

## INTERMITENCIA EN UN MAPA BIDIMENSIONAL INTERMITTENCY IN A TWO-DIMENSIONAL MAP

Juan Colman<sup>a</sup> y Sergio Elaskar<sup>a</sup>

<sup>a</sup>*Dto. Aerodinámica, FCEFyN, Universidad Nacional de Córdoba e Instituto de Estudios Avanzados en Ingeniería y Tecnología, CONICET, Córdoba, Argentina*

**Palabras clave:** Puntos fijos, Estabilidad, Intermitencia Caótica, Ciclo Límite, Bifurcación, Longitud Laminar.

**Resumen.** El fenómeno de intermitencia ha sido observado en distintas ramas de la ciencia tales como ingeniería, física, química, economía, medicina, etc. Por ejemplo, dentro de la mecánica de fluidos, la intermitencia es un rasgo característico en flujos turbulentos. En los últimos años se ha desarrollado una nueva teoría sobre intermitencia caótica en mapas unidimensionales que ha permitido una mejor comprensión de la misma. Con la finalidad de describir la intermitencia en sistemas con mayor número de grados de libertad, se estudia la estructura general de la intermitencia tipo-I en un mapa bidimensional. Se analizan numéricamente la configuración del proceso de reinyección, la estructura del canal y la trayectoria en el mapa de retorno. Se calculan resultados numéricos y se los comparan con los de intermitencia en mapas unidimensionales. Se obtienen relaciones de escala y características en función de las trayectorias. Se estudia la evolución temporal y las relaciones de escala.

**Keywords:** Fixed points, Stability, Intermittency, Limit Cycle, Bifurcations, Laminar Length.

**Abstract.** The phenomenon of intermittency has been observed in different branches of science such as engineering, physics, chemistry, economics, medicine, etc. For instance, in fluid mechanics, intermittency is a key feature in turbulent flow. In the latest years a new theory of chaotic intermittency applied to one dimensional maps has been developed, this allowed a better understanding of it. In order to describe intermittency in systems with higher number of degrees of freedom, the general structure of type-I intermittency in a two dimensional map is studied. The configuration of the reinjection process is analyzed numerically, the channel structure and the trajectory in the return map. Numerical results are computed and compared with those of intermittency in one dimensional maps. Scale relations and characteristic relations are obtained in function of trajectories. Temporal evolution is studied alongside scale relations.

## 1. INTRODUCCIÓN

El fenómeno de intermitencia caótica tiene lugar en diversos sistemas dinámicos ya sea naturales o artificiales, dónde períodos de comportamiento regular se alternan con períodos de evolución caótica, constituyendo una ruta al caos determinista. Dentro de la mecánica de fluidos aparece en el sistema de Lorenz, la convección de Rayleigh-Bénard; la ecuación derivada no lineal Schoendinger, flujos turbulentos, etc. (Elaskar y del Río, 2017). Generalizar la teoría a dos dimensiones permitirá describir y estudiar un número mayor de fenómenos (Schuster y Just, 2005; Nayfeh y Balachandran, 1995; Marek y Schreiber, 1995; Elaskar y del Río, 2017).

La primera clasificación de intermitencia propuso tres tipos, que se producen por medio de una bifurcación, donde los valores propios de la matriz Jacobiana del sistema evaluados en las solución local abandonan el círculo unidad. Intermitencia tipo I aparece si un valor propios abandona el círculo unitario a través de +1, intermitencia tipo II si dos valores propios complejos conjugados abandonan el círculo unitario, e intermitencia tipo III si un valor propio se aleja del círculo unitario por -1 (Pomeau y Manneville, 1980).

Históricamente el estudio de intermitencia estuvo restringido a sistemas dinámicos de tiempo discreto (mapas) de una dimensión, obteniendo una gran variedad de comportamientos con baja complejidad. Una nueva teoría de intermitencia caótica con y sin ruido ha sido desarrollada en los últimos años para mapas unidimensionales, la misma incluye a la teoría clásica como un caso particular (del Río y Elaskar, 2010, 2016, 2018, 2021, 2012; del Río y Makarov, 2013; del Río y Donoso, 2014; Elaskar y Costa, 2017; Elaskar y del Río, 2018, 2023a,b; Elaskar y Donoso, 2011; Elaskar y A., 2015; Elaskar y Gutierrez Marcantoni, 2018).

En (Kim y Kye, 2001) se estudia un sistema que presenta intermitencia tipo I en dos dimensiones, dónde se describe la evolución temporal del sistema y se calcula la longitud laminar media como una función de un parámetro de control definido. A partir de esta propuesta se describe el sistema y encuentran los exponentes característicos encontrados en sistemas unidimensionales.

## 2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

El mapa propuesto es el siguiente (Kim y Kye, 2001):

$$x_{n+1} = 4\alpha x_n (1 - x_n) + \beta y_n (1 - x_n) \quad (1a)$$

$$y_{n+1} = 4\alpha y_n (1 - y_n) + \beta x_n (1 - y_n) \quad (1b)$$

El mismo representa la forma clásica del mapa de retorno de un sistema cerca de una bifurcación tangente, siendo  $\alpha$  el parámetro de "capacidad de carga" del sistema en términos de un mapa logístico, y  $\beta$  el que representa la intensidad del acople entre las variables.

