGM tipo cajon de paredes delgadas, con seccion transversal simetrica y con ambos extremos empotrados. Se ejecutó el análisis bajo una respuesta dinámica para

una carga puntual, ubicada en el extremo superior derecho de la sección transversal. Los datos más relevantes de la viga curva para la ejecución de los cálculos son los siguientes: $R = 2\text{ m}$, $L = 1\text{ m}$, $\alpha_j^Y = \alpha_j^Z = 0,4$. La viga curva de paredes delgadas, tiene una sección transversal rectangular, con las siguientes dimensiones: $b = 0,01\text{ m}$, $h = 0,05\text{ m}$ y el espesor de la pared es $t = 0,005\text{ m}$. La amplitud de la carga puntual es $F = 1\text{ N}$ con un ángulo de inclinación $\Psi = 45$. Para atenuar la respuesta a una frecuencia específica ω_r del sistema original, la frecuencia local del resonador debe ser elegida ligeramente menor (por ejemplo, $\omega^{(Y)} = 0,9\omega_r$, $\omega^{(Z)} = 0,9\omega_r$) (Cortinez, 2019; Sugino, 2017). Esto es debido a la extracción de energía cinética por parte de la masa del resonador embebido (Cveticanin, 2016). La Fig. 2 muestra la respuesta dinámica de la solución del elemento finito 1D. En cambio en la Fig. 3, se puede apreciar la respuesta dinámica con la inclusión de los resonadores distribuidos a lo largo de la viga. Donde se puede apreciar la generación de una banda de atenuación o bandgap, en el sector comprendido en la vecindad del valor de la frecuencia original seleccionada, anulando esta frecuencia específica.

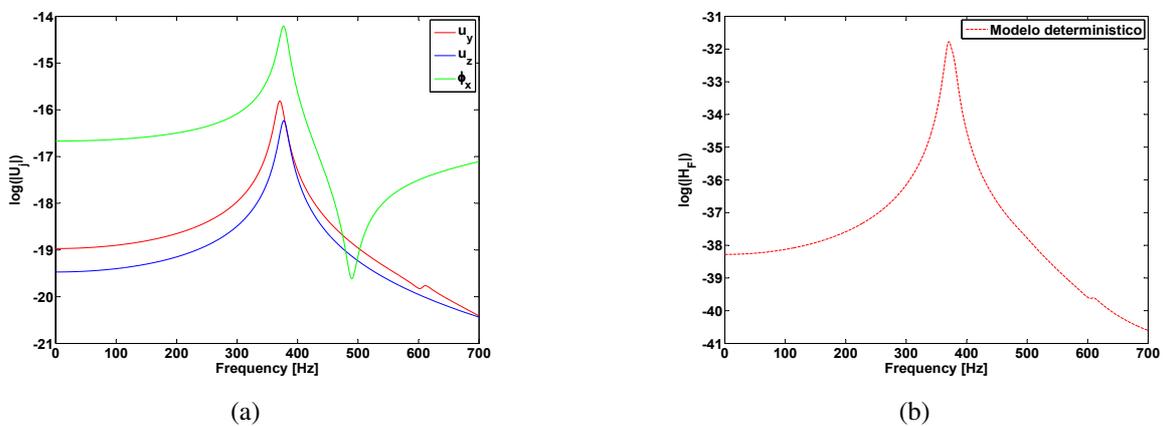


Figura 2: Respuesta dinámica de la viga FGM. (a) Variables cinemáticas.(b) Desplazamiento del punto donde se aplica la carga.