Se calculan los puntos fijos del sistema, su estabilidad y los diagramas de bifurcación correspondientes, para diferentes valores de  $\alpha$ , con dos valores de  $\beta$  diferentes.

### 2.1. Puntos fijos y estabilidad

Los puntos fijos son aquellos pares  $(x^*, y^*)$  tales que  $x^* = F(x^*, y^*)$  y  $y^* = G(x^*, y^*)$ . La estabilidad de estos puntos depende del comportamiento dinámico en su entorno. Algunos "atraen" puntos cercanos, otros los "repelen", otros actúan como el centro de trayectorias periódicas, este comportamiento hace a la estabilidad de los puntos fijos.

La estabilidad de los mismos quedará determinada en principio por los valores propios de la

matriz jacobiana. Si el sistema tiene la forma:

$$x_{n+1} = F(x_n, y_n) \quad (2a)$$

$$y_{n+1} = G(x_n, y_n) \quad (2b)$$

y los puntos fijos son  $(x^*, y^*)$ . Entonces el Jacobiano evaluado en los puntos fijos es:

$$J = \begin{vmatrix} \partial_x F(x^*, y^*) & \partial_y F(x^*, y^*) \\ \partial_x G(x^*, y^*) & \partial_y G(x^*, y^*) \end{vmatrix} \quad (3)$$

Los valores propios del mismo nos darán la caracterización de la estabilidad. Si consideramos todos los posibles valores que pueden tomar en el plano complejo, el punto fijo será hiperbólico si ningún valor propio se encuentra sobre el círculo unitario. Si al menos uno de los valores propios está fuera del círculo unitario, el mismo será inestable, y estable si todos los valores propios se encuentran dentro del círculo unitario. De encontrarse al menos un valor propio sobre el círculo unitario, tendremos un punto fijo no hiperbólico, para el cual no vale la condición de inestabilidad. Dado un sistema dinámico cuya evolución es función de su estado actual y de un conjunto de parámetros, los puntos fijos dependen solo de la forma del sistema y sus parámetros. Las bifurcaciones son los cambios cualitativos en los puntos fijos (aparición, desaparición, cambio de estabilidad, multiplicación, etc.) que se manifiestan al modificar un parámetro de control del sistema.

## 2.2. Longitud laminar

La longitud laminar en el fenómeno de intermitencia es la duración de la fase laminar medida en iteraciones para sistemas discretos o tiempo para los continuos. En intermitencia tipo I es una función de la distancia entre el mapa y la bisectriz  $x_n = x_{n+1}$ , llamada canal. La función teórica de esta longitud para intermitencia tipo I es:

$$l(\epsilon, x_{in}) = \frac{1}{\sqrt{a\epsilon}} \left[ \arctan \left( \sqrt{\frac{a}{\epsilon}} \right) - \arctan \left( \frac{a}{\epsilon} x_{in} \right) \right] \quad (4)$$

dónde  $x_{in}$  es el punto de reinyección en la zona laminar y  $c$  el punto de salida de dicha zona. Para encontrar la longitud media, se emplea la expresión dada en Ec. (5) (Elaskar y del Río, 2017):

$$\langle l \rangle = \int l(\epsilon, x_{in}) P(\epsilon) d\epsilon \quad (5)$$

Estas ecuaciones predicen una dependencia de la forma  $\langle l \rangle \sim \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$  para sistemas de una dimensión.

## 3. RESULTADOS

Se calculan puntos fijos, estabilidad y diagramas de bifurcación para lograr una descripción clásica de la dinámica del sistema bajo cambios del parámetro  $\alpha$ . Los puntos fijos del mapa  $F(x, y)$ , dado por la Ec. (2) se obtuvieron de manera analítica usando el programa *Wxmaxima* de álgebra simbólica. Siendo estos:

$$x_1^* = 0 \quad y_1^* = 0 \quad (6)$$

$$x_2^* = \frac{\alpha - 0,125}{\alpha + 0,125} \quad y_2^* = \frac{\alpha - 0,125}{\alpha + 0,125} \quad (7)$$

$$x_3^* = \frac{0,09375 - 0,25\alpha}{0,046875 + (-0,5 + \alpha)\alpha + A} \quad y_3^* = \frac{0,09375 - 0,25\alpha}{0,046875 + (-0,5 + \alpha)\alpha - A} \quad (8)$$

$$x_4^* = \frac{0,09375 - 0,25\alpha}{0,046875 + (-0,5 + \alpha)\alpha - A} \quad y_4^* = \frac{0,09375 - 0,25\alpha}{0,046875 + (-0,5 + \alpha)\alpha + A} \quad (9)$$

Con  $A = \sqrt{(\alpha - 0,375)(\alpha - 0,125)(\alpha^2 + 0,046875)}$ .

Una vez definido  $\beta$ , los puntos fijos son función únicamente del parámetro de control  $\alpha$ . la evolución de dichos puntos con  $\alpha$  se muestran en las Figuras 1a y 1b

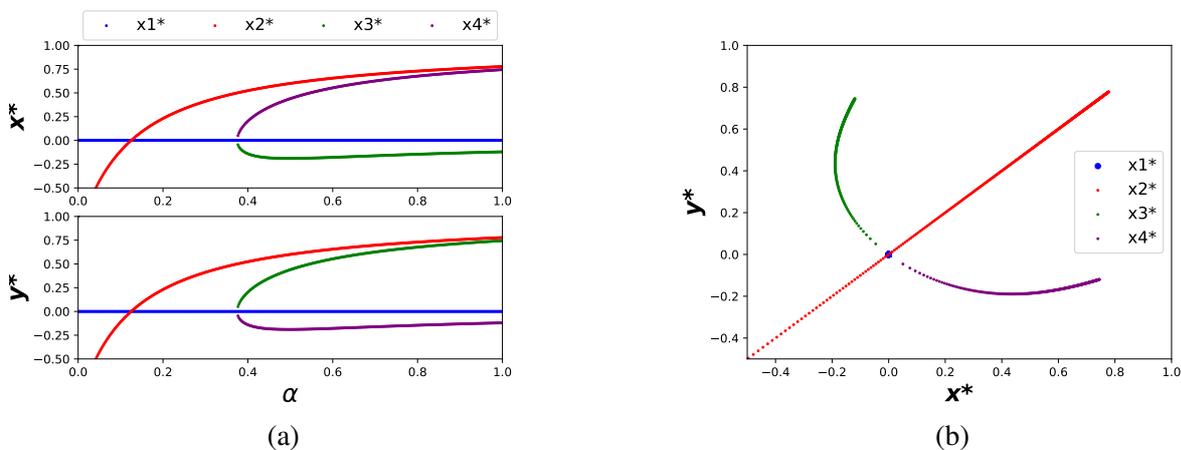


Figura 1: a) Puntos fijos del mapa  $F(x, y)$  descrito por la Ec. (2) en función de  $\alpha$ . b) Puntos fijos del mapa  $F(x, y)$  definido por la Ec. (2) en función de  $\alpha$  en plano  $(x, y)$ .

Estos puntos fijos fueron obtenidos para un valor de  $\beta = 0,5$ . Numéricamente, se logra un diagrama clásico de bifurcación, evolucionando el sistema durante un determinado número de iteraciones hasta alcanzar el estado estacionario y repitiendo el proceso para diferentes valores del parámetro.

En la Figura 2.a se observa que existen dos diagramas de bifurcación superpuestos, uno en azul y uno en rojo. El azul corresponde a valores estacionarios obtenidos de condiciones iniciales donde  $x_0 = y_0$  fijas para cada  $\alpha$ . Es claro ver que se obtiene el mapa logístico unidimensional de esta forma, puesto que se desacoplan las dos ecuaciones del sistemas dado en la Ec. (2). Por otro lado, el rojo es obtenido con condiciones iniciales al azar, para cada  $\alpha$ , generadas en el intervalo  $(0, 1)$ . De la misma figura, se observa cómo en un caso (valores en rojo) la primera bifurcación aparece en  $\sim \alpha = 0,53$ , siendo ésta de duplicación de período. Mientras que para el diagrama de bifurcación en azul, la primera ocurre aproximadamente  $\alpha = 0,62$  y se destaca que dicho diagrama corresponde al mapa logístico.

Para describir estas bifurcaciones, se calculan los puntos fijos analíticos del mapa  $F^2(x, y) = F \circ F(x, y)$ , y se evalúan los valores propios del Jacobiano asociado a cada punto fijo.

La Figura 2.b muestra la duplicación de los puntos fijos en los mismos valores de  $\alpha$ , dando cuenta de las soluciones de período 2. Las Figuras 3a y 3b muestran para dos valores de  $\beta$  el diagrama de bifurcación analítico, del punto fijo mostrado en color púrpura en la Figura 2.b, junto con sus dos bifurcaciones asociadas:

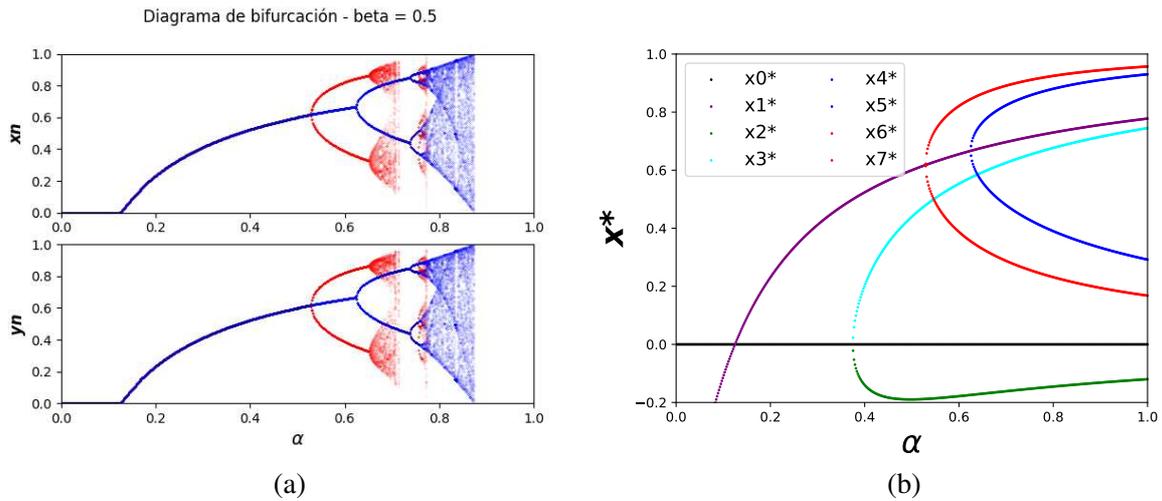


Figura 2: a) Diagrama de bifurcación numérico  $\beta = 0,5$ , b) Diagrama de bifurcación analítico de mapa  $F^2(x, y)$ .