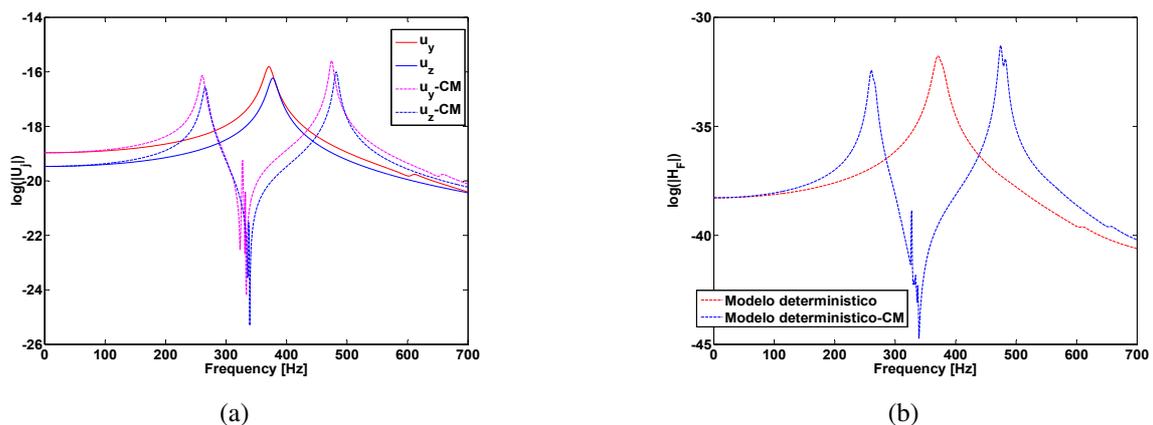


Figura 3: Respuesta dinámica de la viga FGM con Resonadores (a) Variables cinemáticas. (b) Desplazamiento del punto donde se aplica la carga.

3.3. Cuantificación de incertidumbre en la respuesta dinámica

En esta sección se realiza un estudio relacionado con la propagación de incertidumbre sobre aspectos constructivos de la viga FGM con la inclusión de resonadores. Se seleccionaron cuatro

variables aleatorias de acuerdo con las características de los resonadores embebidos y con las propiedades de la viga FGM. Las variables seleccionadas son los coeficientes α_j^Y y α_j^Z y los módulos de elasticidad E_m y E_c , que pertenecen a las propiedades gradativas de la viga. Los valores esperados para las variables aleatorias son los siguientes: $\mathcal{E}\{\alpha_j^Y\} = 0,4$, $\mathcal{E}\{\alpha_j^Z\} = 0,4$, $\mathcal{E}\{E_m\} = 214\text{ Gpa}$ y $\mathcal{E}\{E_c\} = 390\text{ Gpa}$. Se considera que las cuatro variables consideradas como inciertas tienen el mismo coeficiente de variación δ_{vi} . Se realizan las realizaciones de Monte Carlo y de esta manera se obtienen los gráficos de convergencia e incertidumbre. Es posible ver en la Fig. 4, una buena convergencia de manera estable a partir de las 450 iteraciones, para tres coeficientes de variación diferentes. En la Fig. 5 se muestra la respuesta del modelo estocástico, donde puede apreciarse como la incertidumbre de los parámetros se propaga únicamente hacia la zona donde se genera la banda de atenuación, aumentando la dispersión con el aumento de incertidumbre paramétrica.

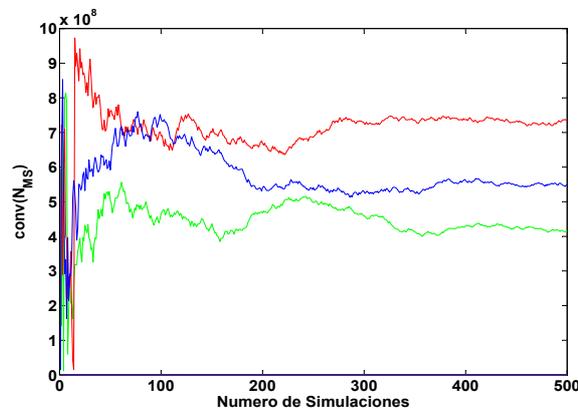


Figura 4: Convergencia para $\delta_{vi} = 0,1$ (Rojo), $\delta_{vi} = 0,08$ (Verde) y $\delta_{vi} = 0,05$ (Azul).