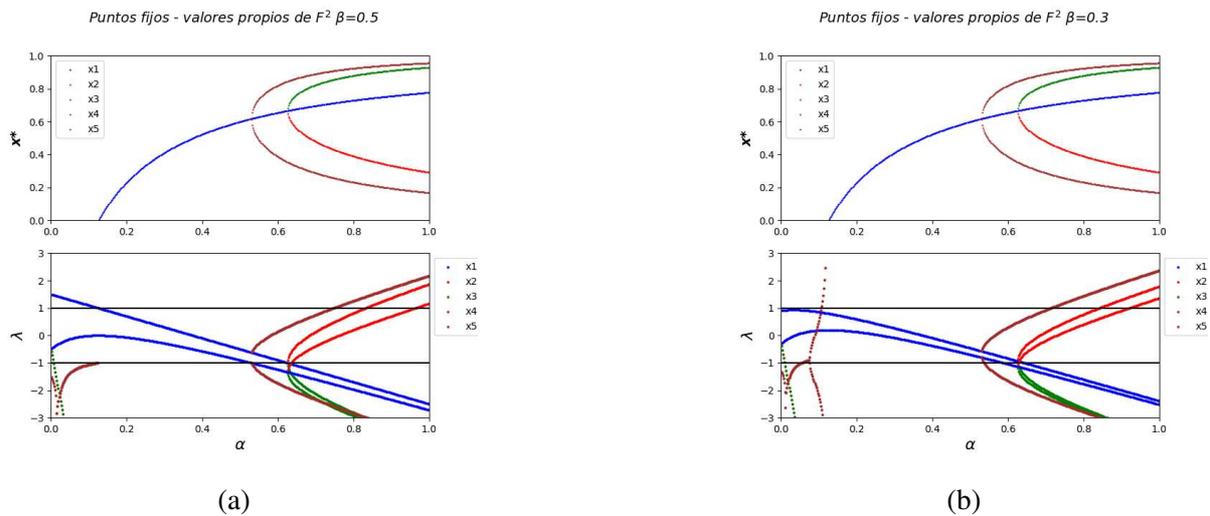


Figura 3: Puntos fijos y valores propios correspondientes a los mismos para a)  $\beta = 0,5$  y b)  $\beta = 0,3$

Cada bifurcación corresponde a la salida de un valor propio del círculo unitario a través de  $-1$ , dando cuenta de una bifurcación de duplicación de período. Se destaca, también, que los valores propios de los puntos fijos bifurcados indican un carácter inestable (para los dos "superiores", verde y marrón) y estable hasta un valor de  $\alpha \approx 0,9$  y  $\alpha \approx 0,7$  (para las ramas "inferiores", en rojo y marrón), cuando se hacen inestables.

De forma complementaria al análisis, se calculó el campo direccional del mapa en el plano  $(x, y)$ , en conjunto con los puntos fijos del mapa  $F^2(x, y)$  que aparecen a medida que el parámetro  $\alpha$  es incrementado.

La Figura 4 muestra el campo direccional de  $F^2$ , y sus puntos fijos. En 4a, con  $\alpha = 0,2$  se tiene únicamente 2 puntos fijos, uno en  $(0, 0)$  y otro en  $\sim (0,2, 0,2)$  siendo el primero inestable y el segundo estable. En la Figura 1a son el punto fijo en azul y rojo respectivamente. Ya en 4b con  $\alpha = 0,45$  ha ocurrido la bifurcación que se ve en 1a y aparecen los puntos fijos en