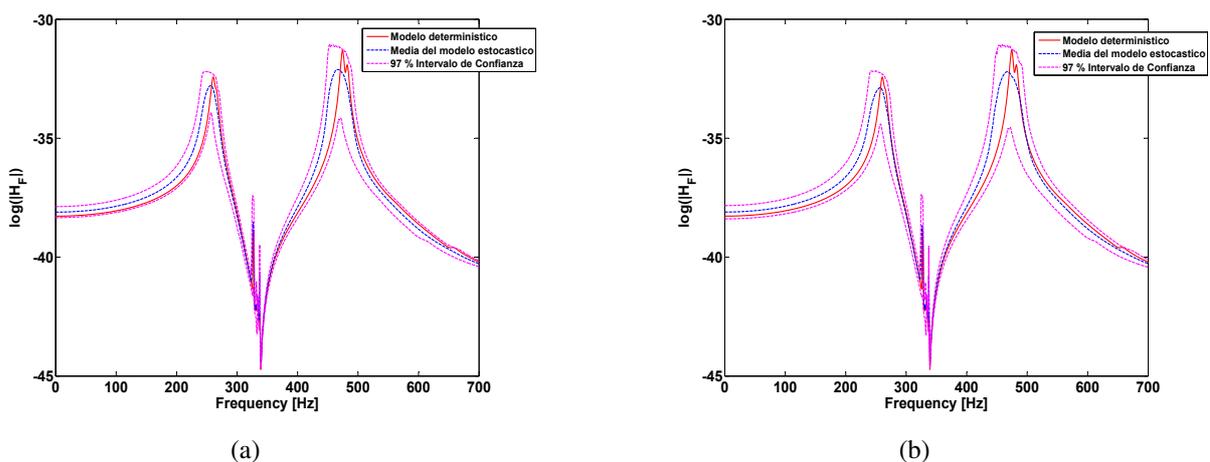


Figura 5: Respuesta del modelo estocástico (a) Para $\delta_{vi} = 0,08$. (b) Para $\delta_{vi} = 0,1$.

4. CONCLUSIONES

En este trabajo se presentó un modelo de viga curva de paredes delgadas tipo cajón construida con materiales funcionales gradados y sección transversal simétrica, para el análisis de

atenuación de vibraciones y la propagación de incertidumbre en ciertos parámetros. Asimismo, se han efectuado estudios sobre la evaluación de la eficacia del diseño de la viga frente a la variación de cuatro variables aleatorias en el modelo estocástico y mediante la incorporación de resonadores embebidos, a lo largo del eje Y y el eje Z para el modelo computacional desarrollado. Para esto, se realizó la evaluación de la robustez del elemento finito 1D desarrollado, apelando a la comparación y demostrando que, con el mismo, se obtienen resultados más que aceptables frente a la comparación con respecto al desarrollo de otros autores. En consecuencia, se puede indicar que mediante la incorporación de los resonadores locales embebidos dentro de la viga curva, se consiguió una banda de atenuación en la cual desaparece la frecuencia del sistema original. Finalmente se realizó el estudio de la incertidumbre, cuyos resultados mostraron una gran sensibilidad de la respuesta a variaciones en los valores seleccionados como parámetros inciertos. A pesar de la incertidumbre en los cuatro parámetros seleccionados, se puede ver que el bandgap, más allá de la dispersión generada, se mantiene en un rango deseable y garantiza la atenuación de la amplitud para la frecuencia seleccionada.

REFERENCIAS

- Bathe K.J. *Finite Element procedures in Engineerign Analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1996.
- Cortinez V. Bandas de atenuación de vibraciones flexotorsionales en vigas localmente resonantes. *ENIEF 2019*, 38:5–7, 2019.
- Cveticanin L. Theory of acoustic metamaterials and metamaterial beams: an overview. *Acta Polytechnica Hungarica*, 13:43–62, 2016.
- Di Giorgio L. Análisis de la pérdida de sintonía en metaestructurapiezoelectrica curva mediante enfoque probabilístico paramétrico. *Mecanica computacional - MECOM*, 38:521–530, 2021.
- Piovan M. y Cortínez V. Mechanics of thin-walled curved beams made of composite materials, allowing for shear deformability. *Thin Walled Structures*, 45:759–789, 2007.
- Piovan M.T. A study on the dynamics of rotating beams with functionally graded properties. *Journal of Sound and Vibration*, 327:134–143, 2009.
- Piovan M.T. In-plane and out-of-plane dynamics and buckling offunctionally graded circular curved beams. *Composite Structures*, 94:3194–3206, 2012.
- Piovan M.T. Dynamics of thin-walled composite beams:analysis of parametric uncertainties. *Composite Structures*, 105:14–28, 2013.
- Sampaio R. y Cataldo E. Comparing two strategies to model uncertainties in structuraldynamics. *Shock and Vibration*, 17:171–186, 2010.
- Sangiuliano L. Influence of boundary conditions onthe stop band effect in finite locally resonant metamaterial beams. *Journal of Sound and Vibration*, 470, 2020.
- Sugino C. On the mechanism of bandgapformation in locally resonant finite elastic metamaterials. *Journal of Applied Physics*, 120:134–501, 2016.
- Sugino C. A general theory for bandgap estimationin locally resonant metastructures. *Journal of Sound and Vibration*, 406:104–123, 2017.
- Sugino C. Merging mechanical and electromechanical bandgapsin locally resonant metamaterials and metastructures. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 116:323–333, 2018.
- Tan K. y Huang H. Blast-wave impact mitigationusing negative effective massdensity concept of elastic metamaterials. *International Journal of Impact Engineering*, 64:20–29, 2013.
- Ziane N. International journal of mechanical sciences. *Journal of Applied Physics*, 66:273–282, 2012.