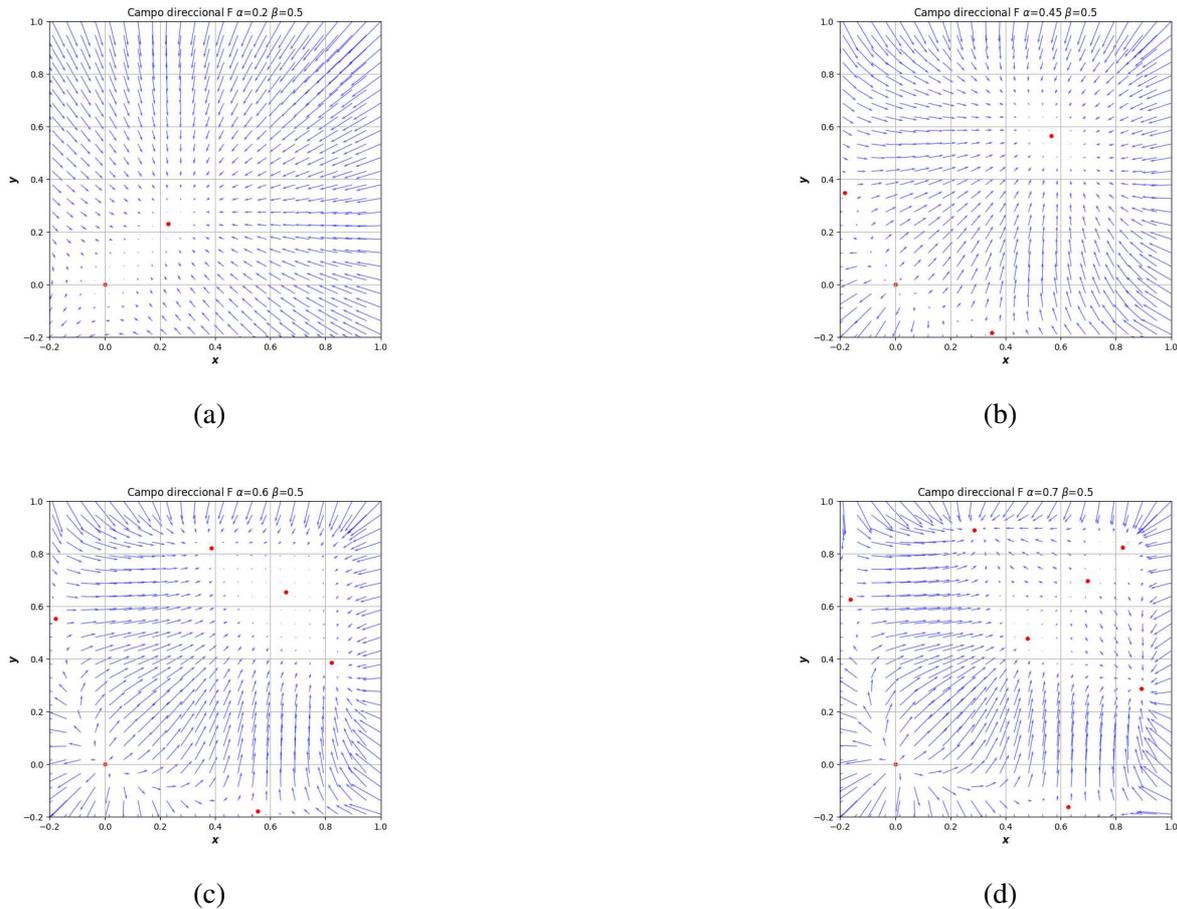


Figura 4: Campo vectorial  $F^2$  para a)  $\alpha = 0,2$ , b)  $\alpha = 0,45$ , c)  $\alpha = 0,6$ , d)  $\alpha = 0,7$

verde. Los dos puntos fijos nuevos son de tipo silla, esto se puede ver en el campo vectorial a sus alrededores, siendo este atractivo en una dirección principal y repulsivo en la otra. En 4c tenemos dos nuevos puntos fijos ocurridos en la bifurcación correspondiente a la solución roja de 2b y marrón en 3a y 3b las cuales tienen los mismos valores propios como se ve en dicha Figura (al estar superpuestos solo se observa un par). En 4d aparece el par mostrado en azul en 2b y en rojo y verde en 3a y 3b, teniendo estos un valor propio dentro del círculo unidad y otro fuera. Si miramos la Figura 5 vemos que para valores de  $\alpha \sim 0,7$  y  $\sim 0,8$  el mapa presenta un comportamiento mucho más complejo del que puede verse en el campo vectorial descrito, por lo que no se refleja la estabilidad aparente de los puntos fijos de las Figuras 4c y 4d con los autovalores mostrados en las Figuras 3a y 3b. Existe un conjunto de puntos fijos que tienen la característica que  $x^* = y^*$ , estos puntos fijos corresponden al atractor mostrado en azul en 2a, ya que las soluciones con  $x = y$  desacoplan el sistema y lo transforman en dos mapas logísticos independientes. En la Figura 5 se reproduce la Figura 2 de Kim y Kye (2001).

la Figura 5 sólo es factible de obtener si se manipulan deliberadamente las condiciones iniciales de la trayectorias, para ser diferentes con valores de  $\alpha$  inferiores a  $\sim 0,72$  y a partir de este valor iniciar la evolución en condiciones iniciales iguales para cada  $\alpha$ . Si se construye un diagrama únicamente con condiciones iniciales  $x_0 \neq y_0$  para todo  $\alpha$  se obtiene la primera de las dos imágenes mostradas en la Figura 6, si en cambio sólo se emplea  $x_0 = y_0$  para todo  $\alpha$ , se encuentra la imagen derecha en la Figura 6.

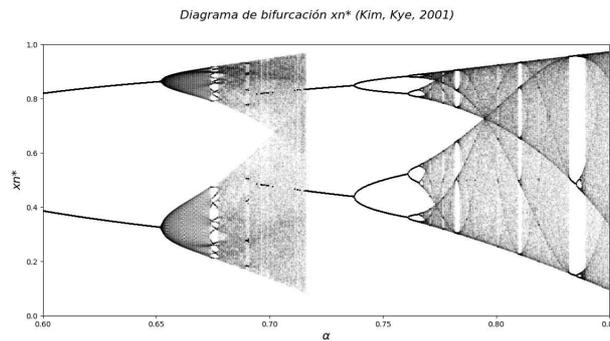


Figura 5: Diagrama de bifurcación de  $x^*$ .

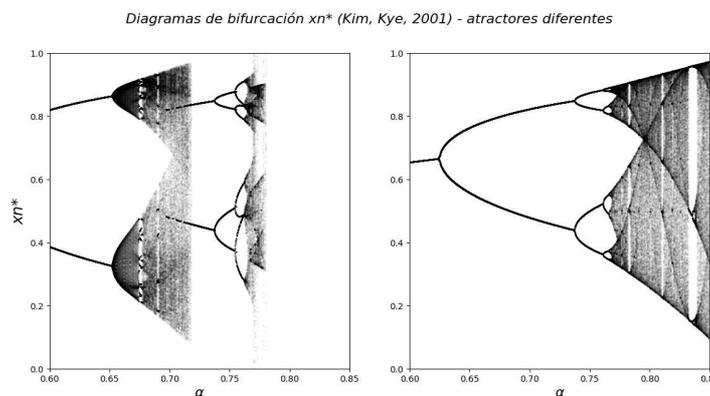


Figura 6: Diagramas de bifurcación con condiciones iniciales a) diferentes entre sí y b) iguales entre sí.

Para  $\alpha > \alpha \sim 0,72$ , la cuenca de atracción del atractor de la Figura 6.a desaparece virtualmente, y queda como única solución estable el atractor logístico, obtenido cuando la evolución se inicia sobre la recta bisectriz del plano  $x$ - $y$ . En estos diagramas de bifurcación Kim y Kye identifican una solución de período 14 en  $\alpha \sim 0,674$ , ubicada entre soluciones caóticas para valores de  $\alpha$  inferiores y superiores, por lo que estudiar el mapa de retorno  $n + 14$  se vuelve de interés, ya que este tipo de bifurcaciones sugieren la presencia de intermitencia.

El mapa de retorno  $n + 14$  del sistema para valores de  $\alpha$  dentro de la región del atractor periódico, tiene la forma mostrada en la Figura 7a. La misma permanece sobre una de las "ramas" del atractor durante un período determinado, para luego tomar valores de la otra rama, y repetir este proceso de manera cíclica, por lo que los autores determinaron que se trataba de una solución tipo ciclo límite, además si se observa la trayectoria en el espacio de estados, ésta es una curva cerrada, como se ve en la Figura 7b.

El comportamiento del sistema se comprende mejor si se analiza el mapa de retorno  $x_{n+1}$  versus  $x_n$ . En la Figura 7b se ve que las "mesetas" observadas en 7a se deben a que la solución del sistema se aproxima a la recta  $x_n = x_{n+1}$  por lo que se encuentra cerca de un punto fijo del mismo, permaneciendo cerca un número de iteraciones dado hasta que rápidamente es expulsada y trasladada a una nueva región cercana a la recta bisectriz. Cada vez que la trayectoria está cerca de la misma, se forma un estrecho canal de forma similar a intermitencia tipo I en mapas unidimensionales. En (Kim y Kye, 2001) se clasifica este comportamiento como intermitencia, y se obtiene una ley de evolución de la longitud laminar media y la compara con la ley encontrada para sistemas unidimensionales en la teoría clásica.

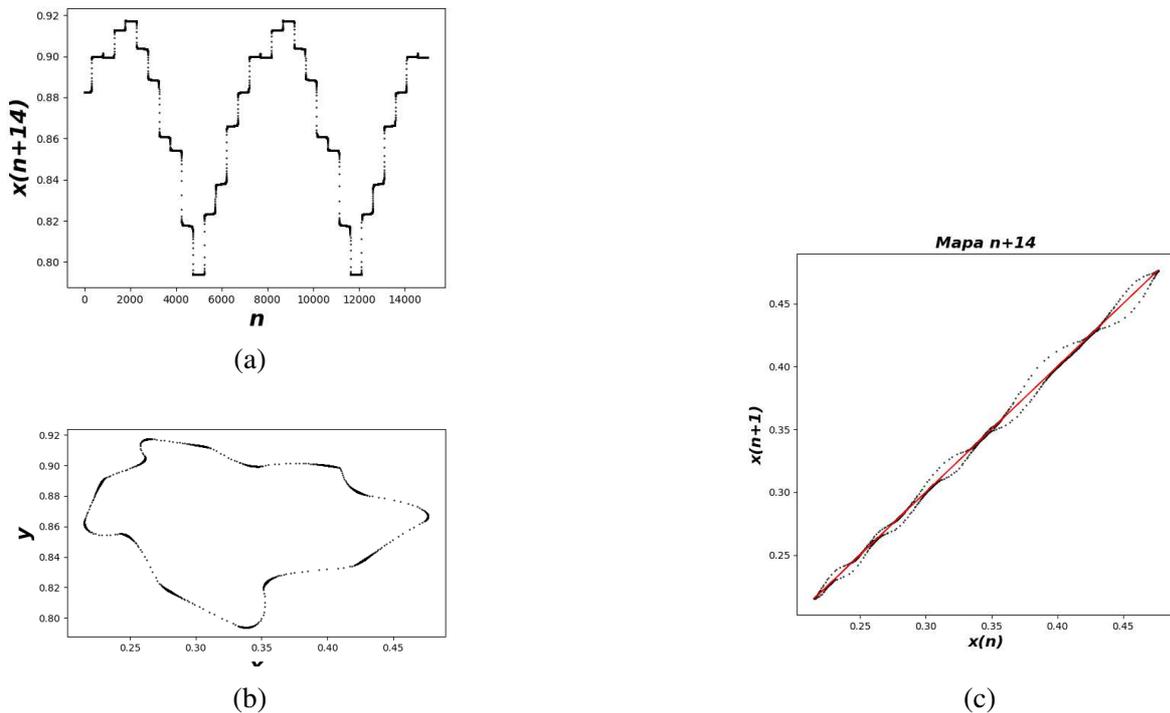


Figura 7: a) Evolución temporal de mapa  $n+14$  con  $\alpha = 0,67414$ , b) Mapa de retorno  $n+14$  con  $\alpha = 0,67414$  c) Atractor en plano  $x - y$ .

Para sistemas unidimensionales que presentan intermitencia tipo I, la longitud laminar media cambia en función del parámetro de control  $\epsilon$  de la siguiente forma (Elaskar y del Río, 2017):

$$\langle l \rangle \sim \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \quad (10)$$

En sistemas unidimensionales que presentan intermitencia tipo I,  $\epsilon$  es proporcional a la distancia entre el mapa y la recta bisectriz, determinando el conocido "ancho" del canal, a través del cual la trayectoria pasa más lentamente y dónde la región laminar característica de la intermitencia está definida.

Se ha logrado observar una separación del mapa  $n + 14$  respecto de la bisectriz al modificar el parámetro de control definido como  $\alpha_c - \alpha$ , siendo  $\alpha_c$  el valor crítico del parámetro  $\alpha$  para el cual se afirma que existe intermitencia y se encuentra el ciclo límite.

En este trabajo, se ha confirmado esta ley, indicando que para sistemas de dos dimensiones se observa el mismo comportamiento de escalamiento de la longitud laminar en función del parámetro de control que en mapas unidimensionales. Para tal fin el intervalo laminar se define como las etapas de la evolución donde la trayectoria no cambiaba notablemente su posición, entiéndase las "mesetas" de la Figura 7a. Pero, a diferencia de un sistema de una dimensión, la región laminar no es conexa, y se conforma de dominios muy acotados a través de los cuáles el sistema salta rápidamente generándose una estructura de múltiples canales.

Para medir cuantas iteraciones tarda el sistema en atravesar por cada canal, se definió la función de error relativo de la variable  $x$ :

$$x_{err} = \left| \frac{x_{n+14 \cdot (i+1)} - x_{n+14 \cdot (i)}}{x_{n+14 \cdot (i)}} \right| \quad (11)$$

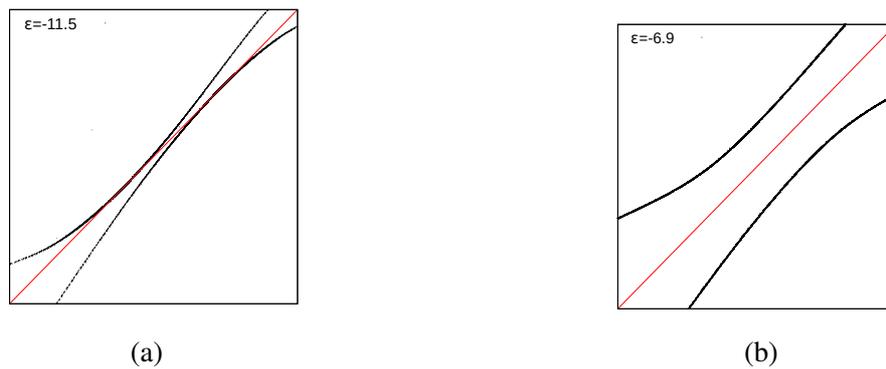
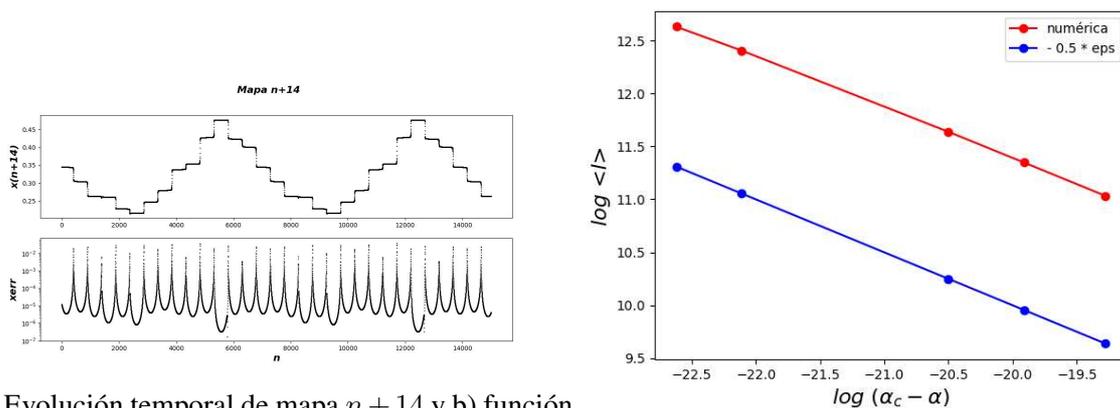


Figura 8: Distancia entre mapa  $n + 14$  y recta bisectriz, para diferentes valores del parámetro  $\epsilon$ .

De esta forma se detecta cuando los cambios sucesivos de la variable son pequeños, y por ende la trayectoria se encuentra en una región laminar (iterando dentro de uno de los 14 canales). Note que los intervalos laminares quedan definidos por un error relativo menor a cierto umbral fijado. La evolución temporal de la solución  $x_{n+14}$  se muestra en la Figura



(a) Evolución temporal de mapa  $n + 14$  y b) función error relativo del mismo mapa.

(b) Longitud laminar media y parámetro de control.

Se determinó la cantidad total de iteraciones que le toma al ciclo límite completarse, despreciando las iteraciones de transición entre regiones laminares, puesto que estas son poco significativas en comparación con las otras, obteniéndose los resultados dados en la Figura 9b. De ella se deduce la misma pendiente que fue obtenida en (Kim y Kye, 2001).

#### 4. CONCLUSIÓN

El trabajo muestra la complejidad que un mapa de dos dimensiones puede mostrar. Las soluciones del sistema se multiplican rápidamente con la modificación del parámetro de control  $\alpha$ , cambiando su estabilidad. La simetría del sistema da lugar a que los diagramas de bifurcación dependan de las condiciones iniciales. Se corrobora que las bifurcaciones del punto fijo definido en la Ec. (7) son acompañadas de cambios en la estabilidad del mismo. En lo que al ciclo límite respecta, se verifica la relación entre la longitud laminar media y el parámetro de control  $\alpha_c - \alpha$ , sin embargo, lo que se midió fueron las iteraciones totales del ciclo límite, y no hubo ninguna

distinción entre fase caótica y regular, no encontrándose la presencia de intermitencia (en su definición usual para sistemas unidimensionales) en ese entorno de  $\alpha$ . Como tareas futuras, se propone revisar el diagrama de bifurcación y estudiar otras regiones críticas que podrían tener presencia de intermitencia con la finalidad de caracterizarla.

## REFERENCIAS

- del Río E. y Elaskar S. New characteristic relation in type ii intermittency. Int. J. Bifurcation Chaos, 20:1185–1191, 2010.
- del Río E. y Elaskar S. On the intermittency theory. Int. J. Bifurcation Chaos, 26:1650228, 2016.
- del Río E. y Elaskar S. Experimental evidence of power law reinjection in chaotic intermittency. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat., 64:122–134, 2018.
- del Río E. y Elaskar S. Type iii intermittency without characteristic relation. Chaos., 31:043127, 2021.
- del Río E.; Sanjuán M. y Elaskar S. Effect of noise on the reinjection probability density in intermittency. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat., 17:3587–3596, 2012.
- del Río E.; Elaskar S. y Donoso J. Laminar length and characteristic relation in type i intermittency. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat., 19:967–976, 2014.
- del Río E.; Elaskar S. y Makarov S. Theory of intermittency applied to classical pathological cases. Chaos., 19:967–976, 2013.
- Elaskar S.; del Río E. y Costa A. Reinjection probability density for type iii intermittency with noise and lower boundary of reinjection. J. Comp. Nonlinear Dynam., 12:031020–11, 2017.
- Elaskar S.; del Río E. y Donoso J. Reinjection probability density in type iii intermittency. Physica A., 390:2759–2768, 2011.
- Elaskar S.; del Río E. y Gutierrez Marcantoni L. L. non-uniform reinjection probability density function in type v intermittency. Nonlinear Dynam., 92:683–697, 2018.
- Elaskar S.; del Río E.K.G. y A. C. Effect of the lower boundary of reinjection and noise in type ii intermittency. Nonlinear Dynam., 79:1411–1424, 2015.
- Elaskar S. y del Río E. New Advances on Chaotic Intermittency and its Applications. 2017.
- Elaskar S. y del Río E. Discontinuous reinjection probability density function in type v intermittency. J. Comp. Nonlinear Dynam., 13:121001, 2018.
- Elaskar S. y del Río E. Review of chaotic intermittency. Symmetry., 15:1195, 2023a.
- Elaskar S. y del Río E. Theoretical evaluation of the reinjection probability density function in chaotic intermittency. Symmetry., 15:1591, 2023b.
- Kim C. y Kye W. Two-dimensional type-i intermittency. Physical Review E, 2001.
- Marek M. y Schreiber I. Chaotic behaviour of deterministic dissipative systems. Cambridge University Press., 1995.
- Nayfeh A. y Balachandran B. Applied nonlinear dynamics. Wiley, 1995.
- Pomeau Y. y Manneville P. Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems. Commun. Math. Phys., 74:189–197, 1980.
- Schuster H. y Just W. Deterministic chaos. Wiley VCH, 2005.